

Copie anonyme - n°anonymat : 985823



A4-00156
985823
Mat Appli

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées Em Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1-a) Pour $n=0$

$$u_0 = 1 > 0$$

donc vrai dans ce cas-là.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n > 0$

$$\text{On a } u_{n+1} = u_n e^{\frac{1}{n}} > 0 \quad \text{car } u_n > 0 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

et $\frac{1}{n} > 0$
donc $e^{\frac{1}{n}} > 0$ car $x \mapsto e^x$ est

d'où on en déduit par récurrence

que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

strictement
croissante

$$\begin{aligned} \text{b.) } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= u_n e^{\frac{1}{n}} - u_n \\ &= u_n (e^{\frac{1}{n}} - 1) \quad \text{car } u_n > 0 \text{ d'après 1-a)} \\ &\quad \text{et } \frac{1}{n} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } e^1 > e^{\frac{1}{n}} > e^0 = 1, \text{ car } x \mapsto e^x \text{ est strictement croissante}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{donc } e^{\frac{1}{n}} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$$

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\text{donc } u_{n+1} > u_n$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

c-) On suppose que $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

On a d'après 1-b, $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $l_0 = 1$ donc la limite L de l_n serait telle que $L > 1$.

$$\text{et on a } \forall n \in \mathbb{N}, l_{n+1} = l_n e^{1/n}$$

$$\text{donc } L = L e^{1/L} \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} l_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n e^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$$

$$L = L e^{1/L} \quad (\Leftrightarrow) \quad e^{1/L} = 1 \quad \text{car } L > 1$$

$$\text{donc } e^{1/L} = e^0$$

$$\text{donc } \frac{1}{L} = 0 \quad \text{donc } L = 0 \quad \text{ce qui est absurde car } L > 1.$$

donc on en déduit en raisonnant par l'absurde que $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, donc elle admet $+\infty$ comme limite.

```
2-) import numpy as np
u = 1
n = 0
while u < 10**6 :
    u = u * np.exp(1/u)
    n = n + 1
print(n)
```

Partie B

$$3-) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \times e^u \quad \text{avec } u = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u}{u} = +\infty \quad \text{car } \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{1/x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} e^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty \text{ par croissance comparée}$$

4-) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables

$$\text{et } \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 1 \cdot x e^{1/x} + x \cdot \frac{-1}{x^2} e^{1/x} \\ = e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x} \\ = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

et $\forall x \in]0; +\infty[, e^{1/x} > 0$
 et $1 - \frac{1}{x} \geq 0$
 $(\Rightarrow) 1 > \frac{1}{x}$
 $(\Rightarrow) 1 < x$, car $x \rightarrow \frac{1}{x}$ décroissante sur \mathbb{R}^{+*}

donc on a

x	0	1	$+\infty$
$e^{1/x}$			+
$1 - \frac{1}{x}$		-	+
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	e	$+\infty$

5-) a-) $\sum_{h \geq 0} \frac{x^{-h}}{h!} = \sum_{h \geq 0} \frac{(1/x)^h}{h!} = \frac{1}{x} = \sum_{h \geq 0} \frac{(1/x)^h}{h!}$

On reconnaît une somme de référence donc convergence et on a $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(1/x)^h}{h!} = e^{1/x}$

b-) On a $f(x) = x \cdot e^{1/x} = x \cdot \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(1/x)^h}{h!} \\ = x \cdot \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{x^{-h}}{h!} = x \cdot \frac{1}{x} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{x^{1-h}}{h!}$

donc

$$f(x) = x \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}$$

$$= x \cdot \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} + 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= x + 1 + x \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}$$

$$= x + 1 + \frac{1}{x^2} \cdot x \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

$$\text{d'où } \underline{f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}}$$

6-a) - le premier terme de la série $\sum_{k \geq 2} \frac{x^{2-k}}{k!}$ est égal à

$$\frac{1}{2} = \frac{x^{2-2}}{2!}$$

or $\sum_{k \geq 2} \frac{x^{2-k}}{k!}$ est croissante en tant que somme de termes positifs

d'où

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

$$\bullet \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^1 \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e$$

or

$$\text{d'où } \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq e$$

$$\text{d'où } \underline{\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e}$$

b-) donc d'après 6-a on a.

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x} \quad \text{car } x > 0$$

donc $\frac{1}{x} > 0$

$$\text{or } f(x) - (x+1) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} - (x+1)$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

$$\text{d'où on a } \underline{\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}} \quad (*)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 985823

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées Em Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite exercice 1

7.)

en a d'après 6-b.)

