N1-00150
402375
Mat Appli

Code épreuve : 288 **Nombre de pages :** 17 **Session :** 2025

Épreuve de : mathématiques appliquées ESSEC/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

PARTIE 1

1.

a) Soit M μ-réversible et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $m_{i,j} \neq 0$. $(*)$

Comme M μ-réversible, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{ji}$$

Supposons $m_{j,i} = 0$ pour ce certain couple$^{(*)}$ $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
alors nécessairement $\mu_j m_{j,i} = 0$

Comme M est μ-versible $\mu_i m_{ij} = \mu_j m_{j,i}$
donc $\mu_i m_{ij} = 0$
comme les μ_i $\forall i \in [\![1,n]\!]$ sont strictement positifs
$\Rightarrow m_{ij} = 0$
Or c'est absurde car ~~es~~ couple m_{ij} est non nuls.

Ainsi si M μ-réversible et $m_{ij} \neq 0$ pour un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ alors $m_{ji} \neq 0$.

b) M est symétrique, c'est à dire que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$
$m_{ij} = m_{ji}$

Ainsi comme $M \in ST_n$, il reste à montrer $\mu = (\mu_1, — \mu_n)$ tel $\forall (i,j) \in \mathbb{R}^2$, $\mu_i m_{ij} = \mu_j m_{ji}$ (avec $\sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$)

Soit $\forall (i,j) \in [\![i, j]\!]^2$, $m_{ij} = m_{j,i}$

Ainsi, il faut que les μ_i $\forall i \in [\![1, r]\!]$ soient égaux tq que $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\mu_i = \alpha$.

Ainsi $\alpha m_{ij} = \alpha m_{ji}$

Et donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha = 1$

$\Leftrightarrow \alpha(n+1-1) = 1$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{n}$ $n \geq 2$

Ainsi $\boxed{M \text{ est } \mu\text{-réversible} \Leftrightarrow \mu = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)}$

c) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons M μ-réversible i.e $\cdot M \in ST_n$ (déjà vérifié)

$\cdot \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$ $\mu_i m_{ij} = \mu_j m_{ji}$

Soit $\Delta M = \begin{pmatrix} \mu_1 m_{11} & \mu_1 m_{12} & \dots & \mu_1 m_{1n} \\ \mu_2 m_{21} & \mu_2 m_{22} & & \mu_2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \mu_2 m_{nn} \\ \mu_n m_{n1} & \mu_n m_{n2} & & \end{pmatrix}$

De plus ${}^tM = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \dots & m_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & & m_{nn} \end{pmatrix}$

Ainsi $^tM\Delta = \begin{pmatrix} m_{11}\mu_1 & m_{21}\mu_2 & \cdots & m_{n1}\mu_n \\ m_{12}\mu_1 & m_{22}\mu_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{1,n}\mu_1 & m_{2n}\mu_2 & & m_{nn}\mu_n \end{pmatrix}$

Ainsi comme $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$ $\mu_i m_{ij} = \mu_j m_{ji}$

alors $\Delta M = {}^tM\Delta$

puisque $\Delta M = (\mu_i m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$

et $^tM\Delta = (m_{ji}\mu_j)$ (voir alors l'écriture sous forme matricielle)

Donc $\boxed{M\ \mu\text{-réversible} \Rightarrow \Delta M = {}^tM\Delta}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\Delta M = {}^tM\Delta$.

Comme $M \in ST_n$, on a directement par le fait que $\Delta M = {}^tM\Delta$ que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $(\mu_i m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = (m_{ji}\mu_j)_{1\leq i,j\leq n}$

$\Rightarrow$ donc M est μ-réversible.

donc $\boxed{\Delta M = {}^tM\Delta \Rightarrow M\ \mu\text{-réversible}}$

Ainsi $\boxed{M\ \mu\text{-réversible} \Leftrightarrow \Delta M = {}^tM\Delta}$

2. Soit M μ-réversible tel que $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

Ainsi $\mu = (\mu_1\ \mu_2 \ldots \mu_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$

Donc $\mu M = (d_i)$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mu M \in M_{1,n}(\mathbb{R})$

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot m_{ki}$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_i \cdot m_{ik}$ M μ-réversible

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = \mu_i \sum_{k=1}^{n} m_{ik}$

