ESC Maths 2007 T **EXERCICE 1**

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer les produits matriciels $A(A - I)$ et $B(B - I)$.
   (b) En déduire que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
   (c) Calculer AB ainsi que BA (ces deux produits donnent un résultat simple) .

On note dans toute la suite $W = A + 2B$.

2. (a) Calculer les produits $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire que $W\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice W est-elle inversible ?
   (c) Montrer que $W = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et retrouver le résultat précédent par méthode du pivot .
3. (a) En utilisant les relations obtenues en question 1. , montrer que $W^2 = A + 4B$.
   (b) Plus généralement , montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

   $$W^n = A + 2^n B.$$

Dans toute la suite de cet exercice on note pour tout réel x la matrice $H(x) = A + xB$.

4. (a) Calculer le produit $H(x)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire que la matrice $H(x)$ n'est pas inversible .
   (b) Montrer que pour tous réels x et y , $H(x)\,H(y) = H(xy)$.
   (c) En déduire par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $(H(x))^n = H(x^n)$.
   Quelle relation retrouve-t-on en prenant $x = 2$?

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \\ f(t) = e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-2t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

1. (a) Montrer que f est continue sur $]-\infty\,;0]$ et sur $]0\,;+\infty[$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} f(t)$ puis en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit θ un réel de l'intervalle] 0 ; 1 [. Montrer que : $\theta - \theta^3 \geq 0$.

(d) Montrer que si $t > 0$ alors $e^{-\frac{2}{3}t}$ est un réel de l'intervalle] 0 ; 1 [.

En déduire grâce à la question (c) , et en posant $\theta = e^{-\frac{2}{3}t}$, que $f(t) \geq 0$.

Dans toute la suite de l'exercice on note pour tout réel x : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

2. (a) Que vaut $F(x)$ lorsque $x \leq 0$?

Justifier que si $x > 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(b) Montrer que pour tout réel x strictement positif et pour tout réel a strictement positif ,

$$\int_0^x e^{-at}dt = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}) .$$

(c) En déduire que pour tout réel x strictement positif : $F(x) = 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$.

(d) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

On considère alors une variable aléatoire X admettant une densité f , et de fonction de répartition F .

3. On s'intéresse dans cette question à l'équation notée **(E)** :

$$P(X \leq \mu) = P(X > \mu) \qquad \textbf{(E)}$$

équation dont l'inconnue est le réel μ <u>strictement positif</u> .

(a) Justifier que pour tout réel x , $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$.

En déduire que l'équation **(E)** est équivalente à l'équation **(E')** :

$$P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} \qquad \textbf{(E')}$$

(b) Montrer que **(E')** $\Leftrightarrow$ $1 - 3e^{-\frac{2}{3}\mu} + e^{-2\mu} = 0$.

(c) Montrer que la fonction g définie sur] 0 ; 1 [par : $g(\theta) = 1 - 3\theta + \theta^3$
réalise une bijection de] 0 ; 1 [sur] -1 ; 1 [.

(d) En déduire par le même changement de variable qu'au 1. (d)
que l'équation **(E)** admet une et une seule solution (qu'on ne cherchera pas à calculer).

EXERCICE 3

Un sac S contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2.
Les parties **A** , **B** et **C** de cet exercice sont indépendantes , elles correspondent à des expériences aléatoires différentes utilisant le sac mentionné ci-dessus .

Partie A

1. Montrer que si l'on extrait deux jetons simultanément de S , la probabilité que ces deux jetons portent le numéro 2 est : $p = \frac{3}{10}$. (On pourra conserver cette notation dans la suite de cette partie A) .

2. Dans cette question on considère le sac S et on effectue 2100 tirages simultanés de deux jetons avec remise (les deux jetons obtenus à chaque tirage sont remis dans le sac S avant le tirage des deux jetons suivants) .

   On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages où les deux jetons tirés portent le numéro 2 .

   (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
   (On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$).

   (b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et vérifier que $V(X) = (21)^2$.

3. (a) On décide d'une approximation de X par une variable T suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
   Quelles valeurs donner à m et σ pour que X et T aient même espérance et même variance ?

   (b) Calculer alors la probabilité $P(588 < T \leq 672)$ en utilisant la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite . (On donne $\Phi(2) \approx 0,97725$)

Partie B

On effectue une série illimitée de tirages avec remise d'un jeton dans le sac S . On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués <u>avant</u> le tirage amenant un jeton numéroté 1 pour la première fois .

1. (a) Justifier que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit une loi classique .

   (b) En déduire $Y(\Omega)$ puis la probabilité $P(Y = k)$ pour tout entier k de $Y(\Omega)$.

2. (a) Préciser l'espérance mathématique et la variance de Z .

   (b) En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y.

Partie C

On extrait successivement et avec remise deux jetons du sac S .

On désigne par X_1 la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons tirés ,
et par X_2 la variable aléatoire égale au maximum des numéros des deux jetons tirés .

1. Donner la loi de probabilité du couple (X_1, X_2) , en présentant les résultats dans un tableau à double entrée .

2. En déduire la loi de probabilité de X_1 et celle de X_2 .

3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?