502078

SALAMA

MATHIEU

21/04/2004

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 50207 8

Né(e) le 21/04/2004

Nom SALAMA

Prénom (s) MATHIEU CHARLES RICHA

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/10

Numéro de table 013

Exercice 2

1.a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

· Considérons $t \mapsto t^n e^{-t}$, une fonction continue, en tant que produit de fonction polynomiale et d'une fonction composée par la fonction exponentielle.

Or :

$$t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$ (par croissance comparée).

et :

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge en tant ~~que~~ qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$.

· Comme les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont des fonctions continues et positives sur $[1, +\infty[$, en tant que produit de fonctions continues et positives et que $\forall t \in [1, +\infty[$:

$\frac{1}{t^2} \geq 0$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Alors, par critère de négligeabilité des intégrales impropres de fonctions continues et positives :

$$\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt \text{ converge.}$$

· Sur $[0, 1]$:

$\int_0^1 t^n e^{-t}\, dt$ converge en tant qu'intégrale d'une fonction bien définie sur un segment.

Ainsi, par Chasles :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt \text{ converge.}$$

b) · pour $n = 0$, on a $\forall A \geq 0$:

$$F_0(A) = \int_0^A e^{-t}\, dt$$

$$= \left[-e^{-t} \right]_{t=0}^{A}$$

$$= 1 - e^{-A}$$

$$\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

$$= 1.$$

- pour $n = 1$ on a $\forall A \geq 0$:

$$I_n(A) = \int_0^A te^{-t}\,dt$$

$$\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$ (en remarquant le moment d'ordre 1 d'une variable aléatoire à densité suivant une loi exponentielle de paramètre 1)

Donc :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$$

$$= 1$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Considérons $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$ une fonction continue, en tant que quotient ~~de~~ d'une fonction composée par la fonction exponentielle et d'une fonction affine, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

Or on a :

$$\frac{e^{-t} \times e^{t}}{(1+xt)} = \frac{1}{(1+xt)} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où :

$$\frac{e^{-t}}{1+xt} \underset{t\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{e^{t}}\right)$$

. Comme, $t \mapsto e^{-t}$ est une fonction continue en tant que composée d'une fonction usuelle, et que $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont des fonctions positives, en tant que quotient de fonctions positives et comme $\forall t \in \mathbb{R}_+$:

$$e^{-t} \geq 0$$

Alors, par critère de négligeabilité des intégrales impropres de fonctions continues et positives, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\, dt \text{ est convergente.}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

On a :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+0\times t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$$

$$= 1 \quad \text{(d'après la 1.b)}$$

Numéro d'inscription 302078

Né(e) le 21/04/2004

Nom SALAMA

Prénom (s) MATHIEU CHARLES AICHA

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/10

Numéro de table C13

Signature

4) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$.

On a :

$x \leq y \Rightarrow xt \leq yt$ (avec $t \in \mathbb{R}_+$)

$\Rightarrow 1+xt \leq 1+yt$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+xt} \geq \dfrac{1}{1+yt}$ (en composant par $x \mapsto \frac{1}{x}$ une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\Rightarrow \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \geq \dfrac{e^{-t}}{1+yt}$ (car $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-t} \geq 0$)

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^A \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \geq \int_0^A \frac{e^{-t}}{1+yt}\,dt$ (par croissance de l'intégrale et les bornes sont dans l'ordre croissant)

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ est convergente (d'après la 2), on a par passage ~~de l'int~~ à la limite :

$x \leq y \Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt}\,dt$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

D'où :

$x \leq y \Rightarrow F(x) \geq F(y)$ (par définition des notations de l'énoncé)

On peut donc, en déduire que :

F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

5.a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Par disjonctions de cas sur x, on a :

· pour $x > 0$:

$t \mapsto \frac{1}{1+xt}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, en tant que composée de la fonction inverse ~~ne s'annulant p~~ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$.

et :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{x}{1+xt}\,dt$$

$$= \frac{1}{x}\Big[\ln|1+xt|\Big]_{t=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{x}\Big[\ln|1+x| - \ln|1+x\times 0|\Big]$$

$$= (t)$$

$(*) = \frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - 0\right)$ (car $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1+x \geq 0$)

$= \frac{\ln(1+x)}{x}$

Ainsi, pour $x > 0$:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{\ln(1+x)}{x}}$$

· pour $x = 0$, on a :

$t \mapsto \frac{1}{1+t}$ une fonction continue sur $[0, 1]$ en tant que composée de la fonction inverse dont le dénominateur ne s'annule pas ~~en~~ sur $[0, 1]$

et :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \left[\ln|1+t|\right]_{t=0}^{1}$$
$$= \ln 2 - \ln 1$$
$$= \ln 2$$

Ainsi, pour $x = 0$:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \ln 2}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