$\forall x > 1,$

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}$$

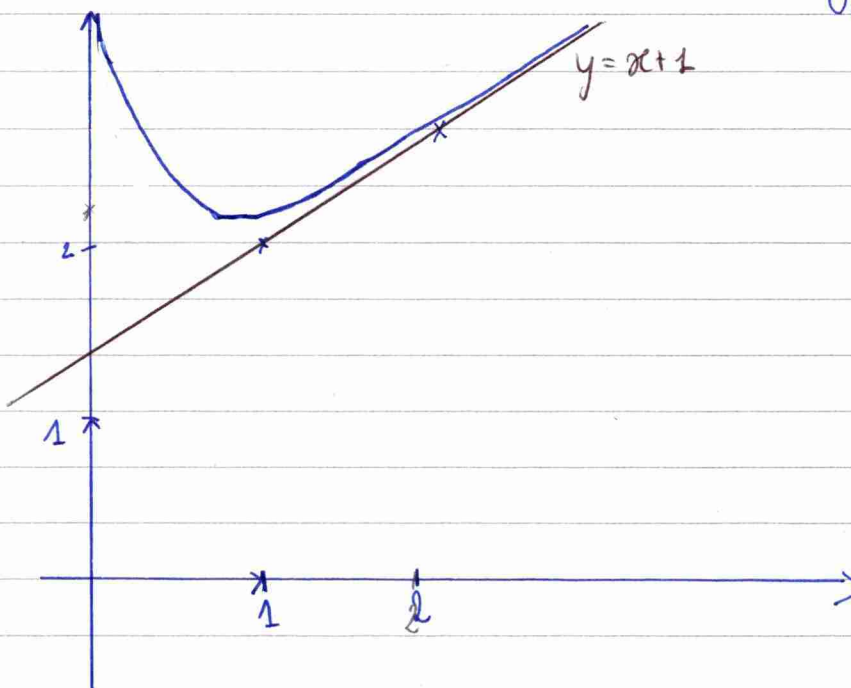
$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e/x}{1} = 0$$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - (x+1)}{1} = 0$ d'après le théorème par encadrement

donc on a $f(x) - (x+1) = o(1)$

donc $f(x) = x+1 + o(1)$ au voisinage de $+\infty$

8.)



On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Partie C

9-a) $\forall h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \ln(u_{h+1}) - \ln(u_h) &= \ln\left(\frac{u_{h+1}}{u_h}\right) \\ &= \ln\left(\frac{u_h e^{1/u_h}}{u_h}\right) \\ &= \ln(e^{1/u_h}) \\ &= \frac{1}{u_h} \end{aligned}$$

on a bien $\forall h \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{h+1}) - \ln(u_h) = \frac{1}{u_h}$

b-) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

on a par sommation de 9-a,

$$\sum_{h=0}^{n-1} \ln(u_{h+1}) - \ln(u_h) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{u_h}$$

$$\sum_{h=0}^{n-1} \ln(u_{h+1}) - \sum_{h=0}^{n-1} \ln(u_h) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{u_h}$$

$$\sum_{h=1}^n \ln(u_h) - \sum_{h=0}^{n-1} \ln(u_h) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{u_h}$$

$$\ln(u_n) - \ln(u_0) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{u_h}, \text{ par télescopage}$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{u_h} \text{ car } u_0 = 1$$

10-a-) On a $\forall h \in \mathbb{N}$, $u_{h+1} = f(u_h)$, car $u_h > 0$

d'après (*) on a

$$\frac{1}{2u_h} \leq f(u_h) - (u_h + 1) \leq \frac{e}{u_h}$$

$$\text{d'où } \forall h \in \mathbb{N}, 1 + \frac{1}{2u_h} \leq u_{h+1} - u_h \leq \frac{e}{u_h} + 1$$

b-) par sommation on a

$$\sum_{k=0}^{n-2} 1 + \frac{1}{2^{k+1}} \leq \sum_{k=0}^{n-2} (2^{k+1} - 2^k) \leq \sum_{k=0}^{n-2} 1 + \frac{e}{2^k}$$

$$1 \times (n-1+1) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=0}^{n-2} 2^k \quad (1 \times (n-1+1)) + e \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k}$$

$$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} \leq 2^n - 2^0 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} \quad \text{par télescopage}$$

