ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option technologique

MATHÉMATIQUES

Année 2002

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et on note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

On définit la suite (u_n) par: $\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$

Etude de la fonction f

1. Etudier le signe du trinôme $P(x)$ défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^2 - x + 1$
   En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$

2. Etudier f ,préciser les limites aux bornes, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

3. Comportement de C au voisinage de $+\infty$

   (a) Montrer que ,pour tout x strictement positif :

   $$f(x) - x = \frac{\dfrac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} + 1}$$

   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ ainsi qu'une équation de (Δ) asymptote à (C) en $+\infty$.

4. Résoudre l'équation $f(x) = x$

5. Majoration de la valeur absolue de f' sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$

   (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$

   (b) Montrer que $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \quad f(x) \geqslant \sqrt{\frac{3}{4}}$

   (c) En déduire que $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$

Convergence de la suite (u_n)

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , u_n \in [\frac{1}{2}; 1]$

2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$

3. (a) Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leqslant (\frac{1}{\sqrt{3}})^n \, |u_0 - 1|$

Exercice 2

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul des puissances de M

1. Déterminer l'expression de D^n, pour tout entier naturel n non nul.
2. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et exprimer P^{-1} , sous forme d'un tableau de nombres.
3. Calculer le produit $P^{-1}MP$
4. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.
5. Ecrire M^n sous la forme d'un tableau de nombres, où n est un entier naturel non nul.

Suites définies par une relation de récurrence

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases}$. et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2w_n}{4} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{4} \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n + 2w_n}{4} \end{cases}$

Pour tout entier naturel n,on note : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

1. Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n
2. (a) En déduire l'expression de X_n en fonction de M^n et de X_0 pour tout entier n, supérieur ou égal à 1.
   (b) A l'aide des résultats obtenus en 5, déterminer alors l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.
   (c) Déterminer les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Exercice 3

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an.
Pour chaque plante ,la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $\frac{3}{4}$, la probabilité de donner une fleur blanche vaut $\frac{1}{4}$.
Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul:

- si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$ elle donnera une fleur rose.
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera l'année $n+1$ de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

Etude d'une suite

n désigne un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n, la probabilité de l'événement R_n «la plante donne une fleur rose la nième année»

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético géométrique qui vérifie :
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p_1 .
3. Que vaut p_1 ? En déduire p_n , ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$
4. (a) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années?
   (b) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années?

Etude d'une variable aléatoire.

Un client vient d'acheter une commande de 10 000 plantes choisies au hasard dans le stock. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de plantes parmi les 10 000 achetées qui donnent la première année une fleur rose.

1. Reconnaître la loi de X, donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$. On note σ l'écart type de X.
   Vérifier que l'on a $\sigma = 25\sqrt{3}$
2. Par quelle loi normale peut-on approcher la loi de X ?
3. Sans tenir compte de la correction de continuité, utiliser cette approximation pour donner une valeur approchée de $P(7450 \leqslant X \leqslant 7550)$.

On donne $\Phi(\frac{2}{\sqrt{3}}) \approx 0,87$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.