Copie anonyme - n°anonymat : 884774

E6-00143
884774
Mat Appro

Code épreuve : 195	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème 1 :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$. $J_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \, dt$.

I_n et J_n sont définies car $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[-1,1]$

De plus, $t \mapsto (1-t^2)^n$ est paire donc on a $J_n = 2 I_n$

2) $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 \, dt = \int_0^1 1 \, dt = 1 = I_0$

3) L'intégrale I_n converge, donc par linéarité de l'intégrale :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n \, dt$

$$= \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2-1) \, dt$$

$$= -\int_0^1 t^2 (1-t^2)^n \, dt$$

$\forall t \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t^2(1-t^2)^n \geq 0$ donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$

$(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

4) Posons $u(t) = (1-t^2)^n$ $\qquad v'(t) = 1$

$u'(t) = -2tn(1-t^2)^{n-1}$ $\qquad v(t) = t$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_n = \left[t(1-t^2)^n \right]_0^1 + \int_0^1 2t^2 n (1-t^2)^{n-1} \, dt$$

$$= 2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} \, dt$$

5) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$: « $I_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ ».

$n=0$: $I_0 = 1$ (cf 2) et $\dfrac{(2^0 0!)^2}{(2\times 0+1)!} = 1$. $\boxed{P(0) \text{ est vraie}}$

Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $P(n)$ vraie.

D'après 4, $I_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2n+3} I_n$

$$= \frac{2(n+1)}{2n+3} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{d'après } P(n)$$

$$= \frac{2(n+1) \, 2(n+1) \, (2^n n!)^2}{2(n+1) \, 2n+3 \, (2n+1)!}$$

$$I_{n+1} = \frac{2^2 (n+1)^2 \, (2^n (n)!)^2}{(2n+3)!}$$

$$= \frac{(2^{n+1} (n+1)!)^2}{(2n+3)!} \quad (\text{car } (2^n n!)^2 = 2^n \; (n!)^2).$$

P(n+1) est vraie.

D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = 2 I_n$,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, J_n = 2 \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$

6)
```
def I(n):
    i = 1
    for k in range(1, n+1):
        i = i * (2*n) / (2*n+1)
    return i
```

7) On a $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. $J_n = 2 \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

$$J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2 \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2^{n+1/2} \, n!)^2}{(2n)!} = 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\overset{(*)}{\sim}} 2^{2n+1} \frac{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = 2^{2n+1} \frac{\pi n}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \frac{\cancel{n^{2n}}}{\cancel{e^{2n}}} \frac{\cancel{e^{2n}}}{2^{2n} \cancel{n^{2n}}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

J'admets $\boxed{J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$

(*) ($x \mapsto x^2$ préserve l'équivalent)

Partie II :

L'intégrale est définie car $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1,1]$.

8) Soient $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\langle \alpha P + Q, R \rangle = \int_{-1}^{1} (\alpha P + Q)(t) R(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \alpha P(t) R(t) + Q(t) R(t)\, dt$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1} P(t) R(t)\, dt + \int_{-1}^{1} Q(t) R(t)\, dt$$

$$= \alpha \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle.$$

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t)\, dt = \int_{-1}^{1} Q(t) P(t)\, dt = \langle Q, P \rangle.$$

$$\langle P, P \rangle \geq 0 \iff \int_{-1}^{1} (P(t))^2\, dt \geq 0.$$

$t \mapsto (P(t))^2$ est continue et positive sur $[-1,1]$.