On a, $\forall t \in [0,1]$:

~~$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq xt \leq$~~

$t \mapsto e^{-t}$ est une fonction décroissante sur $[0,1]$, d'où $\forall t \in [0,1]$:

$e^{-t} \leq e^{-0} \Rightarrow e^{-t} \leq 1.$

$\Rightarrow \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leq \dfrac{1}{1+xt}$ (car $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$, $1+xt > 0$)

$\Rightarrow 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$

(par croissance et positivité de l'intégrale et les bornes sont dans l'ordre croissant)

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [1,+\infty[$:

$1+xt \geq x \Rightarrow \dfrac{1}{1+xt} \leq \dfrac{1}{x}$ (en composant par la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\Rightarrow (*)$

Numéro d'inscription 302078

Né(e) le 11/04/2004

Nom SALAMA

Prénom (s) MATHIEU CHARLES RICHA

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 10

Numéro de table 013

$(*) \Rightarrow \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x}$ (car $\forall t \in [1, +\infty[$, $e^{-t} \geqslant 0$)

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^A \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \int_1^A \frac{e^{-t}}{x}\,dt$ (par croissance et positivité de l'intégrale et les bornes sont dans l'ordre croissant)

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^A \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_1^A e^{-t}\,dt$ (par linéarité)

Or, par Charles :

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ converge (d'après la 2)

et, par Charles :

$\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge (d'après la 1.a, avec $n = 0$)

Ainsi, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on a :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

6.a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

On a :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt)\right) dt$$

(par linéarité, car les intégrales convergent)

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left[\frac{1}{1+xt} - (1-xt)\right] dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left[\frac{1}{1+xt} + xt - 1\right] dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left[\frac{1+xt(1+xt)-(1+xt)}{1+xt}\right] dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left[\frac{\cancel{1}+\cancel{xt}+x^2t^2-\cancel{1}-\cancel{xt}}{1+xt}\right] dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}x^2t^2}{1+xt}\,dt$$

$$= x^2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}t^2}{1+xt}\,dt \text{ (par linéarité)}$$

b) D'une part, on a :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = F(x) - \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}dt - x\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt\right)$$

(par linéarité

$$= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}dt + x\int_0^{+\infty} t e^{-t}dt$$

$$= F(x) - I_0 + x I_1 \quad (\text{d'après la } 1.b)$$

Or :

$$F(x) - I_0 + x I_1 = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt \quad (\text{d'après } 6.a)$$

et, $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a :

$$\frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \geq 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt \geq 0$$ (car elle converge et par croissance et positivité de l'intégrale)

$$\Rightarrow x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt \geq 0 \quad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 \geq 0)$$

$$\Rightarrow F(x) - I_0 + x I_1 \geq 0 \quad (\text{d'après } 1.b)$$

D'autre part, on a $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$1+xt \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+xt} \leq 1$$ (par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$\Rightarrow \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq t^2 e^{-t} \quad (\text{car } \forall t \in \mathbb{R}_+,\ t^2 e^{-t} \geq 0)$$

$$(*) \Rightarrow \int_0^{A} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^{A} t^2 e^{-t}\,dt$$ (par croissance de l'intégrale)

Comme :

. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$ convergent (par définition de l'énoncé et d'après la 1a) pour $n=2$)

On a par passage à l'infini dans l'inégalité que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$$

$$\Rightarrow x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt \quad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 \geq 0)$$

$\Rightarrow F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2$ (d'après la 6.a) et 1.a) pour $n=2$)

Ainsi, on en conclut que $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2$$

Je viens de me rendre compte que je n'avais pas répondu à la 6.d).

6.d) . Comme :

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 0$ (avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ qui converge vers un réel)

et que :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

Numéro d'inscription 502078

Né(e) le 21/04/2004

Signature

Nom SALAMA

Prénom (s) MATHIEU CHARLES RICHA

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/10

Numéro de table C13

On en déduit par encadrement que :

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt = 0}$$

7.a) D'où, on a :

$F(x) - I_0 \times x I_1 = F(x) - 1 + x$ (car $I_0 = 1$ et $I_1 = 1$ d'après la 1.b)

et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

$1 - x \leq F(x) \leq x^2 I_2 + 1 - x$

$\Rightarrow \dfrac{1-x}{1-x} \leq \dfrac{F(x)}{1-x} \leq \dfrac{x^2 I_2}{1-x} + 1$

$\Rightarrow 1 \leq \dfrac{F(x)}{1-x} \leq 1 + \dfrac{x^2 I_2}{1-x}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

