501509

HOOGTERP

LOUIS

29/06/2005

Note de délibération : 19.57 / 20

Numéro d'inscription 501309

Né(e) le 29/06/2005

Signature

Nom MOOGTERP

Prénom (s) LOUIS

19.57 / 20

Écricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/11

Numéro de table 15

Exercice 1 :

1) On a par définition de E_C et ce pour tout $C \in M_3(\mathbb{R})$, on a :

$$E_C = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid CM + MC = 0_3\}.$$

Donc, en particulier pour $C = 0_3$, on a

$$E_C = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid 0_3 M + M 0_3 = 0_3\}$$

Donc

$$E_C = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid 0_3 = 0_3\}.$$

$$= \{M \in M_3(\mathbb{R})\}$$

$$= M_3(\mathbb{R})$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

De même, on a

$$E_{I_3} = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid I_3M + MI_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}\}$$
$$= \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid 2M = 0_{M_3(\mathbb{R})}\}.$$
$$\boxed{= \{0_{M_3(\mathbb{R})}\}.}$$

2) Soit $C \in M_3(\mathbb{R})$, montrons que E_C est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

(i) On a $E_C \subset M_3(\mathbb{R})$ (par définition d'un ensemble en extension)

(ii) On a $C0_3 + 0_3C \underset{(1)}{=} 0_3 + 0_3$
$= 0_3$

(1) Par absorbance de 0_3 pour le produit matriciel.

Donc $0_3 \in E_C$

(iii) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
Soit $(A, B) \in (E_C)^2$.

$$\cancel{C(\lambda A + \mu B) + (\lambda A + \mu B)C = \lambda CA + \mu CA + \lambda AC + \mu BC}$$
$$\cancel{= \lambda(-AC) + \mu(-AC)}$$

$$C(\lambda A + \mu B) = \lambda CA + \mu CB$$
$$= -\lambda AC - \mu BC$$
$$\overset{(1)}{=} -(\lambda A + \mu B)C$$

(1) On a $(A, B) \in E_C^2$ donc $\begin{cases} CA = -AC \\ CB = -BC. \end{cases}$

Donc, $\{E_C\}$ est stable par combinaison linéaire.

Donc, en vertu des trois points précédents et par caractérisation en trois points des sous-espaces vectoriels, on a que

E_C est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et ce pour tout $C \in M_3(\mathbb{R})$

3) Soit $M \in \mathcal{E}_A$,

Donc, par définition de $\mathcal{E}_A$, on a

$$AM = -MA.$$

Donc, on a

$${}^t(AM) = {}^t(-MA)$$

Donc, on a

$${}^tM\,{}^tA = {}^t(-A)\,{}^tM$$

Or, A est symétrique, donc $\begin{cases} {}^tA = A. \\ {}^t(-A) = -A. \end{cases}$

Donc, on a

$${}^tMA = -A\,{}^tM$$

Donc,

$${}^tMA + A\,{}^tM = 0_3.$$

Donc, $\boxed{{}^tM \in \mathcal{E}_A}$.

Numéro d'inscription 501509

Né(e) le 29/06/2005

Signature

Nom HOOGTERP

Prénom (s) LOUIS

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 11

Numéro de table 15

4) a) On a ${}^tA = A$
Donc, A est symétrique.

Donc, en vertu du théorème spectral,

<u>A est diagonalisable</u>.

b)
$\lambda \in Sp(A) \underset{(1)}{\Leftrightarrow} rg(A - \lambda I_3) < 3$.

$$\Leftrightarrow rg\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) < 3$$

$$L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \Leftrightarrow rg\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -4-\lambda & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) < 3$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \Leftrightarrow rg\left(\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) < 3$$

$$L_2 \leftarrow 2L_2 - \lambda L_1 \Leftrightarrow rg\left(\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda - 8 & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) < 3$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

J'admet le résultat.

c) D'après la question précédente,

$$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda^3 - 9\lambda = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 9) = 0$$
$$\underset{(1)}{\Leftrightarrow} \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -3 \text{ ou } \lambda = 3$$

(1) D'après la règle du produit nul dans $\mathbb{R}$.

