503619

LÉVÊQUE

JADE

31/01/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 503619

Né(e) le 31/01/2005

Nom LÉVÊQUE

Prénom (s) JADE

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 07

Numéro de table 017

Exercice I

1a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est une serie de Reimann de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 2 > 1$ donc $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}}$.

1b) $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{|(-1)^n|}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ et d'après 1a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|$ converge, ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument

donc $\boxed{\text{converge}}$.

1c) $\forall n \geq 0 : 0 \leq \frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge d'après 1a

donc par théorème de comparaison pour les series à termes positifs,
$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ converge}}$

2) $A - B = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ par linéarité car A et B convergent

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

On separe en termes paires et impaires :

$$= \sum_{\substack{n=2i \\ i\in\mathbb{N}}}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right) + \sum_{\substack{n=2i+1 \\ i\in\mathbb{N}}}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{\substack{n=2i+1 \\ i\in\mathbb{N}}}\left(\frac{2}{n^2}\right) = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^2} = 2C$$

on a bien $\boxed{A-B=2C}$

$$C+\frac{1}{4}A = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+(2n+1)^2}{4n^2(2n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+4n^2+4n+1}{4n^2(4n^2+1+4n)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8n^2+4n+1}{16n^2+4n^2+16n^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}$$

(3a) Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)+\cos(\alpha)\cos(-\beta)-\sin(\alpha)\sin(-\beta)$$

or cos est paire et sin est impaire :

$$= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)+\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$= 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$$

On a bien : $\boxed{2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$ $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

(3b) Prouvons par reccurence : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, P_n : " $\forall t\in[0,\pi[: \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = -\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos(t/2)}$ "

<u>initialisation</u> : $n=1$: $-\cos(t) = -\frac{1}{2} - \frac{\cos(\frac{3t}{2})}{2\cos(t/2)}$

$$\Leftrightarrow -\cos(t) = -\frac{1}{2}$$

4a Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$: $a<b$ et f $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

f est continue sur un segment donc f est borné (et atteint ses bornes) donc $\exists M_1 : \forall t\in[a,b] : |f(t)|\le M_1$

De même f est $\mathcal{C}^1$ donc f' est continue sur $[a,b]$ donc f' est borné (et atteint ses bornes) sur $[a,b]$. On peut donc poser M_2 : $\forall t\in[a,b] : |f'(t)|\le M_2$

En posant $M=\max\{M_1,M_2\}$, on a bien

$$M : \boxed{\forall t\in[a,b] : |f(t)|\le M \text{ et } |f'(t)|\le M}$$

4b ainsi

existe car $t\mapsto f'(t)\sin(\lambda t)$ continue sur $[a,b]$

$$0\le\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \underset{\text{inégalité triangulaire}}{\le} \underbrace{\frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)\sin(\lambda t)|\,dt}_{*}$$

et $\lambda\ge 1$ à partir d'un certain rang.

Or $|f'(t)\sin(\lambda t)| = |f'(t)||\sin(\lambda t)| \le M\times 1$

donc $* \le \frac{1}{\lambda}\times M$

Par théorème des gendarmes, puisque $0\le\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\le\frac{M}{\lambda}$ et que $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{M}{\lambda}=0$, alors

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt=0}$$

4c $u=f(t)$ $\quad v'=\cos(\lambda t)$ et u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

$u'=f'(t)$ $\quad v=\dfrac{\sin(\lambda t)}{t}$

Donc en procédant à une intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = \left[f(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \right]_b^a - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\,dt$$

$$= \frac{f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda} - \frac{f(b)\sin(\lambda b)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt$$

Par somme de limites et (4b),

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = 0}$$

(5a) Soit $t \in]0,\pi]$

$t \to \frac{t}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et à valeurs dans $]0, \frac{\pi}{2}]$

Donc la composée : $t \mapsto \sin(t/2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi[$ et à valeurs dans $]0,1]$, en particulier non nulle sur $]0,\pi]$

Ainsi le quotient $\boxed{t \mapsto \frac{t}{\sin(t/2)} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,\pi]}$