• Comme I_2 est convergente, et que :

$$1 - x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

et que :

$$x^2 I_2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On a, par opérations élémentaires sur les limites que :

$$\frac{x^2 I_2}{1-x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{0}{1}$$

$$\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, on a :

$$\lim_{x \to 0} 1 + \frac{x^2 I_2}{1-x} = 1.$$

On en conclut par encadrement que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{1-x} = 1 \text{ (i.e)}$$

$$F(x) \underset{0}{\sim} 1 - x$$

Ainsi, on en déduit d'après le cours que :

$$\boxed{F(x) \underset{0}{\sim} 1 - x \iff F(x) \underset{0}{=} 1 - x + o(x)}$$

b) On a :

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{F(x)-1}{x}$$

$$\underset{0}{=} \frac{\cancel{1} - x + o(x) \cancel{-1}}{x} \quad \text{(d'après la 7.a)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{-x}{x} + o(1)$$

$$\underset{0}{=} -1 + o(1)$$

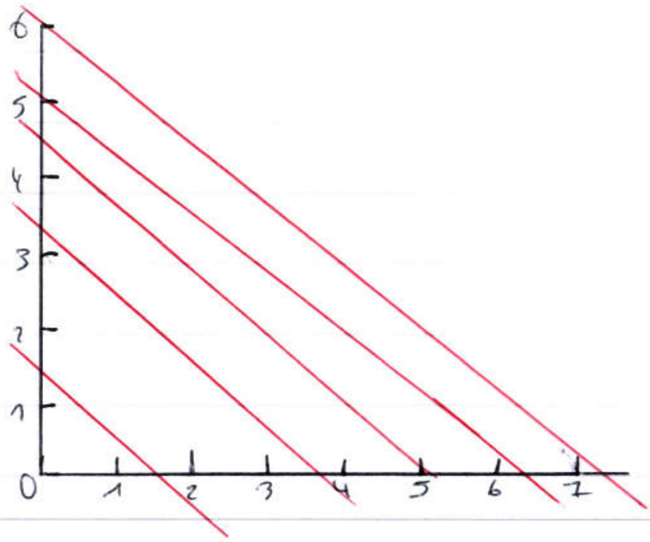
Donc :

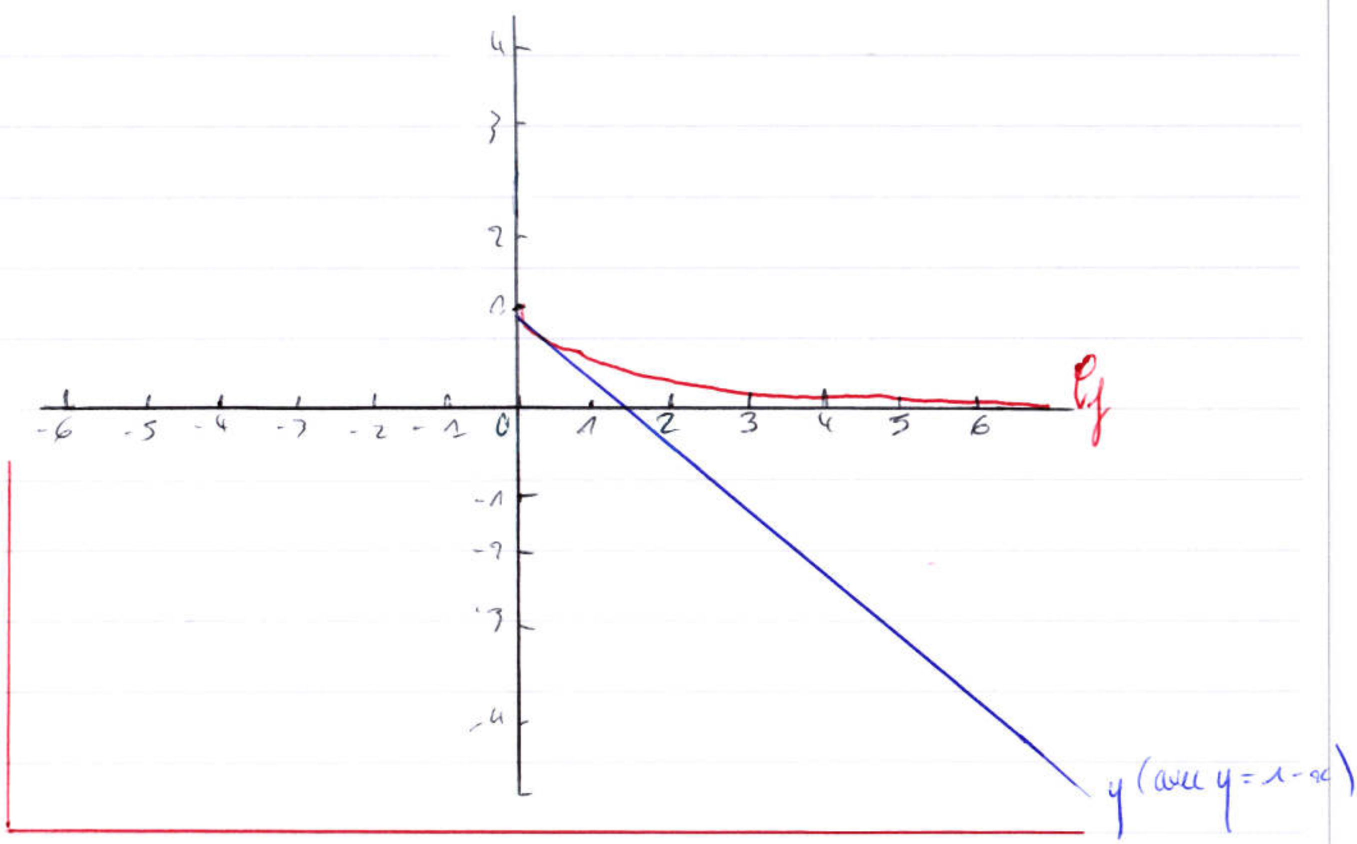
$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = -1.$$