Donc, on a $Sp(A) = \{0, -3, 3\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$X \in E_0(A) \Leftrightarrow AX = 0X.$$
$$\Leftrightarrow AX = 0_3.$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y. \\ x = z \\ 2y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z. \\ y = \frac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ \frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix}$$

Donc, $X \in E_0(A) \iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc, $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

De même,
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$
$X \in E_3(A) \iff AX = 3X$.

$$\iff \begin{cases} x - 2y = 3x \\ -2x + 2z = 3y \\ 2y - z = 3z \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} x = -y \\ -y + 2z = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y \\ \frac{1}{2}y = z \end{cases}.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

$$\iff X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc, $X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$

De plus,

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$X \in E_{-3}(A) \iff AX = -3X$

$$\iff \begin{cases} x - 2y = -3x \\ -2x + 2z = -3y \\ 2y - z = -3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} y \\ -y + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} y \\ 2y = -2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} y \\ z = -y \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y \\ y \\ -y \end{pmatrix}$$

$\iff X = y \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Donc, $X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Numéro d'inscription 501509

Né(e) le 29/08/2005

Nom HOOGTERP

Prénom (s) LOUIS

Signature

19.57 / 20

Écricome Épreuve : Math

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/11

Numéro de table 15

On a donc, $\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$

sont respectivement libre dans $E_{-3}(A)$, $E_0(A)$ et $E_3(A)$ en tant que famille réduite à un unique vecteur non nul de chacune de ces familles respectives.

Ainsi, par théorème (concaténation de familles libres issues de sous-espaces propres distincts) on a

$$\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$$ est une base de

$M_{3,1}(\mathbb{R})$ ($\dim(M_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ et la famille est de cardinal 3).

Donc, par théorème, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ alors P est inversible en tant que matrice de passage (de la base canonique à la base propre mentionnée), et $A = PDP^{-1}$, Donc $D = P^{-1}AP$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

5) On a P :

6)

$N \in E_D \Leftrightarrow DN + ND = 0_3$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3g & -3h & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3(a+g) & -3h & 3(c-i) \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & +6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3(a+g) = 0 \\ -3d = 0 \\ -3h = 0 \\ 3(c-i) = 0 \\ 3f = 0 \\ 6i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -g \\ d = 0 \\ h = 0 \\ c = i \\ f = 0 \\ i = 0 \end{cases} \rightarrow N = \begin{pmatrix} -g & b & 0 \\ 0 & e & \end{pmatrix}$$

6) D'après la question précédente, on a

$$N \in E_D \iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, on a

$$E_D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, (c,e,g) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ g \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (c,e,g) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Or, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille

libre de $M_3(\mathbb{R})$ en tant que sous famille
de la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$.

Libre et génératrice dans le sous-espace vectoriel
qu'elle engendre, on a que

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base

de E_D.

La base mentionnée est de cardinal 3, donc, on a

$$\boxed{\dim(E_D) = 3}$$

7)a) $M \in E_A \Leftrightarrow AM + MA = 0_3$

$\Leftrightarrow (PDP^{-1})M + M(PDP^{-1}) = 0_3$

$\Leftrightarrow PDP^{-1}M = -MPDP^{-1}$

$\Leftrightarrow PDP^{-1}MP = -MPDP^{-1}P$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} PDP^{-1}MP = -MPDI_3$

$\Leftrightarrow PDP^{-1}MP = -MPD$

$\Leftrightarrow (P^{-1}P)DP^{-1}MP = -P^{-1}MPD$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} I_3 DP^{-1}MP = -P^{-1}MPD$

$\Leftrightarrow DP^{-1}MP = -(P^{-1}MP)D$

$\Leftrightarrow DN = -ND$

$\Leftrightarrow DN + ND = 0_3$

$\Leftrightarrow \boxed{N \in E_D}$.