Donc $\int_{-1}^{1} (P(t))^2 dt \geq 0 \iff (P(t))^2 \geq 0 \iff P \geq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\langle P, P \rangle = 0 \iff \forall t \in [-1,1],\ (P(t))^2 = 0$$

$$\iff \forall t \in [-1,1],\ P(t) = 0.$$

Le polynôme P admet une infinité de racines sur $[-1,1]$, c'est donc le polynôme nul.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Copie anonyme - n°anonymat : 884774

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j,$

$$\langle X^i, X^j \rangle = \int_{-1}^{1} t^i t^j \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t^{i+j} \, dt$$

$$= \left[\frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{i+j+1} - \frac{(-1)^{i+j+1}}{i+j+1}$$

$$= \frac{1 + (-1)^{i+j}}{i+j+1}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i+j = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{i+j+1} & \text{si } i+j = 2k,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Donc $\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j, \langle X^i, X^j \rangle \neq 0$

Les polynômes de B_n ne sont pas 2 à 2 orthogonaux pour ce produit scalaire.

10) Posons $v(P) = (1-X^2)\, P'(X)$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ v(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ car $\deg((1-X^2)P') \leq 2 + n - 1 = n+1.$

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ (v(P))' \in \mathbb{R}_n[X]$ ie : $u(P) \in \mathbb{R}_n[X].$

Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$u(\alpha P+Q) = ((1-x^2)(\alpha P+Q)'(x))'$

$= (\alpha(1-x^2)P'(x) + (1-x^2)Q'(x))'$

$= (\alpha(1-x^2)P'(x))' + ((1-x^2)Q'(x))'$

$= \alpha u(P) + u(Q)$.

$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$

11) (a). $e_0 = 1$ donc $u(e_0) = ((1-x^2)\,1'(x))' = 0$
puisque $1' = 0$. $\boxed{u(e_0) = 0}$

$e_1 = X$. $e_1'(x) = 1$ donc $u(e_1) = (1-x^2)' = -2x = -2e_1$
$\boxed{u(e_1) = -2e_1}$

(c). $k \in [\![2,n]\!]$.

$u(e_k) = ((1-x^2)(e_k)'(x))'$

$= ((1-x^2)\cdot kx^{k-1})'$

$= (kx^{k-1} - kx^{k+1})'$

$= k(k-1)x^{k-2} - k(k+1)x^k$

$\boxed{u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2} \quad \forall k \in [\![2,n]\!]}$

11)

(c). La matrice de u dans la base canonique est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & & & \\ 0 & -2 & 0 & & & (0) & \\ 0 & 0 & -6 & \ddots & k(k-1) & & \\ \vdots & & & \ddots & 0 & & \\ & & & & -k(k+1) & & \\ & & (0) & & & \ddots & n(n-1) \\ & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & & & -n(n+1) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(u)$ est triangulaire supérieure. Les valeurs propres de u se lisent sur la diagonale. On a :

$$\boxed{Sp(u) = \{-k(k+1)\}_{k \in [\![0,n]\!]}}$$

Toutes les valeurs propres sont distinctes, $\mathrm{Card}(Sp(u)) = n+1$
$= \dim \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Donc u est diagonalisable et :

$$\sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 .$$

Puisqu'il y a $n+1$ sous-espaces propres distincts associés aux $n+1$ valeurs propres et que $\dim E_\lambda(u) > 0$,

on en déduit que $\boxed{\dim E_\lambda(u) = 1 \ , \ \forall \lambda \in Sp(u)}$

12) ~~On pose $((1-x^2)P(x))'$~~

13) (a) $m > n$. $f \in \mathbb{R}_m[X]$ un polynôme.

Soit $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$. $\exists! g \in \mathbb{R}_n$ projecteur orthogonal sur f et :

$$\|f - T_n\| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - g\|.$$

g minimise la distance entre f et T_n.

On sait que $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale.
On peut ainsi décomposer n'importe quel polynôme de $\mathbb{R}_n$ dans cette base :

$$\exists (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1} ; T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k$$

Copie anonyme - n°anonymat : 884774

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

13) b).

$$\|f\|^2 = \|\underbrace{f - T_n}_{\in \mathcal{R}_n^\perp} + \underbrace{T_n}_{\in \mathcal{R}_n}\|^2$$

$$= \|f - T_n\|^2 + \|T_n\|^2$$

Donc $\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \|\sum_{k=0}^{n} c_k L_k\|^2$