Soit $t \in]0,\pi]$:

$$\boxed{f'(t)} = \frac{\sin(t/2) - t \times \frac{1}{2}\cos(t/2)}{(\sin(t/2))^2} = \boxed{\frac{\sin(t/2) - \frac{t}{2}\cos(t/2)}{(\sin(t/2))^2}}$$

(5b) $\sin(t/2) = \frac{t}{2} + o_0(t)$

donc $f(t) = \frac{t}{t/2 + o_0(t)} \sim \frac{t}{t/2} = 2$

$\boxed{\lim_{t \to 0} f(t) = 2 \text{ donc } f \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ si nous posons } f(0) = 2 \text{ (c'est une limite finie)}}$.

(5c) f était déjà de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ (5a)

f est continue en 0.

$$\cos(t/2) = 1 - \frac{t^2}{4 \times 2!} + o_0(t^3)$$

$$(\sin(t/2)) = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{12} + o_0(t^3)$$

Numéro d'inscription 503619

Né(e) le 31/01/2005

Nom LÉVÊQUE

Prénom (s) JADE

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Approfondies

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/07

Numéro de table 017

suite exercice I (5b)

Donc $\sin(t/2) - \frac{t}{2}\cos(t/2) = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{12} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o_0(t^3)$

$\underset{0}{\sim} \frac{t^2}{8}$

et $(\sin(t/2))^2 \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{4}$

Donc $f'(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2/8}{t^2/4} = 2$

Donc par le théorème de la limite de la dérivée, puisque f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et $\mathcal{C}^0$ sur $[0,\pi]$ et que $\lim_{t\to 0} f'(t) = 2$ (limite finie) alors

$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$

(5d) f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$
et $\forall t \in [0,\pi[$, $t \mapsto \pi - t$ $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $]0,\pi]$
donc la composée $f(t) = f(\pi - t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi[$

De plus, par le même raisonnement que (5b) et (5c), $f(\pi - t)$ admet une limite finie lorsque $t \to \pi$ et $f'(\pi - t)$ également donc $\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ en fonction } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

6a ~~l'integrale converge~~

~~$\int_0^{\pi}(\pi-t)\cos(kt) = \int_0^{\pi}\pi\cos(kt) - \int_0^{\pi}t\cos(k\pi)$~~

~~cos est 2π periodique donc si k est pair $\cos(k\pi) = \cos(2i\pi) = \cos(0) = 1$~~ ~~$i \in \mathbb{N}$~~

~~et on a : $\int_0^{\pi}\pi\times 1 - \int_0^{\pi}t = \pi(\pi-0) - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}$~~

~~$= \pi^2 - \frac{\pi^2}{2}$~~

l'integrale converge :

$\int_0^{\pi}(\pi-t)\cos(kt)dt = \int_0^{\pi}\pi\cos(kt) - \int_0^{\pi}t\cos(k\pi)dt$, par la même

integration par partie que 4c : avec $f(t)=t$

$= \left[\frac{\pi\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{0\times\sin(k\times 0)}{k} + \frac{\pi\sin(k\pi)}{k} + \int_0^{\pi}\sin(kt)dt$

$= \frac{\pi\sin(k\pi)}{k} + \frac{\pi\sin(k\pi)}{k} + \left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{2\pi\sin(k\pi)}{k} - \frac{1}{k}$

si k est paire $\sin(k\pi)$

Exercice 2

(1a) La famille est liée car $\text{card}(I_3, M, M^2, \dots, M^9) = 10 > 9 = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

(1b) La famille est liée donc il existe une combinaison linéaire non nul des $(I_3, M, \dots, M^9)$ tel que $\sum_{i=0}^{9} \lambda_i M^i = 0$ avec $\exists i \in [0, 9]$ $\lambda_i \neq 0$

donc $\exists \{\lambda_0, \dots \lambda_9\}$: $\sum_{i=0}^{9} \lambda_i M^i = 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ polynôme annulateur $P(X) = \sum_{i=0}^{9} \lambda_i X^i \in \mathbb{R}_9[X]$ non nul de M

(2a)

```
def PolyAnn(M):
    P = al.matrix_power(M,3) - 4*al.matrix_power(M,2) *
    * - 12 * M - 28
    if P == 0
        return True
    Else:
        return False
```

(2b) $rg(M) = 3$ car chaque colonne est non nulle et libre par rapport aux autres.