(1) P est inversible d'inverse P^{-1}

8) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$,

On a

$(A+M)^2 = A^2 + AM + MA + M^2$

Notons Q l'ensemble des matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $(A+M)^2 = A^2 + M^2$

Donc, $Q = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid (A+M)^2 = A^2 + M^2\}$.

Numéro d'inscription	501509
Né(e) le	29 / 06 / 2005
Nom	HOOGTERP
Prénom (s)	LOUIS

Signature

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 11

Numéro de table 15

Donc,
$$Q = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^2 + AM + MA + M^2 = A^2 + M^2\}.$$
$$= \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0_3\}.$$
$$= E_A$$

Donc, l'ensemble des matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(A+M)^2 = A^2 + M^2$ est E_A

9) ~~On a montré que $0 \in Sp(A)$~~ et

~~$E_0(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ - \end{pmatrix}\right)$~~

~~Donc, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A)$ en tant que famille réduite à un vecteur non nul) $dim(E_0(A)) = 1$.~~

Or, $Ker(f) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0_3\}$
$= E_A$
or $dim(E_A) = 3$ donc $dim(Ker(f)) = 3$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

Donc, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$.

Or, on a $f \in \mathcal{L}(M_3(\mathbb{R}))$ et

$$f : \left| \begin{array}{l} M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto AM + MA \end{array} \right.$$

Donc d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(M_3(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

or $\dim(M_3(\mathbb{R})) = 9$

Donc, on a $\underline{\mathrm{rg}(f) = 9 - 3 = 6.}$

Exercice 2:

1)a) En utilisant un critère de comparaison

b) On a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

Donc, $I_0 = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$.

Soit $A > 0$, on a $\int_0^A e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^A$
$= -e^{-A} + 1$.

or, $\lim_{A \to +\infty} (-A) = -\infty$ et $\lim_{-\infty} \exp = 0$

Donc, par composition, on a

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-A} = 0$$

Donc, par produit, puis somme, on a

$$\lim_{A \to +\infty} \left(1 - e^{-A}\right) = 1$$

Donc, $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-t}\,dt$ existe et, est finie de valeur 1.

Donc, $J_0 = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}\,dt$

$= 1.$

On a $I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt.$

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, T, P)
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

Donc, par théorème X possède une espérance de valeur $\frac{1}{1}$ donc 1.

De plus, $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$ est une densité de X.

Donc, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t}\,dt = 1$. donc $\int_0^{+\infty} te^{-t} = 1$.

Donc, $\boxed{I_{\infty} = 1}$

2) $\forall t \in [0;+\infty[$, $\frac{1}{1+xt} \leq t^n$.

Donc,
$\forall t \in [0;+\infty[$, $\frac{1}{1+xt} e^{-t} \leq t^n e^{-t}$.

De plus, $x \geqslant 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(t) \geqslant 0$

Donc, $\forall t \in [0;+\infty[$, $\begin{cases} \frac{1}{1+xt} e^{-t} \geqslant 0 \\ t^n e^{-t} \geqslant 0 \end{cases}$

Or, d'après 1)a) $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente

Donc, d'après un critère de comparaison (par inégalité)
on a donc.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \text{ est convergente}}$$

3) On a $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+0t} dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1} dt$

$= \int_0^{+\infty} e^{-t}$.