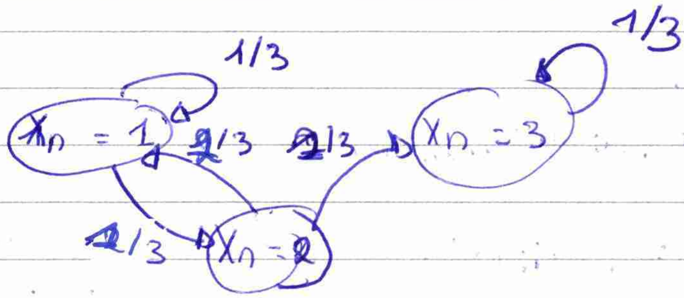
or, comme $M \in ST_n$ (car M μ-réversible), alors
$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ d_i = \mu_i \cdot 1 = \mu_i$

Ainsi $\mu M = (\mu_i)_{1\le i,j\le n}$

Donc $\boxed{M\ \mu\text{-réversible} \Rightarrow \mu M = \mu}$

3. a)



b) P est μ-réversible $\Leftrightarrow$ $P \in ST_n$ et $\Delta P = {}^tP\Delta$

• $P \in ST_n$ car P est une matrice de transition donc $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$. ici $n=3$.

· Ainsi trouvons $\mu = (\mu_1, \mu_2; \mu_3)$ tel que $\Delta P = {}^tP\Delta$ avec

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\Delta P = {}^tP\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & 2\mu_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 2\mu_2 \\ 0 & 2\mu_3 & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ 2\mu_1 & 0 & 2\mu_3 \\ 0 & 2\mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 402375

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 17	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées ESSEC/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = \mu_1 \\ 2\mu_1 = \mu_2 \\ \mu_2 = 2\mu_1 \\ 2\mu_2 = 2\mu_3 \\ 2\mu_3 = 2\mu_2 \\ \mu_3 = \mu_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_2 = \mu_3 \\ 2\mu_1 = \mu_3 \\ \mu_3 \in \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$$

Ainsi $\mu = (2\mu_3, \mu_3, \mu_3)$ $\mu \geq 0$.

Or $\sum_{i=1}^{3} \mu_i = 1$, donc $2\mu_3 + \mu_3 + \mu_3 = 1$

$\Leftrightarrow 4\mu_3 = 1$

$\Leftrightarrow \mu_3 = \frac{1}{4}$

$$\boxed{P\ \mu\text{-réversible} \Leftrightarrow \mu = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}$$

4. a)

```
def Trajectoire(L, n):
    ~~R = [ ]~~
    R = [ ]
    for k in range(0, n+1):
        ~~R[k]~~ = R.append(rd.random(0,n+1) = L[i+1])

    return R.
```

b) Avec l'équation de Euler on a que
$\sum_{i=1}^{n} d_i = a_{ij} \cdot p_{j,j}$ [graphe connexe, non orienté]

$\Leftrightarrow p_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_i}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c). comme P est une matrice de transition, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \ \forall i \in [\![1,n]\!]$
donc $P \in ST_n$.

· Ainsi P est μ-réversible

$\Leftrightarrow \mu_i p_{ij} = \mu_j p_{ji}$ q.1)b) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$\Leftrightarrow \mu_i \frac{a_{ij}}{d_i} = \mu_j \frac{a_{ji}}{d_j}$

$a_{ij} = a_{ji}$ car G est non orienté donc A symétrique $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2$

$\Leftrightarrow \frac{\mu_i}{d_i} = \frac{\mu_j}{d_j}$

$\mu_i \neq 0 \ \forall i \in [\![1,n]\!]$

$\Leftrightarrow \frac{\mu_i}{\mu_j} = \frac{d_i}{d_j}$

5. · $\Theta_M(i_0, \ldots, i_n)\, \Theta_M(j_0, \ldots, j_s)$

$= \prod_{k=1}^{n} m_{i_{k-1}, i_k} \prod_{k=1}^{s} m_{j_{k-1}, j_k}$

$= m_{i_0,i_1} \times m_{i_1,i_2} \times \ldots m_{i_{n-1},i_n} \times m_{j_0,j_1} \times \ldots m_{j_{s-1},j_s}$

$= m_{i_0,i_1} \times m_{i_1,i_2} \times \ldots \underbrace{m_{i_{n-1},i_n} \times m_{i_n,j_1}}_{i_n = j_0} \times \ldots m_{j_{s-1},j_s}$