Donc $rg(M) = 3$ et ainsi <u>M est inversible</u>

$$\left.\begin{matrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \iff \left.\begin{matrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 10 & -6 & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 2(L_3 - L_1) \end{matrix}$$

$$\iff \left.\begin{matrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{matrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$$

$$\iff \left.\begin{matrix} 0 & 12 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{matrix} \iff \left.\begin{matrix} 0 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} -4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 8 & -5 & 2 \end{matrix}$$

$$\iff \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -5/12 & 1/6 \\ -1/2 & 5/8 & -1/4 \end{matrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 6 & 16 \\ 24 & 10 & 20 \\ 10 & 15 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

erreur de calcul

3a f est un polynôme annulateur de M
donc $Sp(M) \subset$ racines de f
et donc $\boxed{\text{si } \lambda \in Sp(M) \Rightarrow f(\lambda) = 0}$

3b $f(x)$ est ~~dérivable~~ $\cancel{f'(x) = 3x^2 - 8x - 12}$
$\cancel{\Delta = 64 + 4 \times 12 \times 3 = 64 + 144 = 208}$

3c M n'admet qu'une valeur propre notée λ.
Supposons M diagonalisable. Alors il exist P inversible telle que : $M = P\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}P^{-1} = P \lambda Id P^{-1} = PP^{-1} \lambda Id = \lambda Id$
Ce qui est absurde car M n'est pas diagonale

Numéro d'inscription 503619

Né(e) le 31/01/2005

Nom LÉVÊQUE

Prénom (s) JADE

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Approfondies Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 03/07

Numéro de table 017

Suite exercice 2 3c

Donc $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$

4 $^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM = S$

donc $\boxed{S \text{ est symetrique}}$

5 Soit $\lambda \in Sp(S)$ (on sait que S est diagonalisable grâce au théorème spectral donc que $\exists \lambda \in Sp(S)$)

Soit X un vecteur propre associé à λ.

$SX = \lambda X \iff {}^tMMX = \lambda X \iff {}^tX{}^tMMX = \lambda {}^tXX$

$\iff \langle MX, MX \rangle = \lambda \langle X, X\rangle$ avec $\langle X,Y\rangle = {}^tXY$ un produit scalaire

$\iff \|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2$

et X est non nul car c'est un vecteur propre donc

$\lambda = \dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2}$ or $\|X\|^2 > 0$, $\|MX\|^2 \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$

Ainsi $\underline{Sp(S) \subset \mathbb{R}^+}$

Or ${}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg({}^tM) = 3$, on ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible et

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

M est inversible (2b) donc $rg({}^tMM) = 3 \Rightarrow {}^tMM$ est inversible

donc $0 \notin Sp({}^tMM) \Rightarrow 0 \notin Sp(S)$

Ainsi $\boxed{Sp({}^tMM) = Sp({}^tMM) \subset \mathbb{R}_+^*}$

(6) $S \in S_n(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème spectral, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P (composée de vecteurs colonnes ~~et~~ qui sont les composantes d'une base orthonormale de vecteurs propres de S) tel que :

$$S = PDP^{-1} \quad \text{or } P \text{ est orthogonale donc } P^{-1} = {}^tP$$

donc $S = PD{}^tP$

(7a)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1}^2 & & 0 \\ & \sqrt{16}^2 & \\ 0 & & \sqrt{49}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\sqrt{1})^2 & & 0 \\ & (-\sqrt{16})^2 & \\ 0 & & (-\sqrt{49})^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1^2 & & 0 \\ & 4^2 & \\ 0 & & 7^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 & & \\ & (-4)^2 & \\ & & (-7)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 4 & \\ 0 & & 7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -4 & \\ 0 & & -7 \end{pmatrix}^2$$