$\boxed{= I_0 = 1.}$

Numéro d'inscription	5 0 1 5 0 9
Né(e) le	2 9 / 0 6 / 2 0 0 5
Nom	M O O G T E R P
Prénom (s)	L O U I S

Signature

19.57 / 20

Écricome Épreuve : Maths

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 11

Numéro de table 15

1) On a par hypothèse

$$x \leq y.$$

Donc

$\forall t \geq 0, \quad xt \leq yt.$

$\forall t \geq 0 \quad 1 + xt \leq 1 + yt.$

Donc, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} 1+xt > 0 \\ 1+yt > 0 \end{cases}$

$\forall t \geq 0,$

$$\frac{1}{1+xt} \geq \frac{1}{1+yt}.$$

Donc, par positivité de exp, on a :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{e^{-t}}{1+xt} \geq \frac{e^{-t}}{1+yt}$$

Donc, par croissance de l'intégration (les fonctions mises en jeu sont continues, les bornes sont rangées dans l'ordre croissant et $\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+ut} dt$ converge, (question 2)) donc les intégrales mises en jeu sont convergentes)

On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt} dt \text{ Donc, } \boxed{F(x) \geq F(y)}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

5) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$

<u>1er cas</u> : $x > 0$ $\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \left[\frac{1}{x} \ln(1+xt) \right]_0^1$

$= \frac{1}{x} \ln(1+x) - \frac{1}{x} \ln(1+x \times 0)$

$= \frac{1}{x} \ln(1+x) - \frac{1}{x} \ln(1)$

$= \frac{1}{x} \ln(1+x)$

<u>2nde cas</u> : $x = 0$

Donc, $\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+0 \times t} dt$

$= \int_0^1 1 \, dt$.

$= [t]_0^1$

$= 1 - 0$

$= 1$.

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln(1+xt) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

6) Soit $x \in \mathbb{R}_+$,
On a

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leq t \leq 1.$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \geq -t \geq -1.$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 \geq e^{-t} \geq e^{-1}.$$
(1)

(1) Par stricte ~~cr~~ croissance de exp sur $\mathbb{R}$.
Or $e^{-1} \geq 0$ (par positivité de exp)

Donc, par transitivité, on a

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leq e^{-t} \leq 1.$$

Or, On a montré que $\forall t \in [0,1]$, $1+xt \neq 0$.
et $1+xt \geq 0$

Donc, on en déduit que

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{0}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}.$$

Donc, par absorbance de 0 dans $\mathbb{R}$, on a

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}.$$

Ainsi, par croissance de l'intégration (les fonctions sont continues sur $[0,1]$ d'après 5)a) et 2) et les bornes sont rangées dans l'ordre croissant $(0 \leq 1)$) on a :

$$\int_0^1 0\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt.$$

Donc, on a

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt}$$

et ce pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

c) On a $x > 0$
Donc, $\forall t \geq 1, \quad 1+xt \neq 0$

De plus,
$$\forall t \geq 1, \quad 1+xt \geq x \geq 0$$

Donc, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\forall t \geq 1, \quad \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$$

Donc, par positivité de exp, on a

$$\forall t \geq 1, \quad \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{x}.$$

Donc, par croissance de l'intégration (les intégrales mises en jeu convergent d'après 2) et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,dt$ converge en tant que combinaison linéaire

d'une intégrale convergente d'après le calcul de I_0 en 1)a) et les bornes sont rangées dans l'ordre croissant)
On a

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}$$

Numéro d'inscription 501509

Né(e) le 29/06/2005

Signature

Nom HOOGTERP

Prénom (s) LOUIS

19.57 / 20

Écricome Épreuve : Maths

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 11

Numéro de table 19

Donc, par linéarité

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$ et ce pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

5)c)
Soit $x>0$, on a par somme membres à membres des inégalités obtenues en 5)b) et 5)c)

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt + \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt.$$

Donc, par Charles, on a :

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt + \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt.$$

Ainsi d'après les résultats obtenus en ~~1)a) (calcul de I0) et~~ 5)a), on a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{1}{x}\ln(1+x) \quad \text{car } x>0.$$

et soit $A>0$, $\frac{1}{x}\int_1^A e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\left[-e^{-t}\right]_1^A = \frac{1}{x}\left(-e^{-A}+e^{-1}\right).$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

or d'après un calcul effectué en 7)a), on a

$$-e^{-A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$$

Donc, on a $\frac{1}{x}(-e^{-A}+e^{-1}) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{x}e^{-1}$

Donc, on a

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}e^{-1} + \frac{1}{x}\ln(1+x) \quad (*)$$

or, on a $\frac{1}{x}\ln(x(1+\frac{1}{x})) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$

Par croissances comparées, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

et $\lim_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{x}) = \ln(1) = 0$

Donc, par produit, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} = 0$

De plus, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}e^{-1} = 0$

Donc, par somme, on a $\frac{1}{x}e^{-1} + \frac{1}{x}\ln(1+x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Or, $0 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Donc, en vertu de (*) et de ce qui précède, d'après le théorème d'encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}$$

6)a) On a

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt)\,dt.$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1 - 1+xt)}{1+xt}\,dt.$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}xt}{1+xt}\,dt.$$

On admet.

7)~~b~~)

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} + x\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt.$$

$$= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} + x\,te^{-t}\,dt$$

$$= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1+xt)\,dt.$$

$$\underset{(1)}{=} x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

(2) D'apr 1|a)

Or, $x^2 I_2 = x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,d$

$$= \int_0^{+\infty} x^2t^2e^{-t}\,dt.$$

Or, on a clairement (d'après un raisonnement analogue mené en 5)c)

$$\forall t>0, \frac{x^2t^2e^{-t}}{1+xt} \leq x^2t^2e^{-t}.$$

Donc, on conclue, par croissance de l'intégration que ($\int_0^{+\infty} x^2 t^2 e^{-t} dt$ est convergente en tant que combinaison linéaire de telles intégrales (I_2 est convergente d'après 1)a)) :

$$\boxed{0 \leq f(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2}$$

7)a) On a

$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2$

Donc, $\forall x \geq 0, -xI_1 \leq F(x) - I_0 \leq x^2 I_2 - xI_1$.

Or, $I_0 = 1$ d'après 1)b).

Donc,

$$\forall x \geq 0, -xI_1 \leq F(x) - 1 \leq x^2 I_2 - xI_1.$$

Donc,

$$\forall x > 0, I_1 \geq \frac{F(x)-1}{-x} \geq \frac{x^2 I_2 - xI_1}{-x}. \quad (*)$$

Or, $\forall x > 0, \frac{x^2 I_2 - xI_1}{-x} = -xI_2 + I_1$

$= -x\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt + I_1$

Or, d'après 1)a), on a que $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ converge

Donc on dispose de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = a$

Numéro d'inscription 56-508

Né(e) le 29/06/2005

Nom MOOGTERP

Prénom (s) LOUIS

Signature

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/11

Numéro de table 15

Ainsi, on a

$$-x\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt + I_1 = -xa + I_1 \underset{(1)}{=} -xa + 1.$$

(1) D'après 1)b).

Or, $-xa \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Donc, par somme, on a

$$-xa + 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Et $1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Donc, d'après (*) et par théorème d'encadrement, on a que

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-1}{-x} = 1.$$

Donc, par théorème, on a

$$F(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -x$$

Donc, par théorème, on a :

$$F(x)-1 \underset{x\to 0}{=} -x + o(-x).$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

Don, $F(x) \underset{x \to 0}{=} 1 \cdot x + o(-x)$

Or $-1 \neq 0$
Donc, par théorème, on a

$$\boxed{F(x) \underset{x \to 0}{=} 1 \cdot x + o(x)}$$

6) D'après la question précédente, on a montré que

$$F(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -x$$

Don,

$$\lim \frac{F(x) - 1}{-x} \underset{x \to 0}{=} 1$$

Or, $F(0) = 1$ d'après 3.

Don, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{-x} = 1.$$

Donc,

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = -1 \quad (*)$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de F en 0.