$= \Theta_M(i_0, \ldots, i_n, j_1, \ldots j_s)$

6. $n=3$. $\Theta_M($

7. a) Soit M μ-réversible

$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_{k-1}}\right)} \Theta_M(i_0, \ldots, i_n)$

$$= \left(\prod_{h=1}^{n} \mu_{i_{k-1}}\right) \prod_{i=1}^{n} m_{i_{k-1}, i_k}$$

$$= \prod_{h=1}^{n} \mu_{i_{k-1}} \cdot m_{i_{k-1}, i_k}$$ $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \mu_i m_{ij} = \mu_j m_{ji}$

$$= \prod_{h=1}^{n} \mu_{i_k} \cdot m_{i_k, i_{k-1}}$$

$$= \left(\prod_{h=1}^{n} \mu_{i_k}\right) \cdot m_{i_1, i_0} \times m_{i_2, i_1} \times \dots m_{i_k, i_{n-1}}$$

$$= \left(\prod_{h=1}^{n} \mu_{i_k}\right) \cdot m_{i_n, n-1} \times m_{i_{n-1}, i_{n-2}} \times \dots \times m_{i_1, i_0}$$

$$= \boxed{\left(\prod_{h=1}^{n} \mu_{i_k}\right) \cdot \Theta_M (i_n, \dots, i_0)}$$

b)

Ainsi comme les μ_i sont > 0 on a $\prod_{h=1}^{n} \frac{\mu_{i_{k-1}}}{\mu_{i_k}} \Theta_n(i_0, \dots, i_n) = \Theta_n(i_n, \dots, i_0)$

$\Leftrightarrow$ telescoppage $\frac{\mu_{i_0}}{\mu_{i_n}} \Theta_n(i_0, \dots, i_n) = \Theta_n(i_n, \dots, i_0)$

or $\mu_{i_0} m_{i_0, i_n} \dots = \mu_{i_n} m_{i_n, i_0}$ d'où $\frac{\mu_{i_0}}{\mu_{i_n}} = \frac{m_{i_n, i_0}}{m_{i_0, i_n}}$ (les termes manquants de chaques côtés)

donc $\Theta_n(i_0, \dots, i_n, i_0) = \Theta_M(i_0, i_n, \dots, i_0)$

$\boxed{M \text{ vérifie } K}$

9. b) Soit $v_i m_{ij} = \frac{\Theta_M(i_0, \dots, i_0)}{\Theta_M(i_0, \dots, i_0)} \cdot m_{ij}$

d'après 9.a)
$i_0 = 1$
$i_0 = i$

$$= \frac{\Theta_M(i_1, \dots, i)\ m_{ij}}{\Theta_M(1, \dots, 1)}$$

M vérifie K

=

8. Montrons par récurrence $P(s)$ " $m_{ij}^{(s)} > 0$ si et seulement si il existe $(i_0, \dots, i_s) \in [\![1, n]\!]^{s+1}$ tel $i_0 = i$ et $i_s = j$ et $\Theta_M(i_0, i_s) > 0$" $\forall s \in \mathbb{N}^*$

Initialisation: pour $s = 1$. $m_{ij}^{(s)} > 0 \Rightarrow \exists (i_0, i_1)$ tel que $i_0 = 1$ et $i_1 = 1$. car $m_{i,j} > 0$

$\Theta_M(i_0, i_1) = \Theta_M(ij) = m_{ij} > 0$
Donc $P(1)$ est vraie.

Question 6.

~~Soit $n=3$ alors M vérifie K si~~

~~$\Theta_n(i_0, i_1, i_2, i_3, i_0) = \Theta_n(i_0, i_3, i_2, i_1, i_0)$~~

~~$\Leftrightarrow m_{i_0,i_1} \times m_{i_1 i_2} \times m_{i_2 i_3} \times m_{i_3,i_0}$~~

~~$= m_{i_0,i_3} \, m_{i_3,i_2} \, m_{i_2,i_1} \times m_{i_1,i_0}$~~

Comme M

Comme $n = 3$ alors il ne peut y avoir que 3 éléments i_1, i_2, i_3 dans $[\![1,3]\!] = \{1,2,3\}$.