$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \|c_k L_k\|^2$ (Pythagore) avec $\mathcal{L}_n$ base orthogonale

$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k \|L_k\|^2$ (séparation de la norme).

$$\boxed{\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k \|L_k\|^2}$$

14) (a). $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_k(x) = x^{2k} + R(x)$, $R \in \mathbb{R}_{2k+}[X]$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P_k^{(k)}(x) = 2k(2k-1)\cdots(2k-(k-1))\,x^k + R^{(k)}(x)$

$= 2k(2k-1)\cdots(k+1)\dfrac{k(k-1)\cdots \times 2}{k(k-1)\cdots \times 2}\, x^k + R^{(k)}(x)$

$= \dfrac{(2k)!}{k!} x^k + R^{(k)}(x)$, $R^{(k)} \in \mathbb{R}_{k+}[X]$.

$\boxed{Q_k \text{ est de degré } k \text{ et son coefficient dominant est } \dfrac{(2k)!}{k!}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~1~~ 4)

(b). $\varphi_0(x) = P_0^{(0)}(x) = (x^2-1)^0 = \boxed{1 = \varphi_0}$

$\varphi_1(x) = P_1^{(1)}(x) = \boxed{2x = \varphi_1(x)}$

$\varphi_2(x) = P_2^{(2)}(x) = (2x(x^2-1))' = \boxed{6x^2-2 = \varphi_2(x)}$

(c). i) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_k'(x) = 2xk(x^2-1)^{k-1}$

donc $P_1(x)\, P_k'(x) = (x^2-1)\, k(x^2-1)^{k-1}$
$= 2kx(x^2-1)^k$
$= 2k e_1(x)\, P_k(x),$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_k'(x)\, P_1(x) = 2k\, e_1(x)\, P_k(x)}$

ii) $P_1(x) = (x^2-1)^1 = x^2-1$
$P_1'(x) = 2x-1$
$P_1''(x) = 2$
$\forall k \geq 3, \quad P_1^{(k)}(x) = 0.$

$$\sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} P_1^{(l)}(x)\, P_k^{(k+1-l+1)}(x) = \binom{k+1}{0} P_1(x)\, P_k^{(k+2)}(x)$$

$$+ \binom{k+1}{1} P_1'(x)\, P_k^{(k+1)}(x) + \binom{k+1}{2} P_1''(x)\, P_k^{(k)}(x)$$

$$= P_1(x) P_k^{(k+2)}(x) + (k+1) P_1'(x) P_k^{(k+1)}(x) + (k+1)k\, P_k^{(k)}(x)$$

$$= (1-x^2)\, \varphi_k''(x) + (k+1)(2x-1)\, \varphi_k'(x) + (k+1)k\, \varphi_k(x)$$

$$= (P_1(x)\, P_k(x))^{(k+1)}(x)$$

De plus, $\left(e_1(x)P_k(x)\right)^{(k+1)}(x)$

$$= \sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} e_1^{(l)}(x)\, P_k^{(k+1-l)}(x)$$

$$= \binom{k+1}{0} e_1(x)\, P_k^{(k+1)}(x) + \binom{k+1}{1} e_1'(x)\, P_k^{(k)}(x) + 0$$

$$= x\,\varphi_k'(x) + (k+1)\,\varphi_k(x) \quad (*)$$

Donc : $(1-x^2)\varphi_k''(x) + (k+1)(2x-1)\varphi_k'(x) + (k+1)k\,\varphi_k(x) = 2k(*)$.

ie : $(1-x^2)\varphi_k''(x) + \left[(k+1)(2x-1) - 2kx\right]\varphi_k'(x) + ((k+1)k - (k+1))\varphi_k(x) = 0$

J'admets.

D'après 11b, $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $u(\varphi_k) = -k(k+1)\varphi_k + k(k-1)\varphi_{k-2}$

(d). Montrons par récurrence ce qui est donné par l'énoncé.