car les coefficients diagonaux sont non nuls

il existe donc deux matrices Δ diagonales : $\Delta^2 = D$

$$\begin{cases} x_1^2 = 1 \\ x_2^2 = 16 \\ x_3^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \text{ ou } -1 \\ x_2 = 4 \text{ ou } -4 \\ x_3 \end{cases}$$

on cherche $\Delta = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & x_2 & \\ 0 & & x_3 \end{pmatrix}$: $\Delta^2 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 16 & \\ 0 & & 49 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^2 & & 0 \\ & x_2^2 & \\ 0 & & x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 16 & \\ 0 & & 49 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 1 \\ x_2^2 = 16 \\ x_3^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = \pm 4 \\ x_3 = \pm 7 \end{cases}$ donc il existe, en

dénombrant : **8** $(2\times2\times2)$ matrices diagonales Δ telles que $\Delta^2 = D$

7B) Δ est inversible car Δ est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont non nuls.

8) $S = PDP^{-1}$ d'après 6)

$= P\Delta^2P^{-1} = (P\Delta P^{-1})^2$ car $(P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1}$

$= (P\Delta {}^tP)^2$ $\qquad = P\Delta^2P^{-1}$

Donc $R = P\Delta{}^tP$ et ${}^tR = {}^t(P\Delta{}^tP) = P\Delta{}^tP = R$ donc

R est symétrique.

$\boxed{\text{il existe } R \text{ symetrique} : R^2 = S}$

9) $rg(R) = rg(P\Delta{}^tP) = rg(P\Delta P^{-1})$

or $rg\,\Delta = 3$ car Δ est inversible (7b) et on ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible

or P et P^{-1} sont inversibles donc $rg(R) = 3$

donc $\boxed{R \text{ est inversible}}$.

$RR^{-1} = Id \Leftrightarrow P\Delta{}^tPR^{-1} = Id \Leftrightarrow \underbrace{P^{-1}P}_{Id}\Delta{}^tPR^{-1} = P^{-1}$

$\Leftrightarrow \Delta\,{}^tPR^{-1}P^{-1} \Leftrightarrow \underbrace{\Delta^{-1}\Delta}_{I_3}{}^tPR^{-1} = \Delta^{-1}P^{-1} \Leftrightarrow {}^tPR^{-1} = \Delta^{-1}P^{-1}$

$\Leftrightarrow P R^{-1} = \Delta^{-1}P^{-1}$

$\Leftrightarrow P P R^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1}$

$\Leftrightarrow Id\, R^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1}$

$\Leftrightarrow \boxed{R^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1} = P\Delta^{-1}\,{}^tP}$ car P orthogonale

(10)

$U = MR^{-1} = MP\Delta^{-1}\,{}^tP = PM\Delta^{-1}\,{}^tP$

$${}^t(U)U = {}^t(MR^{-1})MR^{-1}$$

$$= {}^tR^{-1}\,{}^tMMR^{-1} = {}^tR^{-1}SR^{-1} = RSR^{-1}$$

$$= P\Delta P^{-1}SP\Delta^{-1}P^{-1}$$

$$= P\Delta P^{-1}PDP^{-1}P\Delta^{-1}P^{-1}$$

$$= P\Delta D\Delta^{-1}P^{-1} \quad D = \Delta^2$$

$$= P \quad P^{-1} = Id$$

donc $\boxed{{}^tUU = Id \Rightarrow U \text{ est une matrice orthogonale}}$

(11) R est symétrique réelle et inversible donc R diagonalisable et $0 \notin Sp(R)$

~~Soit $\lambda \in Sp(R)$ et X un vecteur propre associé~~.