Ainsi, si $n=3$, alors M vérifie K si

$\Theta_n(i_1, i_2, i_3, i_1) = \Theta_n(i_1, i_3, i_2, i_1)$

$\Leftrightarrow \boxed{m_{1,2} \times m_{2,3} \times m_{3,1} = m_{1,3} \times m_{3,2} \times m_{2,1}}$

$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- $m_{12} \times m_{23} \times m_{31} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 0 = 0$
- $m_{13} \times m_{32} \times m_{21} = 0 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 0$

On a bien $m_{12} m_{23} \times m_{31} = m_{13} m_{32} m_{21}$

donc $\boxed{P \text{ vérifie } K}$

Copie anonyme - n°anonymat : 402375

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 17	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées ESSEC / HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

PARTIE 2

a) $D^2 = \Delta$ tel que $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \mu_n \end{pmatrix}$

On a alors D diagonale donc $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$

avec $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels à cherchés.

Comme D est diagonale $D^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^2 \end{pmatrix}$ et comme

D est inversible $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$

Ainsi On a comme $D^2 = \Delta$

$\iff \begin{cases} \alpha_1^2 = \mu_1 \\ \alpha_2^2 = \mu_2 \\ \vdots \\ \alpha_n^2 = \mu_n \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{\mu_1} \\ \vdots \\ \alpha_n = \sqrt{\mu_n} \end{cases}$ Tous les $\mu_i > 0$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$

Ainsi $\boxed{D = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \sqrt{\mu_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}}$ avec D inversible car $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mu_i \geq 0$ donc tous ses coefficients diagonaux sont strictement positifs

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $D^2 = D$ et P est μ-réversible

donc $DP = {}^tPD$ — ${}^tP = Q$

$\iff DP = QD$ — $D = D^2$

$\iff D^2P = QD^2$ — D inversible

$\iff D^{-1}D^2P = D^{-1}QD^2$

$\iff DPD^{-1} = D^{-1}QD$

Ainsi on a que $D^{-1}QD$ est diagonalisable car $D^{-1}QD$ est symétrique

${}^t(D^{-1}QD) = DQ^{-1}D^{-1}$

$= DPD^{-1}$

$= D^{-1}QD$

Donc $\boxed{D^{-1}QD \text{ diagonalisable car symétrique}}$.

c) $DD^{-1}QDD^{-1} = D^2P(D^{-1})^2$

$\iff Q = D^2P(D^{-1})^2$

Comme Q est semblable

11) On a que $\mu P = \mu$ — $A = B$

$\iff {}^t(\mu P) = {}^t\mu$ — $\Rightarrow {}^tA = {}^tB$

$\iff {}^tP\,{}^t\mu = {}^t\mu$ — ${}^t(ZM) = {}^tM\,{}^tZ$ avec μ matrice ligne

${}^tP = Q$

$\iff \boxed{Q\,{}^t\mu = {}^t\mu}$

On a alors que $1 \in Sp(Q)$.

12. a) $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij} \, |y_j| \right)$

$= \sum_{j=1}^{n} |y_j| \sum_{i=1}^{n} q_{ij}$

Or comme $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ $(P \in ST_n)$

alors, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{j=1}^{n} ({}^tp_{jj}) = 1$, ${}^t(p_{ij}) = p_{ji} = q_{ji}$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{j=1}^{n} q_{ji} = 1$

Donc $\sum_{i=1}^{n} q_{ij} = 1$

Ainsi $\sum_{j=1}^{n} |y_j| \sum_{i=1}^{n} q_{ij} = \sum_{j=1}^{n} |y_j|$

Donc $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij} |y_j| \right) = \sum_{j=1}^{n} |y_j|}$

b) Comme λ est valeur propre de Q associé à Y on a que $QY = \lambda Y$

~~Donc $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} |y_j| = \sum_{i=1}^{n}$~~ Avec $QY = (d_i)_{1 \leq i \leq n}$

Donc $d_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_j = \lambda y_i$

Donc en sommant

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda y_i$$

$\iff \sum y_i$

c) Ainsi $|\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i| \right) \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i|$

Alors $|\lambda| \leq 1$.

$\iff -1 \leq \lambda \leq 1$

Donc $\lambda \in [-1, 1]$.

Ainsi $\boxed{Sp(Q) \subset [-1, 1]}$

13. a) supposons $\exists\, \ell$ tel que $y_\ell < 0$.

on a $y_k > 0$ (donc $y_k > y_\ell$)

Soit $\sum_{j=1}^{n} q_{k,j} |y_j|$

$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} q_{kj} |y_j| + q_{kk} y_k$

Comme $y_\ell < 0$ alors $|y_\ell| > 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $q_{ij} > 0$
on a donc que $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} q_{kj} |y_j| > 0$ car $q_{k\ell}|y_\ell| > 0$.