$k=0$: $\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt = \sum_{j=0}^{-1} (-1)^j \left[f^{(-1-j)}(t)\, g^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$

$$= \left[f^{(-1)}(t)\, g^{(0)}(t) - f(t)\, g^{(1)}(t)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

J'admets.

Supposons la propriété vraie au rang k. Par parties, on a :

$\int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)\, g(t)\,dt = \left[f^{(k)}(t)g(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)\, g(t)\,dt$

ie : $\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)\,dt = \left[f^{(k)}(t)\, g(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)\, g'(t)\,dt$; hypothèse de récurrence avec g'

ie : $\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)\,dt = \left[f^{(k)}(t)g(t)\right]_{-1}^{1} - \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t)\, g^{(j+1)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1} f(t)\, g^{(k+1)}(t)\,dt\right]$

ie : $\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)\,dt = \left[\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left[f^{(k-j)}(t)\, g^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1} f(t)\, g^{(k+1)}(t)\,dt\right.$

car $-\left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left[f^{(k-1-j)}(t)\,g^{(j+1)}(t)\right]\right]_{-1}^{1}$

$= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\left[f^{(k-j)}(t)\,g^{(j+1)}(t)\right]_{-1}^{1}$

et on y ajoute le premier terme de la somme.

On a montré $\forall k \in \mathbb{N}$, la récurrence.

16)

e) i) $\deg(P_k) = 2k$ donc

$P_k^{(2k)}(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme en 16a, on montre :

$P_k^{(2k)}(x) = (2k)(2k-1)\dots 3\times 2x^0 = \underline{(2k)! = P_k^{(2k)}(x), \forall x \in \mathbb{R}}$.

ii) Montrons $\forall l \in [\![0,k]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(l)$: $P_k^{(l)}(x) = (x^2-1)^{k-l}R_{k,l}(x)$.

$l=0$: $P_k(x) = (x^2-1)^k$ et $(x^2-1)^{k-0}R_{k,0}(x) = (x^2-1)^k R_{k,0}(x)$.

avec $\deg(R_{k,l}) \leq 0$.

En posant $R_{k,0}(x) = 1$, $P(0)$ est vraie.

Supposons, pour $l \in [\![0,k-1]\!]$ fixé, $P(l)$ vraie.

$P_k^{(l+1)}(x) = (P_k^{(l)}(x))' \overset{P(l)}{=} ((x^2-1)^{k-l}R_{k,l}(x))'$

$= (x^2-1)^{k-l}R_{k,l}'(x) + 2(k-l)x(x^2-1)^{k-l-1}R_{k,l}(x)$

$= (x^2-1)^{k-l-1}\underbrace{\left[(x^2-1)R_{k,l}'(x) + 2(k-l)xR_{k,l}(x)\right]}$

$= R_{k,l+1}(x)$ avec $\deg(R_{k,l+1}) \leq l+1$

$P(l+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall l \in [\![0,k]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

Copie anonyme - n°anonymat : 884774

Code épreuve : 299 | Nombre de pages : 24 | Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\exists R_{k,\ell} \in \mathbb{R}_\ell[X] \, ; \, P_k^{(\ell)}(x) = (x^2-1) R_{k,\ell}(x)$

Problème 2 :

1) f est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ($1+x^2 \neq 0 \ \forall x$).

De plus, f est positive sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geq 0$

Soient ε et A deux réels ; $\varepsilon < A$.

$$\int_\varepsilon^A f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^A \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan}(t)\right]_\varepsilon^A$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan}(A) - \operatorname{Arctan}(\varepsilon)\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{A \to +\infty \\ \varepsilon \to -\infty}]{} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 . \int_{\mathbb{R}} f = 1 .$$

f est une densité de probabilité.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) $\mathbb{E}(X)$ existe $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|\,dx$ converge

Or $xf(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{1+x^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi x}$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge par critère de Riemann.

