1)a)

On suppose que M est N-réversible et que l'on dispose de $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $m_{i,j} \neq 0$

Ainsi, comme M est N-réversible alors on a

$$N_i m_{i,j} = N_j m_{j,i}. \quad (*)$$

Or, par hypothèse, N est une matrice ligne dont tous les coefficients sont strictement positifs donc a fortiori non nuls.

Donc, $N_j \neq 0$

Donc d'après $(*)$, on a

$$m_{j,i} = \frac{N_i m_{i,j}}{N_j}$$

Or, $N_i \neq 0$ (même raison que pour N_j) et on a que $m_{i,j} \neq 0$

Donc, $m_{j,i} \neq 0$ en tant que quotient de tels réels.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc, $\boxed{\text{si } M \text{ est } \mu\text{-réversible et si } m_{i,j} \neq 0 \text{ pour un couple } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ alors } m_{j,i} \neq 0}$

b) On suppose que M est symétrique.

Or, par hypothèse $M \in ST_n$, déterminons μ telle que M est μ-réversible en raisonnant par analyse synthèse.

Analyse : On suppose que M est μ-réversible

Donc,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}. \ (*)$$

Or, M est symétrique

Donc, par définition

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ m_{i,j} = m_{j,i}.$$

Donc, par $(*)$, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \mu_i = \mu_j.$$

Or, par hypothèse,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1.$$

Donc, si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mu_i = \frac{1}{n}.$$

Alors, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

$$= n \times \frac{1}{n}$$

$$= 1$$

Donc, M est μ-réversible ssi $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i = \frac{1}{n}$

<u>Synthèse</u>.

Posons $\mu = \left(\frac{1}{n}\right)_{i \in [\![1, n]\!]}$.

Alors, on a $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mu_i = \frac{1}{n}$.

Or, M est symétrique

Donc, $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{i,j} = m_{j,i}$

Donc, $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \frac{1}{n} m_{i,j} = m_{j,i}$.

Donc,

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$$

Or, $M \in S_n$,

Donc, en vertu du raisonnement par analyse-synthèse, on a

Si M est symétrique alors $\mu = \left(\frac{1}{n}\right)_{i \in [\![1, n]\!]}$ et M est μ-réversible

c) On notera tout au long du sujet "ssi" = "si et seulement si"

M est μ-réversible ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} \mu_1 m_{1,1} & \cdots & \mu_1 m_{1,n} \\ \vdots & & \\ \mu_n m_{n,1} & \cdots & \mu_n m_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 m_{1,1} & \cdots & \mu_n m_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \\ \mu_1 m_{1,n} & \cdots & \mu_n m_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{1,n} & & m_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{(1)}{\text{ssi}} \ \Delta M = {}^tM \Delta$$

(1) par définition de Δ.

Donc, $\underline{M \text{ est } \mu\text{-réversible si et seulement si } \Delta M = {}^tM\Delta}$

2)

Copie anonyme - n°anonymat : 274756

Code épreuve : 288	**Nombre de pages :**	**Session :** 2025
Épreuve de : Maths HEC//ESSEC		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

2) On suppose que M est μ-inversible.

On a :

$$\mu M = (\mu_1 \;\cdots\; \mu_n)\begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \\ m_{n,1} & & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\underset{(1)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i m_{i,1} \;\cdots\; \sum_{i=1}^{n} \mu_i m_{i,n}\right).$$

$$\underset{(2)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_1 m_{1,i} \;\cdots\; \sum_{i=1}^{n} \mu_n m_{n,i}\right)$$

$$\underset{(3)}{=} \left(\mu_1 \sum_{i=1}^{n} m_{1,i} \;\cdots\; \mu_n \sum_{i=1}^{n} m_{n,i}\right)$$

$$\underset{(4)}{=} (\mu_1 \times 1 \;\cdots\; \mu_n \times 1)$$

$$= (\mu_1 \;\cdots\; \mu_n)$$

$$= \mu$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(1) Par produit matriciel.
(2) M est μ-réversible donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$.

(3) Par linéarité de la somme.