Donc $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} q_{kj} |y_j| + q_{kk} y_k > q_{kk} y_k$

$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} q_{kj} |y_j| > q_{kk} y_k > y_k$

Ainsi $\boxed{y_k < \sum_{j=1}^{n} q_{kj} |y_j|}$

En sommant l'inégalité avec $y_k > 0$ donc $y_k = |y_k|$ de k allant de 1 à n on a :

$\sum_{k=1}^{n} |y_k| < \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} q_{kj} |y_j| \right)$

$= \sum_{k=1}^{n} |y_k|$ q 12. a

On a bien que $\sum_{k=1}^{n} |y_k| < \sum_{k=1}^{n} |y_k|$ ce qui est absurde car on somme les mêmes éléments. Ainsi, il n'existe pas de ℓ tel que $y_\ell < 0$, donc que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\boxed{y_j \geq 0}$

b) Conclusion faite en haut.

Si $E_1(Q) = \left\{ Y \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\}$ alors $E_1(Q)$ est l'espace nulle $E_1(Q) = \{0\}$, donc $1 \notin Sp(Q)$.

Copie anonyme - n°anonymat : 402375

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 17 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées ESSEC / HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) Comme $Q\,{}^t\mu = {}^t\mu$ alors ${}^t\mu$ est vecteur propre de Q associé à 1 car $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$, donc ${}^t\mu \neq 0$.

Ainsi $Y = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) {}^t\mu$

$Y = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right) {}^t\mu$

$Y = {}^t\mu$. $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$

Donc $\boxed{E_1(Q) = \text{Vect}({}^t\mu)}$ $({}^t\mu \neq 0)$

d) $QY = -Y$

i.e $(d_i)_{1 \leq i \leq n} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\, y_j = -y_i$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\, y_j = -\sum_{i=1}^{n} y_i$ $\quad \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} y_j$

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} q_{ij} = -\sum_{j=1}^{n} y_j$ $\quad \sum_{i=1}^{n} q_{ij} = 1$

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} y_j = -\sum_{j=1}^{n} y_j$

$\Leftrightarrow$ donc $2 \sum_{j=1}^{n} y_j = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{n} y_j = 0}$

Ainsi supposons que -1 est valeur propre. On aura donc que $\sum_{j=1}^{n} y_j = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi soit $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et dans ce cas là, (-1) n'est pas valeur propre car $E_{-1}(Q) = \{0\}$.

Soit tous les y_i se compensent, donc qu'il y ait y ait des w_j tel que $\sum_{i=1}^{n} w_j$ sont la sommes des $y_j > 0$ et x_j tel que $\sum x_j$ sont la sommes des $x_j < 0$.

Or, comme $\lambda = -1$ et $\lambda Y = QY$ où $(q_{ij}) > 0 \; \forall (i,j) \in [\![1, n^2]\!]$

Alors on aurait $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_j = -y_i$ pour $i \in [\![1, n^2]\!]$

Seulement $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_j = \sum q_{ij} w_j + \sum q_{ij} x_j = -y_i$

supposons $y_i > 0$ alors $-y_i < 0$

or on a $\sum q_{ij} w_j > 0$

Ainsi il faut que $\sum q_{ij} x_j = -\sum q_{ij} w_j - y_i$

Et ce $\forall i \in [\![1, n]\!]$, ce qui est absurde.

14. a) $E_1(Q) = E_1(Q^t) = \text{Vect}({}^t\mu)$.

b)

15. a) $L_{n+1} = (P(X_{n+1} = 1) \; \dots \; P(X_{n+1} = n)) \; \forall n \in \mathbb{N}$

Comme $L_n P \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

Et comme P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov :

$L_n P = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} P_{[X_n = i]}(X_{n+1} = 1) P(X_n = i) \right) \; \dots \; \left(\sum_{i=1}^{n} P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = n) P(X_n = i) \right) \right)$

On retrouve la formule des probabilités totales avec le système d'événement complet $(X_n = i)_{1 \leq i \leq r}$.