~~$RX = \lambda X \Rightarrow$~~

Or $R = P\Delta\,{}^tP$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$

donc $R \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{Sp(R) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \subset \mathbb{R}_+^*}$

Numéro d'inscription 503619

Né(e) le 31/01/2005

Nom LÉVÊQUE

Prénom (s) SADE

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Approfondies

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/07

Numéro de table 017

Suite exercice 2

(12) • $S = {}^tMM = {}^t(VT)VT = {}^tT\,{}^tVVT$ or V orthogonale

${}^tV = V^{-1}$ donc ${}^tVV = I_3$ et $T \in S_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tT = T$

alors $\boxed{S = T I_3 T = T^2}$

• $\boxed{N}^2 = {}^tPTP\,{}^tPTP$ or P est orthogonale ${}^tPP = Id$

$= {}^tP T^2 P$

$= {}^tPSP \boxed{= D}$ car $PD\,{}^tP = S$

(13) $TS = TT^2$ d'après (12)

$= T^3$

$= T^2T = ST \Rightarrow$ $\boxed{\text{T et S commutent}}$

(14a) Soit $i \in [\![0,3]\!]$ Notons $\mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\mathcal{C}_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $\mathcal{C}_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$PE_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathcal{C}_1$ | $PE_2 = P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathcal{C}_2$ | $PE_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathcal{C}_3$

de la même manière par calcul matriciel

On a bien $\boxed{\forall i \in [\![1,3]\!] \quad PE_i = \mathcal{C}_i}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

14b) Par définition, comme montré lors de la question 6,
P est la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de S donc $\mathcal{C}_i$ est un vecteur propre de S.

14c) $\mathcal{C}_i$ est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_i donc
$S\mathcal{C}_i = \lambda_i \mathcal{C}_i$
$S(T\mathcal{C}_i) = TS\mathcal{C}_i$ car S et T commutent (13)
$= T\lambda_i\mathcal{C}_i = \lambda_i(TC_i)$
donc soit $T\mathcal{C}_i$ est un vecteur propre de S associé à λ_i ~~(on a bien $T\mathcal{C}_i$ non nul~~) dans ce cas $TC_i \in E_{\lambda_i}(S)$
ou alors $T\mathcal{C}_i = 0$ et cela reste vrai
Donc :
$\boxed{\forall i \in [\![0,3]\!] : TC_i \text{ appartient au sous espace propre de S associé à } \lambda_i}$

14d) $E_{\lambda_i}(S) = \ker(S - \lambda_i Id)$ or S admet 3 valeurs propres distinctes (puisque $D = diag(1,16,49)$) donc la dimension de chacun des ses sous espaces propres est égale à 1.
Donc puisque $\mathcal{C}_i \in E_{\lambda_i}(S)$: $E_{\lambda_i}(S) = Vect((\mathcal{C}_i))$
Or $T\mathcal{C}_i \in Vect((\mathcal{C}_i))$ puisque $\in E_{\lambda_i}(S)$
donc $\exists \alpha_i \in \mathbb{R} : T\mathcal{C}_i = \alpha_i \mathcal{C}_i$
$\Rightarrow$ $\boxed{T\mathcal{C}_i \text{ et } \mathcal{C}_i \text{ sont colinéaires}}$

15

$N^2 = D$ donc ${}^tPTP{}^tPTP = D$
$\Rightarrow {}^tPT^2P = D$

16 $N^2 = D$ or $\Delta^2 = D$

N est diagonale et Δ aussi et les deux ont des valeurs propres strictement positives, elles ont donc les mêmes car

Donc $\boxed{N = \Delta}$ $\left(N^2 = \Delta^2 = D : \begin{pmatrix} 1 & \\ & 4 & \\ & & 7\end{pmatrix} = N = D\right)$

17

Problème

1a Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\boxed{t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim t^{x-1}}$ car $(1-t)^{y-1} \sim 1$
$= 1 + o(1)$
donc $t^{x-1}(1-t)^{y-1} = t^{x-1} + o(1)$

1b $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1/2]$

or $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ Par critère de comparaison

avec une intégrale de Reimann convergente : $\frac{1}{t^{1-x}}$ converge (en 0)
$\Leftrightarrow 1-x < 1 \Leftrightarrow x > 0$

Donc vu que on a une intégrale avec des termes strictement positifs :

$\boxed{\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \text{ converge} \Leftrightarrow x > 0}$ par comparaison avec une intégral de Reimann

1c $t \mapsto 1-t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{1}{2},1]$, strictement décroissante donc réalise une bijection de $[1/2,1]$ sur $[0,1/2]$ donc par changement de variable : $s=1-t$: $\Leftrightarrow t=1-s$

$\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ a même nature et potentiellement même valeur que :

$$-\int_{0}^{1/2} (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds$$ et $\frac{ds}{dt}=-1$ $ds=-dt$

Donc que $\int_0^{1/2}(1-s)^{x-1}s^{y-1}ds$

$$\boxed{\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \text{ et } \int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds \text{ sont de même nature}}$$

1d D'après 1a $s^{y-1}(1-t)^{y-1} \sim s^{y-1}$ et d'après 2b l'integrale $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}dt$ converge $\Leftrightarrow y>0$ (en echangeant les roles de x et y) donc d'apres 1c

$\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge $\Leftrightarrow y>0$

Or d'après 1b $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ converge $\Leftrightarrow x>0$

Donc par Chasles : $\boxed{\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \text{ converge } \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}}$

2 $\cancel{B(y,x) = \int_0^1 t^{y-1}}$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$: $B(x,y)$ et $B(y,x)$ convergent d'après 1d :

$B(y,x) = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt = \int_0^{1/2} t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt + \int_{1/2}^{1} t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt$ par Chasles

$$= \underbrace{\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt}_{\text{d'après 1c}} + \underbrace{\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt}_{\text{d'après 1c}}$$

Numéro d'inscription 503619

Né(e) le 31/01/2005

Nom LÉVÊQUE

Prénom (s) JADE

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Approfondies

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/07

Numéro de table 017

Suite Problème 2

Par Chasles : $B(y,x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = B(x,y)$

$\Rightarrow \boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* : B(y,x) = B(x,y)}$

3) $\boxed{B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^0 dt = \int_0^1 t^{x-1} = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}}$

~~4a) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$~~

~~$B(x+1,y) + B(x,y+1) = \cancel{2B(x+1,y) \text{ d'après } (2)}$~~

~~$\int_0^1 (t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y)dt = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt$~~

~~en faisant 2 integrations par parties (licites) :~~

~~$= \left[-\frac{t^x(1-t)^y}{y}\right]_1^0 + \int_0^1 \frac{xt^{x-1}(1-t)^y}{y}$~~

4b) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$x\,B(x,y+1) = x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,dt$

$u = \frac{t^x}{x}$ $\quad v = (1-t)^y$

$u' = t^{x-1}$ $\quad v' = -y(1-t)^{y-1}$ et u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$

Donc par une intégration par parties :

$$xB(x,y+1) = x\left[\frac{t^x}{x}(1-t)^y\right]_0^1 + \frac{x}{x}\int_0^1 \frac{t^x}{x}\, y(1-t)^{y-1}$$

$$= 0 + y\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} = yB(x+1,y)$$

On a bien $\boxed{\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2 : xB(x,y+1) = yB(x+1,y)}$

4c) $B(x+1,y) = \dfrac{xB(x,y+1)}{y}$ avec $y\neq 0$

$$\frac{x}{x+y}B(x,y) = \frac{x}{x+y}\Big(B(x+1,y)+B(x,y+1)\Big) \text{ d'après } 4a)$$

$$= \frac{x}{x+y}\left(B(x+1,y)+\frac{yB(x+1,y)}{x}\right) \text{ d'après } 4b)$$

$$= \frac{x}{x+y}\left(\frac{(x+y)B(x+1,y)}{x}\right) = B(x+1,y)$$

Donc $\boxed{\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2 : B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)}$

5) Soit $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$: $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$

6a Soit $n \in \mathbb{N}$:

$\to \underline{n=0}$: $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \to +\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^A = \lim_{A \to +\infty} -e^{-A} + e^0 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\to \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)$

$= n!\,\Gamma(1) = n!$

donc $\boxed{\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

6b $t \mapsto \sqrt{2t}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc fait une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$, donc en appliquant le changement de variable $u = \sqrt{2t}$, $\Gamma(1/2)$ a même nature et potentiellement même valeur (convergente) que B.