(4) $M \in ST_n$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$.

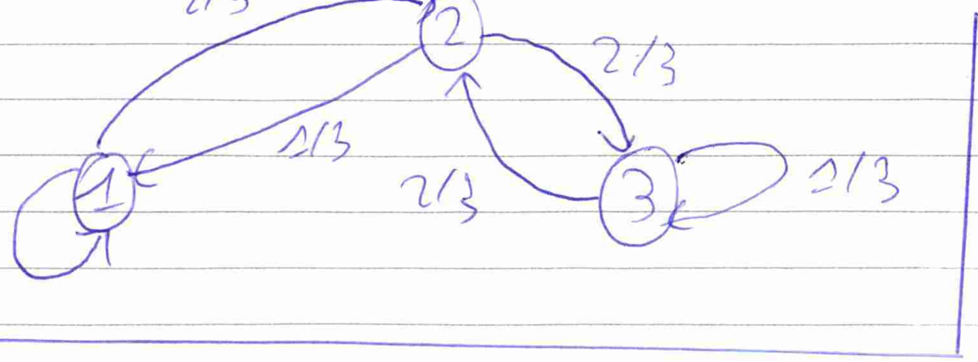
Donc,

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est } \mu\text{-réversible alors } \mu M = \mu}$$

3)a) On a

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$P \in M_3(\mathbb{R})$, donc le graphe probabiliste associé à P ne dispose que de trois états.
On a donc



b) P est une matrices a coefficients positifs et on remarque que la somme des coefficiats de chaque ligne donne 1.

De ce fait, on a $P \in ST_n$.

4) a)

```
def Trajectoire(L, n):
    V=[rd.randint(1, n+1)]
    for i in range(n-1):
        Vi = V[-1]
        ni = len(L[Vi-1])
        hi= rd.randint(1, ni+1)
        V.append(L[Vi-1][hi])
    return V
```

b) Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.

<u>1er cas</u>: les sommets i et j ne sont pas adjacents.

Alors, par définition d'une matrice d'adjacence on a $a_{i,j}=0$

De même, $p_{i,j}=0$

Donc, on a bien $p_{i,j}=\frac{a_{i,j}}{d_i}$ ($d_i \neq 0$ car G est connexe).

2ème cas : i et j sont reliés.

Donc, on a $a_{i,j} = 1$.

Or, par hypothèse, on a

$$\sum_{h=1}^{n} p_{i,h} = 1$$

Donc, on a nécessairement $p_{i,j} = \frac{1}{d}$ où d est le nombre de sommets reliés à i.

Donc, dans tous les cas on a

$$\boxed{p_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{d_i} \text{ et ce pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

6) On a g est un graphe non orienté.

Donc, par théorème, on a A est symétrique.

Donc, d'après 1)(b)

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \frac{1}{n} a_{i,j} = \frac{1}{n} a_{j,i}.$$

Donc,

~~$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \frac{1}{n d_i} a_{i,j} = \frac{1}{n d}$~~

Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = n$ alors on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \frac{1}{d_i} a_{i,j} = \frac{1}{d_j} a_{j,i}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 274756

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : | Session : 2025

Épreuve de : Maths HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc, d'après 4) b)

$\forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2, \ p_{i,j} = p_{j,i}$.

non abouti.

5) ~~On a~~

~~$\forall (n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$~~,

Soit $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

Soit $(i_0, \dots, i_n, j_1, \dots, j_s) \in [\![1,r]\!]^{n+s}$,

On a :

$$\Theta_M(i_0,\dots,i_n)\Theta_M(j_0,\dots,j_s) = \prod_{h=1}^{n} m_{i_{h-1},i_h} \times \prod_{h=1}^{s} m_{j_{h-1},j_h}$$
$$= \prod_{h=1}^{n}(m_{i_{h-1},i_h}) \times m_{j_0,j_1} \times \prod_{h=2}^{s} m_{j_{h-1},j_h}$$
$$= \prod_{h=1}^{n}(m_{i_{h-1},i_h}) \times m_{n,j_1} \times \prod_{h=2}^{s} m_{j_{h-1},j_h}$$

Notons $\forall h \in [\![1,s]\!], j_h = i_h$ (*)

Alors, on a $\Theta_M(i_0,\dots,i_n)\Theta(j_0,\dots,j_s) = \prod_{h=1}^{n+s} m_{i_{h-1},i_h}$
$$= \Theta(i_0, \dots, i_{n+s})$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or,

$$\Theta_M(i_0, \ldots, i_n, i_{n+1}, \ldots, i_{n+s}) = \Theta_M(i_0, \ldots, i_n, j_0, \ldots, j_s)$$

(d'après (*))

Donc, on a

$$\Theta_M(i_0, \ldots, i_n)\,\Theta_M(j_0, \ldots, j_s) = \Theta_M(i_0, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_s)$$

si $(n, s) \in \mathbb{N}^*$ et $(i_0, \ldots, i_n, j_0, \ldots, j_s) \in [\![1, r]\!]^{n+s}$ et $i_n = j_0$

6) On a $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2}$

M vérifie (K) ssi $\Theta_M(1, 2, 3, 1) = \Theta_M(1, 3, 2, 1)$.

$$\cancel{\text{ssi } \prod_{k=1}^{3} m_{k,k} = \prod_{k=1}^{3}}$$

$$\text{ssi } m_{1,2}\, m_{2,3}\, m_{3,1} = m_{1,3}, m_{3,2}\, m_{2,1}$$

Donc, Si $n = 3$ alors M vérifie (K) si et seulement si

$$m_{1,2}\, m_{2,3}\, m_{3,1} = m_{1,3} m_{3,2} \times m_{2,1}$$

De même, On a $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Donc, si on pose $P = (p_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2}$.

Alors, on a

$$\begin{cases} p_{1,2}\,p_{2,3}\,p_{3,1} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 0 = 0 \\ p_{1,3}\,p_{3,2}\,p_{2,1} = 0 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

Donc, $p_{1,2}\,p_{2,3}\,p_{3,1} = p_{1,3}\,p_{3,2}\,p_{2,1}$.

Donc, d'après le résultat précédent, on a

$$\boxed{P \text{ vérifie } (K)}$$

9)a) On a par hypothèse M est ergodique.

Donc, par définition, on a $T \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\quad m_{i,j}^{(T)} > 0.$$

Donc d'après 8) (admise) et si l'on pose $(i_T = 1)$, on a $(i_0, \dots, i_T) \in [\![1,n]\!]^{T+1}$ tels que

$$\boxed{i_0 = i,\ i_T = 1 \text{ et } \theta_M(i_0, \dots, i_T) > 0}$$

Partie 2 :

10) a) Posons $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$

Alors, on a $D \in M_n(\mathbb{R})$ et D est diagonale

Donc, D^2 est un produit matriciel bien défini et D^2 est la matrice D dont les coefficient diagonaux sont élevés à la puissance 2.

Donc, on a $D^2 = \begin{pmatrix} (\sqrt{\mu_1})^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & (\sqrt{\mu_n})^2 \end{pmatrix}$

$$\overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$= \Delta$$

(1) Par propriété de $t \mapsto t^2$.

Donc, si on pose $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$

alors $D^2 = \Delta$

b) On a P est p-réversible

Donc, d'après 1)c), on a

$$\Delta P = {}^tP \Delta$$

or, ${}^tP = Q$

Donc, $\Delta P = Q \Delta$.

On admet.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 274756

Code épreuve : 288

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) D'après 10)b), $D^{-1}QD$ est diagonalisable.

Donc, par définition, $D^{-1}QD$ est semblable à une matrice diagonale.

Donc on dispose de $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale tel que

$$D^{-1}QD = A.$$

Or, D est inversible en tant que matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls (P est inversible donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \mu_i \neq 0$ donc, $\forall i \in [\![1,n]\!]\ \sqrt{\mu_i} \neq 0$).

Ainsi, ~~d'après~~ on a

$$DD^{-1}QDD^{-1} = DAD^{-1}$$

Or, par théorème, on a

$$I_n Q I_n = DAD^{-1}$$

Par neutralité de I_n pour le produit matriciel, on a

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$Q = DAD^{-1}.$$

Or, A est diagonale

Donc, Q est semblable à une matrice diagonale.

Donc, par définition, on a

$$\boxed{Q \text{ est diagonalisable}}$$

11) Par hypothèses, on a P est μ-invariable.

Donc, d'après 2), on a :

$$\mu P = \mu.$$

Donc on a

$$^t(\mu P) = {}^t\mu.$$

Donc, (admis dans l'énoncé), on a

$$^tP\,^t\mu = {}^t\mu.$$

Or, par définition, on a $^tP = Q$.

Donc $\boxed{Q\,^t\mu = {}^t\mu}$

De même, on a par hypothèse $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$. et $\forall i \in [\![1,n]\!], \mu_i \geq 0$

Donc, on dispose de $i \in [\![1,n]\!]$, tel que $\mu_i \neq 0$

14/18

Donc, $\mu \neq 0_{M_{1,n}(\mathbb{R})}$

Donc, ${}^t\mu \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

or, on a montré que

$$Q\,{}^t\mu = {}^t\mu.$$

Donc, $Q\,{}^t\mu = 1\,{}^t\mu$.

or, $1 \in \mathbb{R}$ et on a montré que ${}^t\mu \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$

Donc, par définition, 1 est valeur propre de Q.

Donc, $\underline{1 \in Sp(Q)}$

12) a) On a $\lambda \in Sp(Q)$ et Y est un vecteur propre de Q associé à λ

Donc, on a $QY = \lambda Y$.

or, $QY \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le ième coefficient de QY est

$$\sum_{j=1}^{n} q_{i,j} y_j$$

De même, le i-ème coefficient de λY est λy_i.

Donc, on a

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_{i,j} y_j = \lambda y_i$

On a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}|y_j|\right) \underset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} q_{i,j}|y_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{n}|y_j| \sum_{i=1}^{n} q_{i,j}$$

$$\underset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{n}|y_j| \times 1.$$

$$= \sum_{j=1}^{n}|y_j|$$

(1) Interversions licites car ce sont des sommes finis "non triangulaires".

(2) Car P est μ-rémuable. Donc, $P \in ST_n$.

Donc, $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$ et ce pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Or, $q_{i,j} = p_{j,i}$ et ce pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Donc, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}|y_j|\right) = \sum_{j=1}^{n}|y_j|$$

6) On a $\lambda \in Sp(Q)$ et V est vecteur propre de Q associé à λ.

Donc, on a $QV = \lambda V$. $(*)$

Or, $QV \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

Or, le $i$ème coefficient de QV est égal à $\sum_{j=1}^{n} q_{i,j} y_j$ et ce pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

Copie anonyme - n°anonymat : 274756

Code épreuve : 288	Nombre de pages :	Session : 2025
Épreuve de : Maths HEC/ESSEC		

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

De même, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a que le i ème coefficient de λV est λy_i

Donc, d'après $(*)$, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} y_j = \lambda y_i.$$

Donc, $\forall i \in [\![1, n]\!]$,
$$|\lambda| |y_i| \underset{(1)}{=} |\lambda y_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} y_j \right| \underset{(2)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} |q_{i,j} y_j| \underset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{n} |q_{i,j}| |y_j| \underset{(3)}{=} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} |y_j|$$

(1) Par propriétés de la valeur absolue

(2) D'après l'inégalités triangulaires.

(3) Par positivité des coefficients de P ($P \in ST_n$)

~~or, P est une matrice de transition~~

Donc, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad q_{i,j} \in [0,1]$.

Donc, soit $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad q_{i,j} \leq 1.$$

Donc, $\forall j \in [\![1,n]\!], \quad q_{i,j}|y_j| \leq |y_j|$

Donc, par sommes des inégalités, on a

$$\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}|y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j|$$

Donc, par somme on a

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda|\,|y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}|y_j|$$

Donc, d'après 12)a) on a

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda|\,|y_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j|$$

Donc, par linéarité, on a

$$|\lambda| \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j|$$

Par le caractère muet des indices d'une somme, on a

$$\boxed{|\lambda| \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i|}$$

(en 12)a)

c) On a montré que les coefficients de Y étaient non tous nul

Donc, $\sum_{i=1}^{n} |y_i| \neq 0$

Or, d'après 12) a), on a

$$|\lambda| \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$

Donc,

$$|\lambda| \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i|}{\sum_{i=1}^{n} |y_i|}$$

Donc, $|\lambda| \leq 1$.

Ainsi, on a $\lambda \in [-1, 1]$

or, $\lambda \in Sp(Q)$

Donc $\boxed{Sp(Q) \subset [-1, 1]}$

13) a) Par hypothèse Y est vecteur propre de Q pour la valeur propre 1.

Donc, en raisonnant comme en 12) b), on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} y_j = \underbrace{1 \times y_i}_{= y_i}.$$

Ainsi, on a

$$|y_k| = \left| \sum_{j=1}^{n} q_{k,j} y_j \right|$$

$$\underset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} |q_{k,j} y_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |q_{k,j}| |y_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} q_{k,j} |y_j|$$

(1) Par inégalité triangulaire.

Or, $y_k > 0$

Donc, on a $y_k \leq \sum_{j=1}^{n} q_{k,j} |y_j|$

$$\leq q_{k,k} |y_k| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} q_{k,j} |y_j|.$$

On admet l'inégalité stricte

On a $\sum_{i=1}^{n} |y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$

Copie anonyme - n°anonymat : 274756

Code épreuve : 288

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc, ~~cette conclusion est absurde.~~

~~Donc, il n'existe aucun l tel que $y_l < 0$~~

On a de même (par symétrie des rôles joués)

$$|y_l| < \sum_{j=1}^{n} q_{l,j} |y_j|.$$

Or, $y_l < 0$

Donc, $|y_l| = -y_l$.

Donc, on a $-y_l < \sum_{j=1}^{n} q_{l,j} |y_j|$.

Donc, $y_l > \sum_{j=1}^{n} q_{l,j} |y_j|$

Or, $y_l < 0$ et $y_k > 0$

Donc, on a par transitivité :

$$\sum_{j=1}^{n} q_{l,j} |y_j| < \sum_{j=1}^{n} q_{k,j} |y_j|$$

Donc, par somme, on a

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{l,j}|y_j| < \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{k,j}|y_j|$$

Donc, d'après 12)b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|y_j| < \sum_{j=1}^{n}|y_j|$

Or, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|y_j| = \sum_{j=1}^{n}|y_j|$

Donc, cela est absurde.

Donc, on a montré que si on dispose de $h \in [\![1,n]\!]$ tel que $y_h > 0$ alors, il n'existe aucun $l \in [\![1,n]\!]$ tel que $y_l < 0$.

b) En raisonnant de la même manière que lors de la question b), on a que si on dispose de $h \in [\![1,n]\!]$ tel que $y_h < 0$ alors, on ne dispose de aucun $l \in [\![1,n]\!]$ tel que $y_l > 0$.

En d'autre terme, tout vecteur propre de Q associé à la valeur propre 1 ont des composantes soit toutes strictement positives soit toutes strictement négative.

Or strictement négatif (resp positif) implique juste la négativité (resp positivité

Donc, tout vecteur propre de Q associé à la

Valeur propre 1 a des composantes soit toutes positives, soit toutes négatives.

~~De même,~~

Soit $V \in E_1(A)$, alors V a des composantes soit toutes négatives soit toutes positives.

1er cas : V a des composantes toutes positives.

Donc, on dispose de $(V_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ tel que

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!],\ V_i \geq 0.$$

Donc, si l'on suppose que la somme des composantes de V est nulle, alors, on a

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = 0.$$

Or, toute somme de réel positif est nul si tout ces réels sont nuls.

Donc, $\forall i \in [\![1,n]\!],\ V_i = 0$

Donc, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc, $V = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Or, par définition tout vecteur propre d'une matrice carrée de taille n est différent de $0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc, $V \notin E_1(Q)$.

2ème cas : Toutes les composantes de V sont négatifs.

En reprenant les notations du premier cas, on a

$$V=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix} \text{ et } \forall i\in[\![1,n]\!],\ v_i\leq 0.$$

Ainsi, si on suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$$

On a donc, $\sum_{i=1}^{n} -v_i = 0$

Or, $\forall i\in[\![1,n]\!],\ -v_i \geq 0$

Donc, $V \notin E_1(Q)$ grâce au premier cas.

$\boxed{\text{Donc, aucun élément de } E_1(Q) \text{ a la somme de ses composantes qui sont nuls.}}$

c) ~~On a par définition~~

$$\cancel{QY = 1\cdot Y = Y}.$$

On admet le résultat, on a donc

$$Y=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) {}^t\mu.$$

or, $\sum_{i=1}^{n} y_i \in \mathbb{R}$.

Donc, on a $Y \in \mathrm{Vect}({}^t\mu)$

or, $Y\in E_1(Q)$

Donc, $E_1(Q) \subset \mathrm{Vect}({}^t\mu)$

Or, d'après 11) on a

$$Q^t N = {}^t N.$$

Partie 3 :

16)

```
def opLigne(M,k,alph):
    ~~C = np.zeros((0,0))~~
    ~~for j in range~~
    n,_ = np.shape(M)
    for i in range(n):
        if i != k:
            M[k-1,i] = alph * M[k-1,i]
        else:
            M[k-1,i] = 1 - alph + alph M[k-1,i].
    return M
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

17) a) On a $n = 3$

Donc, d'après 6)

M vérifie la propriété (K) ssi $m_{1,2}\, m_{2,3}\, m_{3,1} = m_{1,3}\, m_{3,2}\, m_{2,1}$

ssi $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$

ssi $m'_{2,1}$

b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

On suppose que $m_{i,j} > 0$

<u>1er cas :</u> $i = j$

Donc, on a par définition $m'_{i,i} = 1 - \alpha + \alpha m_{i,i}$

$= 1 + \alpha(m_{i,i} - 1)$.

Or, $M \in ST_n$

Donc, $m_{i,i} \in]0,1]$. car $m_{h,h} > 0$

Donc, $m_{i,i} - 1 \in]-1,0]$.

Or, $\alpha \in]0,1]$.

~~Donc, $1 < \alpha(m_{h,h} - 1)$~~ < 0

$-\alpha \leq \alpha(m_{i,i} - 1) \leq 0$

Donc, $1 - \alpha \leq \alpha(m_{i,i} - 1)$

Or, $\alpha \in]0,1]$.

Donc, $1-\alpha > 0$

Donc, $0 < \alpha(m_{i,i} - 1)$

Donc, $m'_{i,i} > 0$

2ème cas : $i \neq j$

Donc, $m'_{i,j} = \alpha m_{i,j}$.

or, $\alpha > 0$ et $m_{i,j} > 0$

Donc, $\alpha m_{i,j} > 0$

Ainsi, $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ m'_{i,j} > 0 \ \text{si} \ m_{i,j} > 0}$

c) On suppose que M est ergodique

Alors, on dispose de $T \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j}^{(T)} > 0.$$

Or,

21)a)

```
def NonNul(M, I, J):
    for i in I:
        for j in J:
            if M[i-1][J-1] != 0 and M[i-1][j-1]==M[j-1][i-1] and
            i != j:
                return (i,j)
        else:
            return (0,0)
```

b)

```
def estRev(M):
    n = np.shape(M)[0]
    while len(I) < n-1:
        ell, k = NonNul(M, I, J)
        if (ell == 0) or M[k-1][ell-1] * M[ell-1][k-1] == 0:
            return False
        else:
            if M[ell-1][k-1] <= M[k-1][ell-1]:
                OpLine(M, k, M[ell-1][k-1] / M[k-1][ell-1])
            else:
                OpCol(M, k, M[k-1][ell-1] / M[ell-1][k-1])
            I.append(ell)
            J.remove(J[0])
    return (np.transpose(M) == M).all().
```