ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option technologique

MATHÉMATIQUES

Année 2003

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$ et on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonorrnal.

On définit la suite (u_n) par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

Etude de la fonction f.

1. Justifier le fait que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout x réel, on a : $f(x) = -x + 2 - \ln(e^{-x} + 1)$.
   En déduire que f est paire sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que la droite D d'équation : $y = -x + 2$ est asymptote à C et étudier la position de la courbe C par rapport à l'asymptote D.
5. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
   Etudier le signe de f' et donner le tableau de variations de f.
6. Déterminer la solution, notée α, de l'équation $f(x) = x$.
7. Montrer que pour tout x réel : $f"(x) = -2\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$
8. En déduire que : $\forall x \in [0, 1], \quad |f"(x)| \leqslant \dfrac{e-1}{e+1}$

Convergence de la suite (u_n).

On donne les valeurs approchées à 10^{-2} près suivantes :

$$f(0) \simeq 0,61 \quad f(1) \simeq 0.37 \quad \ln(e-1) \simeq 0,54$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant (\dfrac{e-1}{e+1})^n$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à préciser.

Exercice 2

On considère la matrice A suivante : $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

Calcul de la puissance $n^{ème}$ de A.

1. Calculer le produit matriciel $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible?
2. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = \dfrac{1}{2}(A^2 + A)$

3. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe des réels a_n et b_n tels que :
   $A^n = a_n A^2 + b_n A$ avec $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & b_n + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n \end{array}\right.$.
   Donner a_1 et b_1

4. Montrer que pour tout n non nul : $a_n + b_n = 1$.
   En déduire que : $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$

5. Exprimer alors b_n et $a_n$en fonction de n.

Etude de la loi d'une variable aléatoire X_n

Un point lumineux se déplace sur les sommets d'un triangle, notés C_0, C_1, C_2 selon le protocole suivant :

- - A l'instant 0, le point lumineux se situe en C_0
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}$, le point lumineux est en C_0, à l'instant $n+1$ il est en C_1
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}^\times$, le point lumineux est en C_1, à l'instant $n+1$ il est en C_0 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, en C_1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, en C_2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}^\times \backslash \{1\}$ le point lumineux est en C_2, à l'instant $n+1$ il est en C_1.

On appelle X_n la variable aléatoire égale à i si le point lumineux se trouve à l'instant n sur le sommet C_i, pour $i \in \{0, 1, 2\}$

1. On note U_n la matrice unicolonne : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ où $P(X_n = i)$ est la probabilité de l'événement $(X_n = i)$.
   Préciser U_0 et U_1.

2. Utiliser la formule des probabilités totales et montrer que : $U_{n+1} = AU_n$

3. En déduire que pour tout entier n non nul : $U_n = A^n U_0$.
   Préciser U_2, puis montrer que : $U_n = a_n U_2 + b_n U_1$.

4. En déduire les probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2)$ en fonction de n, ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.

5. Montrer que l'espérance de X_n est indépendante de n.

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant :

- une boule numérotée 1.
- deux boules numérotées 2.
- ....
- n boules numérotées n.

Epreuve 1

On tire une boule dans cette urne, on note X la variable aléatoire représentant le numéro de la boule obtenue.

1. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. Déterminer le nombre total de boules dans l'urne.
3. Déterminer la loi de X et vérifier en particulier que : $P(X = n) = \frac{2}{n+1}$
4. On rappelle que pour tout entier n non nul : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Calculer l'espérance de X en fonction de n.

Epreuve 2

On tire maintenant 10 fois une boule avec remise dans cette urne, on note Y la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'on a obtenu une boule numérotée n.

1. Reconnaître la loi de Y.
2. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

Epreuve 3.

On tire maintenant une infinité de fois une boule avec remise et on note Z la variable aléatoire représentant le numéro du tirage où pour la première fois on obtient une boule numérotée n.

1. Reconnaître la loi de Z.
2. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Z.

Epreuve 4.

On se place maintenant dans le cas où $n = 2$. Ainsi l'urne contient une boule numérotée 1 et deux boules numérotées 2. On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise de la première boule tirée.
On note T_1 la variable aléatoire représentant le numéro de la première boule tirée et T_2 la variable aléatoire représentant le numéro de la deuxième boule tirée.

1. Lors du deuxième tirage on obtient une boule numérotée 2. Déterminer alors la probabilité de l'événement "la première boule tirée est numérotée 2".
2. Déterminer la loi du couple (T_1, T_2). (Donner les résultats dans un tableau).
3. En déduire la loi des variables aléatoires T_1 et T_2.
4. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes? (Justifier par un calcul).
5. Déterminer l'espérance des variables aléatoires T_1 et T_2 puis celle de la variable aléatoire $T_1 + T_2$.