Donc $\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx$ diverge, $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ n'existe pas.}}$

$V(X)$ existe $\Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ existe

Puisque $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas, $\boxed{V(X) \text{ n'existe pas}}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to -\infty} \int_{\varepsilon}^{x} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to -\infty} \frac{1}{\pi} \mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{\pi} \mathrm{Arctan}(\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{\pi} \mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Arctan}(x) + \frac{1}{2}}$$

F est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$.

$\cancel{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{-2x}{1+x^2}}$.

~~Donc $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 0$~~

~~$f'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$~~

~~On a :~~

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\pi}$	$\searrow$	0

~~Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'($~~

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) > 0$, donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
F	0	$\nearrow$	1

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2} = 1$$

F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sa dérivée ne s'annulant jamais.

$\boxed{F \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]\lim_{-\infty} F, \lim_{+\infty} F[=]0,1[.}$

$\forall y \in]0,1[$, $y = \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2}$

$\iff \pi\left(y - \frac{1}{2}\right) = \text{Arctan}(x)$

$\iff \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) = x$. car tan est la bijection réciproque de arctan.

$\boxed{F^{-1}(y) = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right), \ \forall y \in]0,1[.}$

4) (a). $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$[F^{-1}(U) \leq x] = [\tan(\pi(U - \frac{1}{2})) \leq x]$$

$$= [\pi(U - \frac{1}{2}) \leq \arctan(x)]$$

$$= [U \leq \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2}].$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = F_U(\frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2})$.

(avec F_Y (F_U) la fonction de répartition de Y (de U)).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2}$

ie: $-\frac{1}{2} < \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) < \frac{1}{2}$

ie: $0 < \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2} < 1$

Or $\forall u \in]0,1[$, $F_U(u) = u$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2} = F(x)$.

La fonction de répartition caractérise la loi, donc

$\boxed{X \text{ et } Y \text{ ont même loi}}$

(b).
```
def cauchy():
    U = rd.random()
    return np.tan( np.pi(U - 1/2))
```

Copie anonyme - n°anonymat : 884774

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

5) $Z = \sqrt{|X|}$.

~~$f(x) = \sqrt{|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc avec X une variable à densité, Z est aussi une variable à densité.~~

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$[Z \leq x] = [\sqrt{|X|} \leq x] = [|X| \leq x^2]$

$= [-x^2 \leq X \leq x^2]$

$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = F_X(x^2) - F_X(-x^2)$

$= \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x^2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(-x^2) - \frac{1}{2}$

Puisque Arctan est impaire, on a $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}(x)$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x^2)}$

F est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car $\text{Arctan}(x)$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Z est à densité et une densité de Z est :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f_Z(x) = \frac{2}{\pi} \times \frac{2x}{1+x^4} = \frac{4}{\pi} \frac{x}{1+x^2} = f_Z(x)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) $\mathbb{E}(Z)$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)\,dx$ existe

Or $x f_Z(x) = \frac{4}{\pi} \frac{x^2}{1+x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi x^2} \geq 0$

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{4}{\pi x^2} dx$ converge et $\int_{-\infty}^{1} \frac{4}{\pi x^2} dx$ converge (Riemann $2>1$),

par continuité de $x \mapsto \frac{4}{\pi} \frac{x^2}{1+x^4}$ sur $[-1,1]$,

$\int_{\mathbb{R}} x f_Z(x)\,dx$ converge. $\mathbb{E}(Z)$ existe.

$V(Z)$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\,dx$ existe.

Or $x^2 f_Z(x) \sim \frac{4}{\pi x}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge (Riemann), donc $V(Z)$ n'existe pas

7) (a). $\forall x \geq 0$,

$$\frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{x^3(\alpha+\beta) + x^2(\sqrt{2}\alpha - \sqrt{2}\beta) + x(\alpha+\beta)}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}$$

Il suffit de trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \sqrt{2}\alpha - \sqrt{2}\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ -\sqrt{2}\beta - \sqrt{2}\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

7)

(b). $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ et $y \mapsto \dfrac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \geq 1$, $\dfrac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \leq \dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \leq \dfrac{1}{x^2}$

$\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2} dx$ converge (Riemann), donc par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, ~~et~~ par continuité de celles-ci sur $[0,1]$

$\boxed{\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} \text{ et } \int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} \text{ convergent}}$.

Posons $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x = \varphi(y)$. φ réalise une bijection croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$.

Par théorème de changement de variable,

$\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx$ et $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2y^2+2y+1} dy$ sont de même nature,

et sont égales en cas de convergence. Puisque la première converge, elles sont égales.

$A > 0$,

$\int_0^{A} \dfrac{1}{2y^2+2y+1} dy = \int_0^{A} \dfrac{1}{(\quad)^2+1}$ j'admets.

Partie 2 :

9) $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$. $\quad \boxed{E(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)}$

$\boxed{V(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(A))}$

10) (a).

$$\mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } X(\omega) > s \\ 0 \text{ si } X(\omega) \leq s \end{cases}$$

$$\chi_{]s,+\infty[}(X(\omega)) = \begin{cases} 1 \text{ si } X(\omega) \in]s,+\infty[\\ 0 \text{ si } X(\omega) \in]-\infty, s] \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } X(\omega) > s. \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

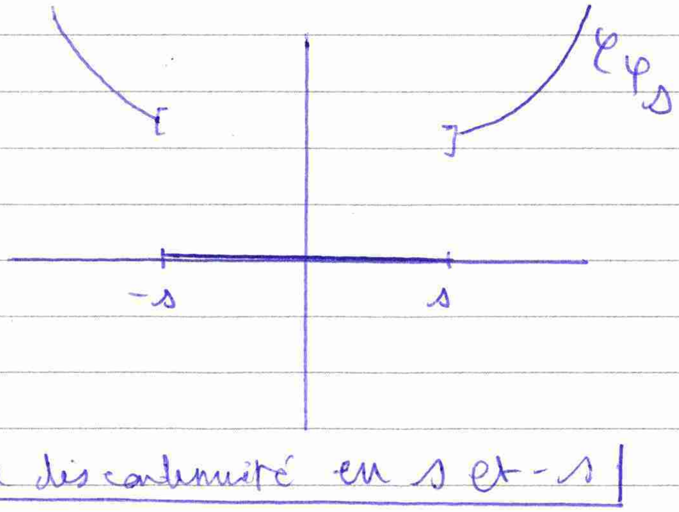
Donc $\boxed{\mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = \chi_{]s,+\infty[}(X(\omega))}$

(b). $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_s(x) = |x| \dots \chi_{]s,+\infty[}(|x|)$

$$= |x| \ \mathbb{1}_{[X>s]}(|x|)$$

$$= \begin{cases} (|x|)^2 & \text{si } |x| > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi_s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in]-\infty, s[\cup]s+\infty[. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$



Il y a discontinuité en s et $-s$

Copie anonyme - n°anonymat : 884774

Code épreuve : 195

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11) $k \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_k + Z_k = X_k \mathbb{1}_{[|X_k| \leq M]} + X_k \mathbb{1}_{[|X_k| > M]}$$

$$\boxed{Y_k + Z_k = X_k}$$

12) X_k et $\mathbb{1}_{[|X_k| \leq M]}$ sont dépendantes.

13) (b). $\lim_{M \to +\infty} \mathbb{E}(|Z_k|) = 0$

Or $|\mathbb{E}(Z_k)| \leq \mathbb{E}(|Z_k|)$

Et $\lim_{M \to +\infty} |\mathbb{E}(Z_k)| = 0 \Rightarrow \lim_{M \to +\infty} \mathbb{E}(Z_k) = 0$.

14) Supposons par l'absurde $[|x| < \frac{t}{2}]$ et $[|y| < \frac{t}{2}]$

Alors, on aurait $|x+y| < |x| + |y| < t$, ce qui est impossible.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |x+y| > t \Rightarrow \left([|x| > \frac{t}{2}] \text{ ou } [|y| > \frac{t}{2}] \right)$!