Donc, d'après (*), on a que F est dérivable en 0 et

$$\boxed{F'(0) = -1.}$$

Exercice 3 :

1) Soit $i \in [\![1, n]\!]$,

(i) On a par définition de f_i, f_i est une fonction de la variable réelle à valeurs réelles.

(ii) On a que f_i est continue sur $]-\infty, 1[$ en tant que fonction identiquement nulle.

De même, $\forall x \geq 1$, $x^{i+1} \neq 0$

Or, $x \mapsto i$ et $x \mapsto x^{i+1}$ sont continues sur $]1, +\infty[$ (fonctions polynomiales).

Donc, f_i est continue sur $]1, +\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

Donc, f_i est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

(iii) On a $i \in [\![1, n]\!]$

Donc, $i \geq 0$

et $\forall x \geq 1$, $x^{i+1} \geq 0$

Donc, $\forall x \geq 1$, $f_i(x) \geq 0$

De même, $\forall x \leq 1$, $f_i(x) = 0$ or $0 \geq 0$.

Donc,

$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_i(x) \geq 0.$

(iV) Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx$ converge de valeur 1.

On a f_i est identiquement nulle sur $]-\infty, 1[$

Donc, $\int_{-\infty}^{1} f_i(x)\,dx$ converge de valeur 0

Soit $A > 1$,

$$\int_1^A f_i(x)\,dx = \int_1^A \frac{i}{x^{i+1}}\,dx$$

$$= i \int_1^A \frac{1}{x^{i+1}}\,dx$$

$$= i \int_1^A x^{-i-1}\,dx$$

$$= i \left[\frac{x^{-i}}{-i} \right]_1^A$$

$$= i \left(\frac{A^{-i}}{-i} + \frac{1^{-i}}{i} \right)$$

$$= -A^{-i} + 1.$$

$$= -\frac{1}{A^i} + 1.$$

~~Or $A > 1$~~

~~Donc, $\frac{1}{A} < 1$~~

~~et $A > 0$~~

Numéro d'inscription 501509

Né(e) le 29/06/2005

Nom HOOGTERP

Prénom (s) LOUIS

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet [x] 1 ou [ ] 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/11

Numéro de table 15

~~Or, $\left|\frac{1}{A}\right| < 1$.~~

~~Or, par théorème, $\frac{1}{A}$~~

Or, $A^i \xrightarrow[A \to +\infty]{} +\infty$ (car $i > 1$)

Or, par passage à la limite, puis par produit, puis somme, on

$$\int_1^{+\infty} f_i(x)\,dx = 1$$

Donc, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx = 1$.

Or, en vertu des 4 points précédents, f_i est une densité de probabilité et ce pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

2/a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$,

On a d'après 1) f_i est une densité de X_i.

Donc,

X_i possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_i(t)dt$ converge absolument

si et seulement si (1) $\int_{1}^{+\infty} t f_i(t)dt$ converge absolument

si et seulement si (2) $\int_{1}^{+\infty} t f_i(t)dt$ converge.

(1) f_i est identiquement nulle sur $]-\infty, 1[$.

(2) Par positivité de f_i et de $t \mapsto t$ sur $[1,+\infty[$.

Or, $\forall t \geq 1$, $t f_i(t) = t \times \frac{i}{t^{i+1}}$

$= \frac{i}{t^i}$

On reconnait une série de riemann de paramètre i à une constante multiplicative près (i) qui converge si et seulement si $i > 1$.

Or, $i \in [\![1,n]\!]$.

Donc, $\int_{1}^{+\infty} t f_i(t)dt$ converge si et seulement si $i \in [\![2,n]\!]$

Donc, X_i possède une espérance si et seulement si $i \in [\![2,n]\!]$.

et $E(X_i) = \int_1^{+\infty} \frac{i}{t^i}\, dt$.

$= i \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^i}\, dt$.

$= i \int_1^{+\infty} t^{-i}\, dt$.

Soit $A > 1$,

$$i \int_1^{A} t^{-i}\, dt = i \left[\frac{t^{-i+1}}{-i+1} \right]_1^A$$

$$= i \left(\frac{A^{-i+1}}{-i+1} - \frac{1^{-i+1}}{-i+1} \right).$$

$$= i \left(\frac{A^{1-i}}{1-i} + \frac{1}{i-1} \right).$$

Or, $1 - i < 0$ car $i \in [\![2, n]\!]$.

Donc, $\frac{A^{1-i}}{1-i} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$

Donc, par somme, puis produit, on a

$$\lim_{A \to +\infty} i \int_1^{A} t^{-i}\, dt = \frac{i}{i-1}$$

Donc, $\boxed{\forall i \in [\![2, n]\!],\ E(X_i) = \frac{i}{i-1}}$

6) D'après la question précédente, on a

$\forall i \in [\![2, n]\!]$, $E(X_i) = \dfrac{i}{i-1}$

$= \dfrac{i}{i(1-\frac{1}{i})}$

$= \dfrac{1}{1-\frac{1}{i}}$.

Or, $\lim\limits_{i \to +\infty} \dfrac{1}{1-\frac{1}{i}} = 1$ et $\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{i}}\right)_{i \in [\![2, n]\!]}$ est

une suite croissante.

Donc, en moyenne, le revenu des catégories socioprofessionnelles est corrélée à la valeur que prend i et le classement se fait dans l'ordre croissant.

En moyenne, la catégorie i gagne moins que la catégorie i+1 et ce pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$.

4) D'après 1), f_i est une densité de X_i et ce pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Donc, par théorème, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{x} f_i(t)dt$ converge de valeur $F_{X_i}(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

Numéro d'inscription 501509

Né(e) le 29/06/2005

Signature

Nom MOOGTERP

Prénom (s) LOOIS

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☒1 ou ☐2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09/11

Numéro de table 15

1er cas : $x \leq 1$

Alors, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{x} 0\,dt.$$

$$= 0.$$

2ème cas $x \geq 1$.

Alors, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,dt.$

$$\underset{(c)}{=} \int_{1}^{x} f_i(t)\,dt.$$

$$= \int_{1}^{x} \frac{i}{t^{i+1}}\,dt$$

$$= i\int_{1}^{x} \frac{1}{t^{i+1}}\,dt$$

$$= i\int_{1}^{x} t^{-i-1}\,dt.$$

$$= i\left[\frac{t^{-i}}{-i}\right]_{1}^{x}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

Donc, $F(x) = i\left(\frac{x^{-i}}{-i} + \frac{1^{-i}}{i}\right)$

$= i\left(\frac{x^{-i}}{-i} + \frac{1}{i}\right)$

$= 1 - x^{-i}$.

$= 1 - \frac{1}{x^i}$.

(1) D'après la relation de Chasles.

Donc,

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$$

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$F_{V_i}(x) = \mathbb{P}(V_i \leq x)$

$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right)$.

$= \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbb{P}\left(\frac{1}{U} \leq x^i\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$ (U positif presque sûrement car à valeurs dans]0,1[) (Stricte croissance de $t \mapsto t^i$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0. \\ \mathbb{P}(U \geq x^i) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0. \\ 1 - \mathbb{P}(U < x^{-i}) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - F_U(x^{-i}) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$ (la loi de Xi est sans atome car Xi est à densité).

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{x^{-i} - 0}{1 - 0} & \text{si } x^{-i} \in]0,1[. \\ 1 - 1 & \text{si } x^{-i} > 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^{-i} & \text{si } x^{-i} \in]0,1[. \\ 0 & \text{si } x^{-i} > 1. \end{cases}$$

Or, $x^{-i} \in]0,1[\iff x^{-i} \leq 1$

$\iff -i \ln(x) \leq 0.$ (stricte crois. de la fct $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff \ln(x) \geq 0$ ($i \in [\![1,n]\!]$ donc $-i \leq 0$).