$\frac{du}{dt} = \frac{2}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$

$\Rightarrow dt = \sqrt{t}\,du$

$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{1/2} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-t} dt$

$= \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \sqrt{t}\, e^{-t} dt$

$u = \sqrt{2t}$

$\frac{u^2}{2} = t$

$= B = \lim_{A \to +\infty} \int_0^{\sqrt{A}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

$= \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}$ or posons $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

alors $f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du = 1 \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$

or cette fonction est paire

donc $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

erreur de calcul, c'est $\sqrt{\pi}$ normalement

on utilisera $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ pour la suite

7a) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{\alpha-1} e^{-bt} dt = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-bt} dt$$

or $t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-bt}$ est C^0 sur $[0,+\infty[$

et $t^{\alpha-1} e^{-bt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{\alpha-1-2}}{e^{-bt}} = 0$

par croissances comparées : $u = bt$ $\frac{\left(\frac{u}{b}\right)^{\alpha-1-2}}{e^{-u}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Reimann

Donc par théorème de comparaison pour les intégrales à termes positifs :

$\frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-bt} dt$ converge et $\frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-bt}$ converge

donc par Chasles : $\int_0^{+\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{\alpha-1} e^{-bt} dt$ converge

Donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt \text{ converge}}$

7b) • $\forall t \in \mathbb{R} : f_{a,b}(t) \geq 0$ car sur $\mathbb{R}_+^*$: $t^{\alpha-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{\alpha-1} e^{-bt} \geq 0$
car a et $b \geq 0$

• $f_{a,b}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0
car $t \mapsto t^{\alpha-1}$ C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$, e^{-bt} C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le produit $f_{a,b}$ C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ converge et vaut $\int_0 \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{\alpha-1} e^{-bt} dt$

$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-bt}$ on effectue le changement de variable licite $u = bt$

$\overset{\lim\limits_{A\to+\infty}}{=} \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^A \frac{u^{\alpha-1}}{b^\alpha} e^{-u} du$

$du = b\,dt$

$dt = \frac{du}{b}$

$= \lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^A u^{\alpha-1} e^{-u} du$, on reconnaît une intégrale de gamma

$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) = 1$

Numéro d'inscription 503619

Né(e) le 31/01/2005

Nom LÉVÊQUE

Prénom (s) JADE

Signature

20 / 20

écricome Épreuve : Mathematique Approfondie

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 07

Numéro de table 017

Suite problème 4b)

Ainsi $\boxed{f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité}}$

8a) $f_{a,1} = \begin{cases} \frac{t^{a-1} e^{-t}}{\Gamma(a)} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ On reconnait $\boxed{X \hookrightarrow \gamma(a)}$

$\boxed{E(X) = V(X) = a}$

8b) $f_{1,b} = \begin{cases} \frac{b e^{-bt}}{\Gamma(1)} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $X \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$

$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$

$\boxed{X \text{ admet une variance qui vaut } \frac{1}{\lambda^2}}$

9a) $b>0$ $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ $bX(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$: $P(bX \leq x) = P(X \leq \frac{x}{b})$

$F_{bX} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ P(X \leq \frac{x}{b}) & x > 0 \end{cases} = F_X(\frac{x}{b})$

F est C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf eventuellement en 0 donc par derivation et prolongement arbitraire : $f_{bX} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{b} f_X(\frac{x}{b}) & x \geq 0 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$$= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{b^{a-1}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-x}}{\Gamma(a)} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(a)} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Donc $\boxed{bX \hookrightarrow \gamma(a)}$

~~$E(bX) = a$ donc $E(X) = E$~~

9b) bX admet une esperance et une variance $E(bX) = V(bX) = a$
donc par linearite $\frac{1}{b} bX = X$ aussi

$E(X) = E\left(\frac{1}{b} bX\right) = \frac{1}{b} E(bX) = \boxed{\frac{a}{b}}$

$V(X) = V\left(\frac{1}{b} bX\right) = \frac{1}{b^2} V(bX) = \boxed{\frac{a}{b^2}}$

10a) X_1 et X_2 sont independantes
et la densité de X_1 est bornée donc X_1+X_2 ~~sont~~ est à densité
et par formule de convolution

$$f_{X_1+X_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)\,dt \quad \text{non nulle si } x-t \geq 0 \Rightarrow x>0$$

$$= \int_0 \frac{1\, b^{a_1} t^{a_1-1} e^{-bt} b^{a_2} (x-t)^{a_2-1} e^{-b(x-t)}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\,dt \quad t \geq 0 \text{ et } x-t \geq 0 \quad t \in [0, T]$$

$(\ldots)$

$$= \begin{cases} \dfrac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)(a_2)} x^{a_1+a_2 1} B(a_1, a_2) e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

~~10b~~ 10c D'après 10b :

$$\boxed{B(1/2, 1/2)} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} \quad \text{d'après 6b}$$

$$= \boxed{\pi}$$

11a

11b
```
def Simul(x,y):
    U=rd.random(0,1)
    U=U**(x-1)*(1-U)**(y-1)
    return U
```

11c ~~Soit~~ D'après le lemme des coalitions, puisque les U_k sont indépendants, les $U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1}$ le sont aussi. De plus ces derniers admettent tous la même espérance et variance.

On peut supposer que à la question 11a, on ait obtenu :
$E(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = B(x,y)$

Dans ce cas, d'après la loi faible des grands nombres

$$\boxed{R_n \xrightarrow{P} B(x,y)}$$

11d ~~def (Rn)~~

```
def Rn(x, y, n):
    Rn=0
    A=np.ones(n)
    for i in range(1,n+1):
        A[i-1] = Simul
    Rn= 1/n * np.sum(A)
    return Rn
```

On réutilise 11b

11e On illustre le résultat de la question 10c : Puisque $R_n \xrightarrow{\mathcal{P}} B(1/2, 1/2) = \pi$
c'est bien ce qu'on voit.

12a

12b ~~Un est un estimateur car elle ne dépend que des observations.~~

12a $X^{a-1}(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

X^{a-1} admet une espérance $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-t}$ converge absolument par théorème du transfert puisque $X \to X^{a-1}$ C^0 sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow$ $\boxed{E(X^{a-1}) = \Gamma(a) \text{ et existe}}$

$E((X^{a-1})^2) = E(X^{2a-2})$, de la même manière existe et vaut $\Gamma(2a-1)$

donc $V(X)$ existe et par Koenig-Huygens vaut :

$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X^a)^2 = \Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2}$

Numéro d'inscription 503619

Né(e) le 31/01/2005

Nom LÊVÊQUE

Prénom (s) JADE

Signature

20 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques Approfondies

Sujet □ 1 ou □ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 017

12b) • ϑ_n est un estimateur car depend que des observations

• $E(\vartheta_n)$ existe car $E(X_k^{a-1})$ existe et par linéarité

$E(\vartheta_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^{a-1}) = \frac{1}{n} \times n \times \Gamma(a) = \Gamma(a)$

Donc $b_\theta(\vartheta_n) = \Gamma(a) - \Gamma(a) = 0 \Rightarrow \vartheta_n$ est sans biaise

• $V(\vartheta_n)$ existe et par independance des X_k^{a-1} (lemme des coalitions car les X_k sont independants :

$V(\vartheta_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k^{a-1})\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k^{a-1})$

$= \frac{n}{n^2} V(X^{a-1}) = \frac{\Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2}{n}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V(\vartheta_n) = 0$

Donc $\begin{cases} b_\theta(\vartheta_n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \\ V(\vartheta_n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \end{cases}$ donc ϑ_n est convergent

ϑ_n est un estimateur convergent et sans biais de $\Gamma(a)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

12c La fonction Myst utilise la méthode d'inversion pour renvoyer $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

12d On va simuler M_n car c'est un estimateur de $\Gamma(a)$.

```
def approx(n,a):
    X=myst(n)
    U=myst(n)**(a-1)
    Mn= 1/n * np.sum(U)
    return Mn
```