d'où $n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} \leq 2^n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k}$

donc on a d'après 9.b

$$n + \frac{1}{2} \times \ln(2^n) \leq 2^n - 1 \leq n + e \times \ln(2^n)$$

donc $n + 1 + \frac{1}{2} \times \ln(U_n) \leq 2^n \leq n + 1 + e \ln(U_n)$

donc $n + \frac{1}{2} \times \ln(U_n) \leq 2^n - n \leq 1 + e \ln(U_n)$

11-a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2^n)}{2^n} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0$ par croissance comparée car d'après 1.c
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

b-) On a d'après 11-a-) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(U_n)}{2^n} = 0$
 et d'après 10.b

$$1 + \frac{1}{2} \ln(U_n) \leq 2^n - n \leq 1 + e \ln(U_n)$$

donc $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \frac{\ln(U_n)}{2^n} \leq 1 - \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} + e \frac{\ln(U_n)}{2^n}$

d'où $1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \frac{\ln(U_n)}{2^n} \leq \frac{2^n}{2^n} \leq 1 - \frac{1}{2^n} - e \frac{\ln(U_n)}{2^n}$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \frac{\ln(U_n)}{2^n} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2^n} - e \frac{\ln(U_n)}{2^n}$

d'où par encadrement on a $2^n \sim n$

12-)

$$\frac{1}{2^n} \sim \frac{1}{n} \quad \text{car } 2^n \sim n \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \sim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Exercice 2
Partie A

1-) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,$
 $aI + bJ + cK = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 0 \end{cases}$$

donc la famille est libre et génératrice car on a $E = \text{vect}(I, J, K)$

donc (I, J, K) est bien une base de E

et donc E est de dimension 3.

2.) J et K sont diagonalisables en tant que matrices symétriques

3.) a-)

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{2J}$$

b-) On a donc d'après 3-a.)

$$J^3 = 2J$$

donc $x^3 - 2x$ est un polynôme annulateur de J

$$\text{et } x^3 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x^2 - 2 = 0$$

$$\text{donc } x^2 = 2$$

$$\text{donc } x = \sqrt{2} \text{ ou } -\sqrt{2}$$

$$\text{d'où } \text{sp}(J) \subset \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 985823

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de :

Mathématiques appliquées Emlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4-a.)

$$\bullet J\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \mathbf{U}_2 \quad \text{et } \mathbf{U}_1 \neq 0$$

donc \mathbf{M}_2 est bien vecteur propre de J associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

$$\bullet J\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = 0 \mathbf{M}_2 \quad \text{et } \mathbf{M}_2 \neq 0$$

donc \mathbf{M}_2 est bien vecteur propre de J associé à la valeur propre 0.

b.)

on pose $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ des réels

et $J\mathbf{M}_3 = -\sqrt{2} \mathbf{U}_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -\sqrt{2}a \\ a = -\sqrt{2}b \\ a = -\sqrt{2}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c + \sqrt{2}a = 0 \\ a + \sqrt{2}b = 0 \\ a + \sqrt{2}c = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a + b + c = 0 \\ b = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a + 2b = 0 \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a = -2b \\ b = c \\ a = -\frac{2}{\sqrt{2}}b \end{cases}$$

09/20

donc $u_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

5-a-) (u_1, u_2, u_3) est une famille de vecteurs propres de J donc par concaténation des 3 vecteurs propres non nuls (libres) de J on obtient une famille libre de dimension 3 donc une base de \mathbb{R}^3 .

b-) D'après la formule de changement de base on a

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
 telle que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

6-a-)

• $Ku_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot u_1$ et $u_1 \neq 0$

donc u_1 vecteur propre de K associé à la valeur propre 1.

• $Ku_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot u_2$ et $u_2 \neq 0$

donc u_2 est le vecteur propre de K associé à la valeur propre -1.

• $Ku_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot u_3$ et $u_3 \neq 0$

donc u_3 est le second vecteur propre associé à la valeur propre 1.

6-b.) d'après la formule de changement de base on a
alors

$$P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) a.)

$$P^{-1}\Pi P = P^{-1}(aI + bJ + cK)P$$

$$= aP^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + \sqrt{2}b + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a - \sqrt{2}b + c \end{pmatrix}, a, b, c \text{ des réels}$$

b-) les valeurs propres de Π sont alors :

$$\{a + \sqrt{2}b + c; a - c; a - \sqrt{2}b + c\}$$

8-)

a.)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

b-) On a $\text{rg}(S) = 3$ donc 0 n'est pas valeur propre

donc $\ker(S) = \{0\}$ et $\dim E = \dim \mathbb{R}^3$

donc S est injective (\Rightarrow) S est bijective

Partie B

9-)

```
def voisins (A, i):  
    n = len(A[i])  
    v = []  
    for j in range(n):  
        if j != i and A[i][j] == 1:  
            v.append(j)  
    return v
```

10-)

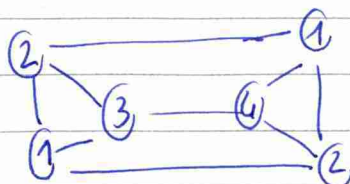
```
def min_ext(L):  
    m = 0  
    while (m in L) == True:  
        m = m + 1  
    return m
```

11-)

```
def coloration(A):  
    n = len(A[0])  
    C = [h for h in range(0, n)]  
    for i in range(1, n):  
        C_voisins = [voisins(A, i) for j in C]  
        C[i] = min_ext(C_voisins)  
    return C
```

12-) a-) $C = [C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5]$
avec $C_0 = C_2$, $C_3 = C_1$

b-) le graphe admet une coloration à 4 couleurs. telles que:



donc G n'admet pas une coloration à 3 couleurs.

Copie anonyme - n°anonymat : 985823

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées Emlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3

Partie A.

1-a) si $U(U) =]0, 1[$ alors $\sqrt{U}(U) =]0, 1[$

et alors $\frac{1}{\sqrt{U}}(U) = [1, +\infty[$

b) on a $V(U) = [1, +\infty[$

donc si $x < 1$, $F_V(x) = 0$

et si $x > 1$, $F_V(x) = P(V \leq x)$
 $= P\left(\frac{1}{\sqrt{U}} \leq x\right)$

$= P\left(\sqrt{U} \geq \frac{1}{x}\right)$ car $u \mapsto \frac{1}{u}$ est décroissante sur \mathbb{R}^+

$= P\left(U \geq \frac{1}{x^2}\right)$

$= 1 - P\left(U < \frac{1}{x^2}\right)$

$= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car U à densité

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$= 1 - \frac{1}{x^2}$, car $U \subset]0, 1[$

(c) • F_V est e^+ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant que somme et composé de fractions e^{\pm}

• donc F_V est e^0 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

et en 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_V(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} F_V(x) = F_V(1)$

13/20

donc F_V est bien une fonction de répartition d'une variable aléatoire
 V et donc par dérivation et prolongement arbitraire on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2-) \int_{-\infty}^{+\infty} x f_V(x) dx &= \int_{-\infty}^1 x \cdot 0 dx + \int_1^{+\infty} x \cdot \left(\frac{2}{x^3} \right) dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx \end{aligned}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge
 (Riemann $\alpha > 1$)

donc $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$ converge.

et donc V admet une espérance

$$\begin{aligned} \text{et } 2 \int_1^A x^{-2} dx &= 2 \cdot \left[-\frac{x^{-1}}{1} \right]_1^A \\ &= 2 \cdot \left(-A^{-1} + 1 \right) \\ &= 2 - \frac{1}{A} \xrightarrow{+\infty} 2 \end{aligned}$$

donc $E(V) = 2$

$$\begin{aligned} \text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_V(x) dx &= \int_1^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2}{x^3} dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{2}{x} dx \end{aligned}$$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge (Riemann $\alpha \leq 1$)

donc V n'admet pas de variance.

Partie B

$$3-a-) \forall n > 1, \Gamma_n = \max(V_1, \dots, V_n)$$

$$\forall i > 1, V_i(\Omega) = [-1; +\infty[$$

$$\text{d'éc } \Gamma_n(\Omega) = [-1; +\infty[$$

$$\bullet \text{ si } x < -1, F_n(x) = 0$$

$$\bullet \text{ si } x > -1, F_n(x) = P(\Gamma_n \leq x)$$

$$= P(\max(V_1, \dots, V_n) \leq x)$$

$$= P(V_1 \leq x \wedge \dots \wedge V_n \leq x) \text{ car de même}$$

$$= (P(V_1 \leq x))^n, \text{ car indépendance loi}$$

$$= (F_V(x))^n$$

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ (F_V(x))^n & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\text{d'éc } \underline{F_n = F_V^n}, \text{ (car } 0^n = 0) \text{ pour tout } n > 1.$$

$$3-b-) \bullet \text{ si } x < -1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$$

$$\bullet \text{ si } x > -1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n$$

$$= 0 \text{ car } \left|1 - \frac{1}{x^2}\right| < 1$$

$$\text{d'éc } \underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(-) Si $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ convergerait en loi vers une variable aléatoire alors tendrait vers une fonction de répartition dont la limite vaut 1 lorsque x tend vers $+\infty$ or,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \neq 1$

d'éc $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ ne converge en loi vers aucune

variable aléatoire.

$$G_n(u) = [1; +\infty[\\ \frac{F_n}{\sqrt{n}}(u) = [\frac{1}{\sqrt{n}} ; +\infty[$$

donc si $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $G_n(x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{et si } x > \frac{1}{\sqrt{n}}, G_n(x) &= P\left(\frac{F_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \\ &= P(F_n \leq \sqrt{n}x) \\ &= F_n(\sqrt{n}x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}x)^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

donc $\forall x > 0$, on choisit l'expression : $G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}x)^2}\right)^n$
car pour un n assez grand $x > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}x)^2}\right)^n$$

$$\text{et } \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}x)^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}x)^2}\right)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) &= nx - \frac{1}{nx^2} \quad \text{car } \ln(1-u) \sim -u \\ &= -\frac{1}{x^2} \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^2} = 0\right) \end{aligned}$$

$$\text{donc on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)} = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{pour tout } x > 0$$

b) Donc $\left(\frac{F_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers W .

puisque d'après l-a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = F_W$ pour tout $x > 0$
et $\forall x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = 0 = F_W$.

Copie anonyme - n°anonymat : 985823

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages :	Session : 2025
	Épreuve de : Mathématiques Appliquées Emlyon		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Partie C

5-a) $\text{SELECT montant FROM sinistres WHERE année} = 2024 ;$

b) $\text{SELECT mois, année FROM sinistres WHERE montant} > 1000000 ;$

6-) UPDATE sinistres

Partie D

7-) $\forall n \in \mathbb{N}, P(N=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

8-) $T(N) = \mathbb{N}$, aucun des éléments peut ne pas dépasser 1, ou tous (N éléments) ou $N(N) = \mathbb{N}$

9-a-) La loi conditionnelle de T sachant $(N=n)$ suppose qu'on a $\{V_1, \dots, V_n\}$ donc on va tester n fois * l'expérience selon laquelle si $\forall i \in \{1, \dots, n\} V_i > A$ alors il y a un succès. (de façon indépendantes) Donc n expériences de Bernoulli indépendantes.

et la probabilité du succès est $\frac{1}{A^2}$ car V_i suit la loi de V. et donc $P(V_1 > A) = 1 - P(V_1 \leq A) = 1 - (1 - \frac{1}{A^2}) = \frac{1}{A^2}$

9-b.)

$$P_{(N=n)}(T=h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h > n \\ \binom{n}{h} \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^h \left(1 - \frac{\lambda}{A^2}\right)^{n-h} & \text{si } h \leq n \end{cases}$$

10.) D'après la formule des probabilités totales associées au système d'événement complet $\{[N=n]_{n \in \mathbb{N}}\}$

on a $\forall h \in \mathbb{N}$,

$$P(T=h) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=h \cap N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n) P_{(N=n)}(T=h)$$

$$= \sum_{n=h}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{h} \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^h \left(1 - \frac{\lambda}{A^2}\right)^{n-h} + \sum_{n=0}^{h-1} 0, \text{ d'après 9-b)}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^h e^{-\lambda} \sum_{n=h}^{+\infty} \binom{n}{h} \frac{\lambda^n}{n!} \left(1 - \frac{\lambda}{A^2}\right)^{n-h}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^h e^{-\lambda} \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{n!}{h!(n-h)!} \frac{\lambda^n}{n!} \left(1 - \frac{\lambda}{A^2}\right)^{n-h}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^h \times \frac{1}{h!} \times \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-h)!} \left(1 - \frac{\lambda}{A^2}\right)^{n-h}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^h \times \frac{1}{h!} \times \lambda^h \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-h}}{(n-h)!} \left(1 - \frac{\lambda}{A^2}\right)^{n-h}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^h \times \frac{1}{h!} \times \lambda^h \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \cdot (1 - \frac{\lambda}{A^2}))^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^h \times \frac{1}{h!} \times \lambda^h \times e^{\lambda(1 - \frac{\lambda}{A^2})}$$