$\iff x \geq 1.$

Donc, on en déduit que :

$$F_{V_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Donc, Vi a la même fonction de répartition que Xi

Or, la fonction de répartition caractérise la loi

Donc, Vi et Xi ont la même loi et ce pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

6) On a que V_i et U_i suivent la même loi d'après la question précédente et ce pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $V_i = \frac{1}{U^{1/i}}$ et $U \hookrightarrow U(]0, 1[)$
On propose alors le script suivant.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simulX(i):
    return (1/(rd.random()) ** (1/i))
```

5)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd.
def simulY(n,p):
    S=0
    for i in range(n-1):
        if rd.random <= p:
            S+=1
    return S+1
```

Numéro d'inscription 501509

Né(e) le 29/06/2005

Nom HOOGTEPP

Prénom (s) LOUIS

19.57 / 20

ecricome Épreuve : Maths

Sujet [x] 1 ou [ ] 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10/11

Numéro de table 15

6)

```
def loiY(n, p):
    N = 10000
    loi = [0] * n
    for k in range (n):
        y = simulY(n, p):
        loi[k] = Y/N
    return loi .
```

7)

```
import matplotlib.pyplot as plt.
LX = range (1, n)
LY = loi (n, p)
plt.bar (LX, LY)
plt.show().
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

8) a) Une clé primaire dans une base de donnée est un attribut qui permet de classer chaque enregistrement d'une base de donnée car chacun de ces enregistrements à une valeur différente dans la case qui coincide avec la clé primaire

b) Pour la table | individu : i_insee
département : d_nom
profession : p_intitule

d)
```
SELECT
  distinct i_code_profession
FROM
  individu
WHERE
  i_departement = 28
```

e)

```
SELECT
    profession.p_categorie
    Individu.i_innee
FROM
    individu
INNER JOIN
    Profession
ON
    i_codeprofession = p_pcs.
```

g)

$\forall x \leq 1$

11) On a G_n la fonction de répartition de Z_n et ce pour tout n.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 1$, $G_n(x) = \dfrac{1 - (p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n}$

Or,

$x \longmapsto \dfrac{1 - (p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n}$ est $\mathcal{C}^1$ sur

$[1, +\infty[$ en tant que quotient de deux telles fonctions et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$.

Donc, G_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$

D'autre part, G_n est identiquement nulle sur $]-\infty, 1[$

Donc, G_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 1.

En montrant que G_n est continue en 1,
ou même que

G_n est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf
éventuellement en 1.

Donc, par théorème, Z_n est à densité et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

12.

```
def sondage(n, p):
    i = simulY(n, p)
    return simulX(i)
```

13) a)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) \underset{(1)}{=} \begin{cases} 1 - \dfrac{\left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x\right)^{n-1}}{x^n} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

(1) D'après 10) c)

$= \begin{cases} 1 - \dfrac{\left(\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x\right)^{n-1}}{x^n} \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 - \dfrac{\left(\frac{xn - x + 1}{n}\right)^{n-1}}{x^n} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Numéro d'inscription 501409

Né(e) le 29/05/2006

Signature [signature]

Nom WOOGTERP

Prénom (s) LOUIS

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Math

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 11 / 11

Numéro de table 15

$= \Big\{ 1 -$

6) On a $\cancel{\lim_{n \to +\infty}}\ 1 - \frac{1}{x} e^{(n-1)\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)}$

$\underset{n \to +\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{x} e^{(n-1)\left(\frac{x-1}{nx}\right)}$

$\underset{n \to +\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{x} e^{n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x-1}{nx}}$

$\underset{n \to +\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{x} e^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x-1}{x}}$

$\underset{n \to +\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{x} e^{\frac{x-1}{x}}$

~~Donc, la variable aléatoire~~ et $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc, $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire de fonction de répartition

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} e^{\frac{x-1}{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20