15) $[|\bar{X}_n| > t] \overset{(14)}{=} [|\bar{Y}_n + \bar{Z}_n| > t] \subset \left[[|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}] \cup [|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}] \right]$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(|\bar{X}_n| > t) \leq \mathbb{P}\left([|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}] \cup [|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}] \right)$

Or $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(|\overline{X}_n| > t) \leq P\left(\left[|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\right]\right) + P\left(\left[|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right]\right)}$

16)

(a). $(|\overline{Z}_n|)(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et $|\overline{Z}_n|$ admet une espérance.

Donc, $\forall \varepsilon > 0$, d'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(|\overline{Z}_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|\overline{Z}_n|)}{\varepsilon}.$$

Pour $\varepsilon = \frac{t}{2} > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|\overline{Z}_n| \geq \frac{t}{2}\right) \leq \frac{2}{t} \mathbb{E}(|\overline{Z}_n|).$$

$$\mathbb{E}(|\overline{Z}_n|) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i) \quad \text{(linéarité de l'espérance)}$$

$$= \frac{1}{n} n \mathbb{E}(Z_1) \quad \text{(car les } Z_i \text{ suivent même loi)}$$

$$= \mathbb{E}(Z_1).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{2}{t} \mathbb{E}(Z_1)}.$$

(b) D'après 13a pour $k=1$: $\exists M_1 \in \mathbb{R}^+ ; \forall M \geq M_1$, $\mathbb{E}(|Z_1|) < \frac{t}{2} \times \frac{\varepsilon}{3}$, $t, \varepsilon > 0$.

D'après 16a, $\boxed{P(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}) \leq \frac{2}{t} \times \frac{t}{2} \times \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}}$

17) (a). $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(\overline{Y}_n^2) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(Y_i Y_j)\right]$.

D'après 12 et 17b,

$$\mathbb{E}(\overline{Y}_n^2) \leq \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} M^2 + n(n-1)\mathbb{E}(Y_1)^2\right]$$

$$= \frac{M^2}{n} + \frac{n-1}{n} \mathbb{E}(Y_1)^2$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\mathbb{E}(\overline{Y}_n^2) \leq \frac{M^2}{n} + \mathbb{E}(Y_1)^2}$$

17)

(d). D'après 13c pour $k=1$,

$\exists M_2 \in \mathbb{R}^+ ; \forall M \geq M_2, \mathbb{E}(Y_1) \leq \frac{t\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{12}}, t>0, \varepsilon>0$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(Y_1)^2 \leq \frac{t^2 \varepsilon}{12} \quad \forall M \geq M_2.}$

(e). D'après 16a, on a

$\mathbb{P}(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}) \leqslant \frac{2}{t} \mathbb{E}(|Y_1|)$

~~Or une probabilité appartient à $]0,1[$, donc~~

$\cancel{\mathbb{P}(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2})^2} \leq \mathbb{P}(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}) \leqslant \frac{4}{t^2} \mathbb{E}(Y_1)^2$

D'après Markov:

$$\mathbb{P}(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2})^2 \leq \left(\frac{\mathbb{E}(\overline{Y}_n)}{t/2}\right)^2$$

$$\leq \frac{4}{t^2}\left(\mathbb{E}(\overline{Y}_n)^2\right)$$

$$\leq \frac{4}{t^2}\left(\frac{M^2}{n} + \mathbb{E}(Y_1)^2\right)$$

$$\leqslant \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{4}{t^2}\frac{t^2\varepsilon}{12} \quad (\text{cf } d)$$

$$\leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc $\mathbb{P}(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2})^2 \leq \boxed{\mathbb{P}(|Y_n| > \frac{t}{2}) \leq \frac{4M}{t^2 n} + \frac{\varepsilon}{3}}$

18) D'après 15, 16b et 17e,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ si } M \geq \max(M_1, M_2), \mathbb{P}(|\overline{X}_n| > t) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\varepsilon}{3}}$