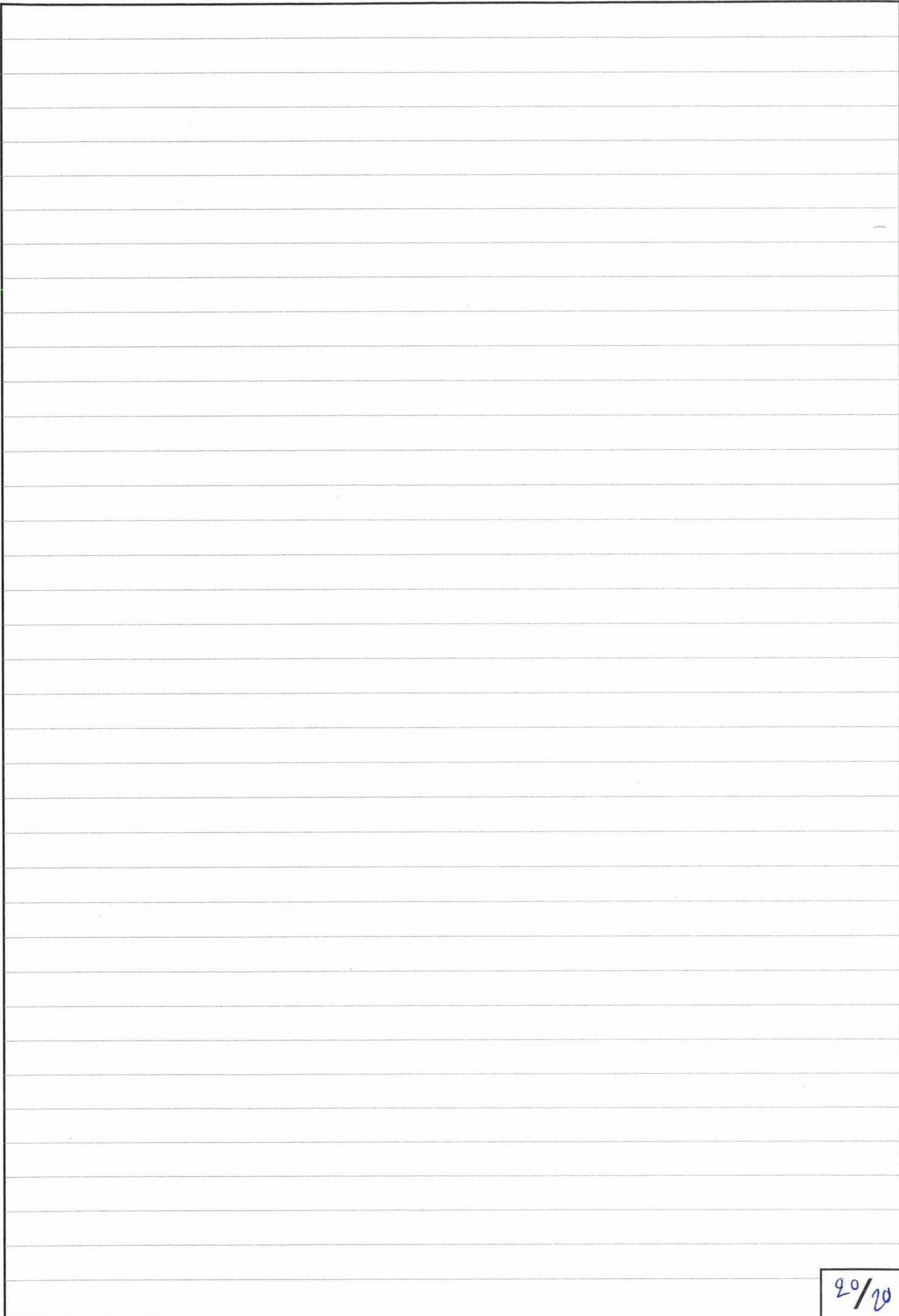
$$= \frac{(\frac{\lambda}{A^2})^h}{h!} \times e^{-\lambda + \lambda - \frac{\lambda^2}{A^2}} = \frac{(\frac{\lambda}{A^2})^h}{h!} \times e^{-\frac{\lambda^2}{A^2}}$$

donc $T \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)$

11.)

$$E(T) = \frac{\lambda}{A^2}$$

donc en moyenne il y aura $\frac{\lambda}{A^2}$ sinistres avec un coût supérieur à A en m. an.



20/20