Donc $L_n P = (P(X_{n+1}=1) \quad P(X_{n+1}=2) \quad \ldots \quad P(X_{n+1}=r))$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ L_n P = L_{n+1}}$

Montrons par récurrence $P(n)$ " $L_n = L_0 P^n$ " $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation: pour $n=0$: $L_0 P^0 = L_0 I_r = L_0$

Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie à un entier n fixé, montrons que $P(n+1)$ est vraie

$L_n = L_0 P^n$

$L_n P = L_0 P^n P$, $L_n P = L_{n+1}$

$L_{n+1} = L_0 P^{n+1}$ $P(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence avec $P(0)$ et $P(n+1)$ vraies, alors $P(n)$ est vraie.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ L_n = L_0 P^n}$

b) On a que $L_n = L_0 P^n$

$L_n = L_0 ({}^tQ)^n$

Or, comme Q^n est une combinaison linéaire de $({}^tU, \cancel{Y_2}, \ldots {}^t, Y_r)$ on a que :

$$Q^n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i' \lambda_i^n Y_i = \alpha_1' \cancel{\mu_1} + \sum_{i=2}^{r} \alpha_i' \lambda_i^n Y_i$$

donc $({}^tQ)^n = \alpha_1' \mu + \sum_{i=2}^{r} \alpha_i' \lambda_i {}^t(Y_i)$ $\lambda_1 = 1$

Ainsi $L_n = L_0 ({}^tQ)^n$ est donc une combinaison linéaire de $({}^tQ)^n$ de telle sorte que avec $\alpha_i = \alpha_i' L_0$

On a que $L_n = \alpha_1 \mu + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \lambda_k^n ({}^t Y_k)$

c) $\forall j \in [\![1, n]\!], \lim_{n \to \infty} P(X_n = j) = \lim_{n \to \infty} \alpha_i \mu_j + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \alpha_{k} \lambda_{k}^n ({}^t Y_{k})}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

car $\lambda_i \in]-1, 1[\quad \forall i \in [\![2, n]\!]$

Donc $\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!] \quad \lim_{n \to \infty} P(X_n = j) = \alpha_i \mu_j}$

d) Comme $\forall j \in [\![1, n]\!] \quad \lim_{n \to +\infty} P(X_n = j) = \alpha_1 \mu_j$

~~on a pour $j = 1$, $\lim P(X_n = 1) = \alpha_1 \mu_1$~~

~~or $P(X_n = 1) = \mu_1$ donc $\alpha_1 = 1$.~~

or si on somme de $j = 1$ à n on a

$\sum_{j=1}^{n} P(X_n = j) = 1$ (Système d'évènements complet)

donc $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} P(X_n = j) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha_1 \mu_j$

$\iff 1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_1 \mu_j$, $\sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1$

$\iff 1 = \alpha_1$

Donc $\boxed{\alpha_1 = 1}$

Ainsi comme $\lim_{n \to \infty} P(X_n = j) = \mu_j \quad \forall j \in [\![1, n]\!]$.

On a que $(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

tel que $P(X = k) = \mu_k \quad \forall k \in [\![1, n]\!]$

avec $\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$, donc on a bien que

X est une variable aléatoire.

Copie anonyme - n°anonymat : 402375

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 17 | Session : 2026

Épreuve de : Maths appliquées ESSEC / HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

PARTIE 3 :

16.
```
def opLigne(M,k, alph):
    for j in range (0, n ):
        if j != k:
            M([k,j]) = alpha * M([k,j])
        else:
            M([k,k]) = 1 - α + M([k,k])
    return M.
```

17.

b) Soit $m_{i,j} > 0 \ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$

alors comme $\alpha \in]0,1]$, $\cdot\ \alpha m_{ij} > 0$

$\cdot\ 1-\alpha > 0$

donc $(1-\alpha) + \alpha m_{ij} > 0$

Pour les changement des lignes k, on a bien $m_{ij} > 0$

Ensuit pour les colonne cela reviens au même.

Donc $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \text{si } m_{i,j} > 0,\ \text{alors } m'_{i,j} > 0}$

19. Comme M vérifie K, $m_{ij}^{(s)} > 0 \iff \theta_M(i_0, \dots, i_s) > 0$

avec $i_0 = i$ et $i_s = j$

Ainsi comme M vérifie K $\exists\ \ell \in I$, et I tel que

$m_{i\ell} > 0$ et $m_{\ell j} > 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE