Partie 1 :

1) Montrons que $t \mapsto e^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \ln(1+t)$ est concave sur $]-1; +\infty[$.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x$$

De même, on pose pour tout $x > 1$,
$g(x) = \ln(1+x)$

On a f est C^2 sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de référence. Donc, f est deux fois dérivable successivement sur $\mathbb{R}$.

De même, $t \mapsto t+1$ est C^2 ~~dérivable~~ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t > -1, \quad t+1 > 0$$

Donc g est C^2 ~~dérivable~~ en tant que composition de telles fonctions

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x \\ \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = e^x. \end{cases}$$

De même

$$\forall x > -1, \begin{cases} g'(x) = \frac{1}{1+x} \\ g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}. \end{cases}$$

Or, par propriétés de exp, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$$

Donc, par ~~def~~ théorème, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, on a $\forall x > -1$, $(1+x)^2 > 0$

Donc, $\forall x > -1$, $\frac{-1}{(1+x)^2} < 0$.

Donc, g est concave sur $\mathbb{R}$.

Or, par définition, toute fonction convexe (resp. concave) sur un intervalle se trouve au dessus (resp. en dessous) de toutes ses tangentes.

Donc, en particulier f est au dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = e^0(x-0) + e^0$

$y = x + 1$

De même, g est en dessous de sa tangente en 0 d'équation $y = \frac{1}{1+0}(x-0) + \ln(1+0)$

$$y = x$$

Donc, on peut conclure que

$$\underline{\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \geq 1+t \quad \text{et} \quad \forall t > -1,\ \ln(1+t) \leq t}$$

2) a) On a

$$\forall t \in [0,1],\ f(t) = (1+t)e^{-t} - t$$

or, f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit et somme de telles fonctions et

$$\forall t \in [0,1],\ f'(t) = 1 \times e^{-t} - (1+t)e^{-t} - 1$$
$$= e^{-t} - (1+t)e^{-t} - 1$$
$$= e^{-t}(1 - 1 - t) - 1$$
$$= -te^{-t} - 1$$

or, $t \mapsto -te^{-t} - 1$ est dérivable sur $[0,1]$ en tant que somme de telles fonctions et

$$\forall t \in [0,1],\ f''(t) = -1 \times e^{-t} + te^{-t}$$
$$= -e^{-t} + te^{-t}$$
$$= e^{-t}(t-1)$$

or, par propriétés de exp, on a

$$\forall t \in [0,1],\ e^{-t} > 0 \quad \text{et} \quad t - 1 \leq 0$$

Donc, $\forall t \in [0,1]$, $e^{-t}(t-1) \leq 0$

Donc, $\forall t \in [0,1]$, $f''(t) \leq 0$.

Donc, par théorème, f' est décroissante sur $[0,1]$
~~et $f'(0) =$~~.

Donc, $\forall t \in [0,1]$, $f'(t) \leq f'(0)$
or, $f'(0) = -1$.

Donc, $(-1<0)$
$\forall t \in [0,1]$, $f'(t) < 0$.

Donc, * par théorème, f est strictement décroissante sur $[0,1]$

* or, f est continue sur $[0,1]$ car dérivable

* $f(0) = (1+0)e^{-0} - 0$
$= 1$
et $f(1) = 2e^{-2} - 2$.
$= 2(e^{-2} - 1)$
$= 2\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$.
$= 2\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2 - 1\right)$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle $[0,1]$ sur l'intervalle $f([0,1])$ et

$f([0,1]) = [f(1), f(0)]$.
$= \left[2\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2 - 1\right), 1\right]$.

or, $e > e^0 = 1$
Donc, $\left(\frac{1}{e}\right)^2 < 1$

Copie anonyme - n°anonymat : 274756

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Maths ESSEC II

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc, $\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2-1\right)<0$

Donc, $2\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2-1\right)<0 \quad (2>0)$.

Donc, $0\in\left[2\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2-1\right), 1\right]$.

Donc, d'après le caractère bijectif de f, on dispose d'un unique $\alpha\in[0,1]$ tel que

$$f(\alpha)=0$$

Or, $f(1)\neq 0$ et $f(0)\neq 0$

Donc, $\alpha\notin\{0;1\}$.

Donc, $\alpha\in]0,1[$.

De même, on a f strictement décroissante sur $[0,1]$ et $f(\alpha)=0$

Donc, $\forall t\in[0,1],\ f(t)>0 \iff t<\alpha$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc, f est strictement décroissante sur $[0,1]$ et il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha)=0$ et que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) > 0 \Leftrightarrow t < \alpha$

b) ~~On~~
D'après l'énoncé, toute les commandes sont bien implémentées.
(Par balayage):

```
p = 10**(-3)
n = 0
t = 0
while (1+t)*np.exp(-t) - t > 0 :
        n += 1
        t += n*p
print(t)
```

c) Posons pour tout $t \in [0,1]$.

$$f(t) = e^t - 1 - 2t.$$

alors, f est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall t \in [0,1],\ f'(t) = e^t - 2.$$

~~Or, $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq t \leq 1$~~
~~$\Leftrightarrow 1 \leq e^t \leq e$~~

Donc, $\forall t \in [0,1]$, $f''(t) = e^t$.

Donc, $\forall t \in [0,1]$, $f''(t) > 0$

Donc, f est strictement croissante sur

On admet.

3)

a)

~~def minimum~~

```
def factorielle(k):
    S = 1
    for i in range(1, k+1):
        S *= S
    return S
```

```
def minimum(x, p):
    k = 0
    S = np.exp(-p)
    while x > S:
        k += 1
        S += np.sum([(p**(i)/factorielle(i))*np.exp(-p) for i in range(k+1)])
    return (k)
```

```
def simulY(p):
    return (rd.random(), p)
```

b) ~~On admet (passer par for~~

$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$.

$= 1 - \mathbb{P}(Y > x)$.

$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{h=0}^{+\infty} \bigcap_{i=1}^{h} \left[U \leq \sum_{i=0}^{h} \frac{p^i}{i!} e^{-p}\right]\right)$

On pouvait conclure avec

$\forall h \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = h) = \mathbb{P}(Y \geq h) - \mathbb{P}(Y \geq h+1)$.

On admet.

c)

$[Y = h]$ est réalisé alors $\left[U \leq \sum_{i=0}^{h} \frac{p^i}{i!} e^{-p}\right]$ est réalisé

Or, on a que

$\forall p \in [0,1], \quad \sum_{i=0}^{h} \frac{p^i}{i!} e^{-p} \leq f(p)$

$\forall p \in [0,1], \quad \sum_{i=0}^{h} \frac{p^i}{i!} e^{-p} \leq (1+p) e^{-p} - p$.

On admet.

On a d'après la formule des probabilités composées

$\mathbb{P}([X=0] \cap [Y=h]) = \mathbb{P}(X=0) \, \mathbb{P}_{[X=0]}(Y=h)$.

Copie anonyme - n°anonymat : 274756

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths ESSEC II

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$= \mathbb{1}_{[\beta < U \leq \beta + 1]}(0)\, \mathbb{P}(Y = h)$

$1 \qquad \hookrightarrow e^{-p}\dfrac{p^h}{h!}$

On admet.

d) On a $[X=0] \cap [Y=1] \subset [Y=1]$

Donc, par croissance de $\mathbb{P}$, on a

$$\cancel{\mathbb{P}([X=0] \cap [Y=1])} \leq e^{-p}\frac{p^1}{1!}$$

$\mathbb{P}([Y=1]) \leq \mathbb{P}(U \leq e^{-p} + p e^{-p})$

$= \mathbb{P}(U \leq e^{-p}(1+p))$

$= \mathbb{P}(U \leq \beta + p)$.

d) On a par définition d'une indicatrice $X(\Omega) = \{0,1\}$.

Ainsi, par théo, $\{[X=0], [X=1]\}$ forme un système complet d'événements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales, on a

$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}([X=0] \cap [Y=1]) + \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$

Donc, $\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])$

$$\underset{(1)}{=} e^{-p}\frac{p^1}{1!} - 0.$$

$$\boxed{= e^{-p}p.}$$

(1) $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(p)$.

De même, d'après la formule du crible, on a

~~$\mathbb{P}([X=0]\cap[Y$~~

De même, on a

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0]) + \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0]).$$

~~or,~~ On admet les deux autres cas.

e) On

a $\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y)$.

$$\underset{(1)}{=} 1 - \mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) - \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$$

$$= 1 - \beta - p(1 - e^{-p}).$$

$$= 1 - f(p) - p(1 - e^{-p})$$

$$= 1 - (1+p)e^{-p} + p - p(1 - e^{-p}).$$

$$= 1 + p - e^{-p} - pe^{-p} - p + pe^{-p}.$$

$$= 1 - e^{-p} - pe^{-p} + p - p - pe^{-p}.$$

$$= 1 - e^{-p} - 2pe^{-p}.$$

$$= 1 - \beta - pe^{-p}$$

$$= 1 - (1+p)e^{-p} - pe^{-p} + p$$

$$= 1 - (1+p+p)e^{-p} + p.$$

$$= 1 + p - (1+2p)e^{-p}$$

(1) $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Or, $[X=Y]$ ssi $([X=1] \cap [Y=1])$ ou $([X=0] \cap [Y=0])$ est réalisé.

Or, $\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 + p - (1+2p)e^{-p}$.

Or, d'après 1)c) on a

$$e^{-p} \leq 1 - 2p.$$

$$-(1+2p)e^{-p} \leq (-1-2p)(1-2p)$$

$$1+p-(1+2p)e^{-p} \leq 1+p-(1+2p)(1-2p)$$

Donc,

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \leq 1+p-(1^2-(2p)^2)$$

Or, $1+p-(1^2-(2p)^2) = 1+p-1+4p^2$

$$= p+4p^2.$$

4) On a

$$\mathbb{P}(T \geq 1) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_i} \geq 1\right).$$

$$\cancel{= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_i} = 1\right)}$$

$$\underset{(1)}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right).$$

(1) En effet, $\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{B_i} \geq 1\right]$ est réalisé ssi il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $[\mathbb{1}_{B_i} = 1]$ est réalisé $\forall i \in [\![1,n]\!]$.

car $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{B_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc, on a

$$\boxed{\mathbb{P}(T \geq 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)}$$

6) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ P_n : « $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)$ ».

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vrai.

Initialisation

On a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{1} B_i\right) = \mathbb{P}(B_1)$

$\sum_{i=1}^{1} \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(B_1)$

Or, $\mathbb{P}(B_1) \leq \mathbb{P}(B_1)$

Donc, P_1 est réalisé.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On suppose P_n et on montre P_{n+1}

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cup B_{n+1}\right)$

(*) $\underset{(1)}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cap B_{n+1}\right)$

(1) D'après l'inégalité du crible.

D'autre part, par positivité de $\mathbb{P}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cap (B_{n+1})\right) \geqslant 0.$$

Donc,

$$-\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cap (B_{n+1})\right) \leq 0.$$

Donc, par somme, on a que

(**) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cap (B_{n+1})\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) + \mathbb{P}(B_{n+1})$

Or, d'après P_n, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)$$

Donc, par somme, on a
$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) + \mathbb{P}(B_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) + \mathbb{P}(B_{n+1})$

Or, par Charles on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) + \mathbb{P}(B_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(B_{n+1})$$

Donc, par $(*)$, $(**)$ et par transitivité, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(B_i)$$

Ainsi, P_{n+1} est vrai.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)}$$

5)

a) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\mathbb{P}(X=n) - \mathbb{P}(Y=n)\right| = \begin{cases} \mathbb{P}(X=n) - \mathbb{P}(Y=n) & \text{si } \mathbb{P}(X=n) \geq \mathbb{P}(Y=n) \\ \mathbb{P}(Y=n) - \mathbb{P}(X=n) & \text{si } \mathbb{P}(Y=n) \geq \mathbb{P}(X=n) \end{cases}$$

Or, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Donc, par théorème, $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X=n)$ et $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Y=n)$ convergent de valeur 1.

Donc, $\sum_{n \geq 0} |\mathbb{P}(X=n) - \mathbb{P}(Y=n)|$ converge en tant que combinaison linéaire de séries convergentes.

Donc, la série definissant $\delta(X,Y)$ est bien convergente.

c) On admet b)

~~Soit j tel que IP(X~~

On a par positivité de IP

$\forall h \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}([X \neq h] \cap [Y = h]) \geq 0.$

Donc, par somme, on a : pour tout $h \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{P}([X=h]\cap[Y \neq h]) \leq \mathbb{P}([X=h]\cap[Y\neq h]) + \mathbb{P}([X\neq h]\cap[Y=h])$

Donc, d'après b) et par transitivité, on a

$|\mathbb{P}(X=h) - \mathbb{P}(Y=h)| \leq \mathbb{P}([X=h]\cap[Y\neq h]) + \mathbb{P}([X\neq h]\cap[Y=h])$

et ce pour tout $h \in \mathbb{N}$

d) D'après le résultat précédent et par somme on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X=h) - \mathbb{P}(Y=h)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=h]\cap[Y\neq h]) + \mathbb{P}([X\neq h]\cap[Y=h]).$$

(On admet la converge de la série du membre de droite).

Donc, $\delta(X,Y) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=h]\cap[Y\neq h]) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X\neq h)\cap[Y=h])$

Donc, $\delta(X,Y) \leq d(X,Y) + d(X,Y)$

Dor, $f(X,Y) \leq 2d(X,Y)$.

or, $\forall h \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} [X=h] \cap [Y \neq h] \subset [X=h] \\ [X \neq h] \cap [Y=h] \subset [Y=h] \end{cases}$

Dou, par croissance de $\mathbb{P}$, on a :

$$\forall h \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X \neq h \cap [Y=h]) + \mathbb{P}([X=h] \cap [Y \neq h]) \leq \mathbb{P}(X=h) + \mathbb{P}(Y=h)$$

Par sommation des inégalités (les sommes convergent car elles sont de sommes de proba) par théorème chacune de valeur 1).

Dor, on

$$\cancel{f(}\ d(X,Y) + d(X,Y) \leq 1 + 1$$

Dor, $2d(X,Y) \leq 2$.

Dor, on a :

$$\boxed{f(X,Y) \leq 2d(X,Y) \leq 2}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7) On a par définition de $X = \mathbb{1}_{[B < U \leq B+p]}$.

Donc, X est une variable aléatoire qui dépend de U.

Donc, comme on a défini les X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) de la même manière et que les U_n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont supposés indépendants, on a que

$(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.

Comme les Y_n ($n \in \mathbb{N}^*$) dépendent également des U_n ($n \in \mathbb{N}^*$) ont conclut la même chose.

8) On a $T_n(\Omega) = \{ \sum_{h=1}^{n} x \mid x \in \mathbb{N} \}$.

$= \{ x n \mid x \in \mathbb{N} \}$.

$= \mathbb{N}$.

~~De plus,~~ ~~$\forall h \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = h) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} Y_i = h)$~~.

On a par définition $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

or, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{P}(p_i)$.

Donc, par théorème, on a

$$\boxed{T_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)}$$

On suppose que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \ p_k = \frac{\lambda}{n}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right).$$

19) b) ~~Soit $k \in [\![1,n]\!]$.~~

$$\cancel{\forall k \in [\![1,n]\!], \ 1 \leq k \leq n}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow 1+n \leq n+k \leq 2n}.$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \frac{1}{1+n} \geq \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}}.$$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\forall t \in [\![k, k+1]\!], \quad k \leq t \leq k+1$$

$$\Leftrightarrow n+k \leq n+t \leq n+k+1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{n+t} \geq \frac{1}{n+k+1}.$$

Donc, par croissance de l'intégration (les fonctions sont continues et bornes rangées dans l'ordre croissant), on a

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{n+k}\, dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\, dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{n+k+1}\, dt$$

Or, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{n+k}\, dt = \frac{1}{n+k}(k+1-k) = \frac{1}{n+k}$.

$$\cancel{\text{et} \int_k^{k+1} \frac{1}{n+k+1}\, dt = \frac{1}{n+k+1}}$$

Donc, on a $\frac{1}{n+k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt$

De même,

$\forall t \in [k-1, k]$, $k-1 \leq t \leq k$.

$$\iff k-1+n \leq n+t \leq n+k.$$

$$\iff \frac{1}{n+k-1} \geq \frac{1}{n+t} \geq \frac{1}{n+k}.$$

Donc, par croissance de l'intégration (les bornes sont rangées dans l'ordre croissant $k+1 \geq k$ et les fonctions continues)

$$\int_k^{k-1} \frac{1}{n+k-1}\,dt \geq \int_k^{k-1} \frac{1}{n+t}\,dt \geq \int_k^{k-1} \frac{1}{n+k}\,dt$$

Or, $\int_k^{k-1} \frac{1}{n+k}\,dt = \frac{1}{n+k}$.

Donc, on a $\frac{1}{n+k} \leq \int_k^{k-1} \frac{1}{n+t}\,dt$.

Donc, $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt}$

c) D'après 11)b), on a

$\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \le \frac{1}{n+k} \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt.$$

Donc, par somme, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \le \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt.$$

D'après la relation de Chasles (généralisée) on a

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{n+t}\,dt \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \le \int_0^{n} \frac{1}{n+t}\,dt.$$

Or, $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{n+t}\,dt = \left[\ln(n+t)\right]_1^{n+1}$

$= \ln(2n+1) - \ln(n+1)$

De même, $\displaystyle\int_0^{n} \frac{1}{n+t}\,dt = \ln(2n) - \ln(n).$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Donc, on a

$$(*) \quad \cancel{\forall n \in \mathbb{N}}, \ \underline{\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq s_n \leq \ln(2n) - \ln(n)}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(2n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln(2)$.

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$

$$= \ln\left(\frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

Or, $\ln\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(2)$ (par continuité de ln en 2).

et $\ln(2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(2)$

Donc, d'après ce qui précède, d'après $(*)$ et d'après le théorème d'encadrement, on a

$$\underline{\lim_{n \to +\infty}(s_n) = \ln(2)}$$

Partie 3 :

12) On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 0$

Donc, ~~sur $]0 ; +\infty[$~~, h est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de telles fonctions et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or, par théorème, on a $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Or, $0 \in D_h$ et $h(0) = 1$.

Donc, on a $h(0) = \lim_{0^+} h$ et $D_h = \mathbb{R}_+$.

Donc, par théorème, h est continue en 0.

Montrons que h est dérivable en 0 :

Formons le taux d'accroissement de h en 0, noté $T_{h,0}$

Alors, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T_{h,0}(x) = \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{h(x) - 1}{x}.$$

$$= \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x}.$$

$$= \frac{\frac{e^x - 1 - x}{x}}{x}.$$

$$= \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Or, d'après un développement limité d'ordre 2 usuel, on a

$$e^{x} \underset{x \to 0}{=} x + 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Donc, on a

$$e^{x} - 1 - x \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Or, $\frac{1}{2} \neq 0$

Donc, $e^{x} - 1 - x \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right).$

Donc, par théorème, on a

$$e^{x} - 1 - x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$$

Donc, par produit, on a :

$$\frac{e^{x} - 1 - x}{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2}.$$

Donc, $\frac{e^{x} - 1 - x}{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}$

Or, $\frac{1}{2} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

Donc, $\frac{e^{x} - 1 - x}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

Copie anonyme - n°anonymat : 274756

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Maths ESSEC II

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Do, $\lim_{x \to 0} T_{h,0}(x) = \frac{1}{2}$

Or, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

Do, par théorème, h est dérivable en 0 et $h'(0) = \frac{1}{2}$.

Donc, h est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(0) = \frac{1}{2}$

13)a) D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a

$x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$ est l'unique primitive de h qui s'annule en 0.

Do, la dérivée de $x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$ est $x \mapsto h(x)$.

Do, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de telles fonctions et

$$\forall x \geq 0,\ g'(x) = -e^{-x}\int_0^x h(t)\,dt + e^{-x} \times h(x).$$

$$= e^{-x}\left(h(x) - \int_0^x h(t)\,dt\right)$$

13)b). h est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après 12) donc h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall t>0,\ h(t)-h'(t) = \frac{e^t-1}{t} - \left(\frac{e^t \times t - (e^t-1)\times 1}{t^2}\right)$$

$$= \frac{e^t-1}{t} - \frac{e^t t + e^t - 1}{t^2}$$

$$= \frac{t\cancel{e^t} - t - \cancel{e^t} t + e^t - 1}{t^2}$$

$$= \frac{e^t - t - 1}{t^2}$$

Donc, $\boxed{\forall t>0,\ h(t) - h'(t) = \frac{e^t - t - 1}{t^2}}$

c) D'après 1), on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad e^t \geq t+1$$

Donc, $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t - t - 1 \geq 0$
or $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 \geq 0$

Donc, $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{e^t-t-1}{t^2} \geq 0$

Donc, d'après 13)b), $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ h(t) - h'(t) > 0$ (on admet inégalité stricte).

Or, $h(0) = 1$ et $h'(0) = \frac{1}{2}$ d'après 12 et $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}>0$

Donc, $h(0)-h'(0)>0$

Donc, $\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ h(t)-h'(t)>0}$

Or, on a montré en 12) que

$$\cancel{\frac{e^t-1-t}{t^2}\underset{}{\sim}\frac{1}{t}}$$

Or, on a $e^t-1-t \underset{t\to+\infty}{\sim} e^t$

Donc $\frac{e^t-1-t}{t^2}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{e^t}{t^2}$

Donc, $h(t)-h'(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{e^t}{t^2}$

Or, par croissance comparée $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty$

Donc, $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)-h'(t) = +\infty$

Or, $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $h(t)-h'(t)>0$

Donc, par théo, $\boxed{\int_0^{+\infty} h(t)-h'(t)\,dt \text{ diverge de valeur } +\infty}$

d) $\forall t\geq 0$, $e^{-t}>0$

Donc, $\forall x\geq 0$, $g'(x)\geq 0 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} 1-\int_0^x h(t)-h'(t)\,dt\geq 0$ $\underline{\quad\quad}$ (*)

(1) D'après 13)a)

Or, $\int_0^x h(t)-h'(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc, par produit, puis somme, on a $1-\int_0^x h(t)-h'(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Donc, par définition, on dispose de $\gamma > 0$ tel que

$$\forall x \geq \gamma, \ 1 - \int_0^x h(t) - h'(t)\,dt < 0$$

Donc, d'après (*)

$$\forall x > 0, \ g'(x) < 0 \iff x > \gamma .$$

Ainsi, par théorème, on a

x	0		γ		$+\infty$
signe de g'		$+$		$-$	
variation de g		$\nearrow$	$g(\gamma)$	$\searrow$	

14)a) On admet

b) D'après 14)a) ~~et par croissance de l'intégration~~, on a :

$$\forall t > 0, \ \frac{1}{2} \leq \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \leq \frac{1}{2} e^t$$

Donc, par 13)b)

$$\forall t > 0, \ \frac{1}{2} \leq h(t) - h'(t) \leq \frac{1}{2} e^{-t}$$

Soit $x > 0$,

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont rangées dans l'ordre croissant) on a :

$$\int_0^x \frac{1}{2}\,dt \leq \int_0^x h(t) - h'(t)\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{2}e^t$$

Donc, on a

$$-\left(\frac{x-0}{2}\right) \geq -\int_0^x h(t) - h'(t)\,dt \geq -\frac{1}{2}(e^x - e^0)$$

Donc, on a :

$$1 - \frac{x}{2} \geq 1 - \int_0^x h(t) - h'(t)\,dt \geq 1 - \frac{1}{2}(e^x - 1).$$

Or, $e^{-x} > 0$

Donc, d'après 13)a) :

$$e^{-x}\left(1 - \frac{x}{2}\right) \geq g'(x) \geq e^{-x}\left(1 - \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Donc,

$$e^{-x}\left(1 - \frac{x}{2}\right) \geq g'(x) \geq e^{-x} \times \frac{3 - e^x}{2}$$ et ce

pour tout $x \geq 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

16)

```
X = np.linspace(np.log(3) , 2, 100)
Y = []
for x in X
    n = 2 ; s = x + x**2/4 ; d = x**3/6
    while d* np.
```

18) b)

```
def simulCouple (n, p) :
    Z= np.max([np.random() for i in range(1, n+1)])
    k=0
    while
    U = [np.random() for i in range(1, n+1)]
    Z = np.max(U).
    k = 0
    while U[k] <= 1-p :
        k += 1
    return(Z, U[k])
```

c)

```
T = [list(simulcouple(10, 0.15)) for x in range(10**6)]
L = []
for i in range(len(T)):
    if T[i][0] == T[i][1]:
        L.append(1).
print(np.mean(L))
```

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751