Ainsi, comme la limite est finie, on en déduit que :

$$\boxed{F \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } F'(0) = -1.}$$

8)





Exercice 1.

1) Notons l'ensemble E_{O_3} des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que:
$O_3 M + M O_3 = O_3 \Rightarrow O_3 = O_3$.

Ainsi, l'égalité est vérifiée $\forall M \in M_3(\mathbb{R})$.

Donc:
l'ensemble E_{O_3} est constitué de l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = O_3$ (ie) $E_{O_3} = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / O_3 M + M O_3 = O_3\}$

D'autre part, notons E_{I_3} l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que:

$I_3 M + M I_3 = O_3 \Rightarrow 2 M I_3 = O_3$ (car M et I_3 commutent)

$\Rightarrow 2M = O_3$ (car $M \times I_3 = M$)

$\Rightarrow M = O_3$.

Numéro d'inscription 502078

Né(e) le 21/04/2004

Nom SALAMA

Prénom (s) MATHIEU

Signature

20 / 20

écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/10

Numéro de table 013

Commencez à composer dès la première page

Ainsi, on a :

$$\boxed{E_{I_3} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M_3 = O_3 \}}.$$

2) Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

· D'une part, on a :

$E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

D'autre part, on a, $\forall (M, N, \lambda) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2 \times \lambda$:

$$C(M+\lambda N) + (M+\lambda N)C = CM + \lambda CN + MC + \lambda NC$$
$$= CM + MC + \lambda(CN+NC)$$
$$= O_3 + \lambda O_3 = O_3.$$

Ainsi, on en conclut que :

$\boxed{E_C \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

3) Soit $M \in E_A$ tel que $AM + MA = O_3$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

On a :

$${}^{T}(AM + MA) = {}^{T}(AM) + {}^{T}(MA) \quad \text{(par linéarité de la transposée)}$$

$$= {}^{T}M\,{}^{T}A + {}^{T}A\,{}^{T}M \quad \text{(produit de transposées)}$$

Or, on a :

$${}^{T}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ (ie)

A est symétrique.

Donc :

$${}^{T}A = A.$$

Ainsi on a :

$${}^{T}(AM + MA) = {}^{T}M A + A\,{}^{T}M$$
$$= A\,{}^{T}M + {}^{T}M A$$

et, comme la matrice nulle est également symétrique, on a :

$${}^{T}0_3 = 0_3.$$

On en conclut que :

$$^T(AM + MA) = {}^T O_3$$
$$= O_3 \iff A\,{}^TM + {}^TM\,A = O_3$$
$$\iff {}^TM \in E_A.$$

4.a) · Comme A est symétrique, on a :

A est diagonalisable.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a, à l'aide du pivot de Gauss :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ (L_2 \leftrightarrow L_1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & -4-\lambda(1-\lambda) & 2(1-\lambda) \\ 0 & 2 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow 2L_2 + (1-\lambda)L_1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -(1+\lambda) \\ 0 & -4-\lambda(1-\lambda) & 2(1-\lambda) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (L_2 \leftrightarrow L_3) \\ (L_3 \leftrightarrow L_2) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -(1+\lambda) \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 9\lambda \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + (2 + \tfrac{1}{2}(\lambda(1-\lambda))L_2)$$

Donc, on en déduit que si λ est une valeur propre de A, on a :

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

c) D'où, on a d'après la 4.b) :

$\lambda^3 - 9\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 - 9) = 0$

$\iff \lambda = 0$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = -3$

$\iff Sp(A) = \{-3, 0, 3\}$.

- Considérons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- $X \in E_0(A) \iff AX = 0_{3,1}$

$$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = \frac{1}{2} z \\ z = z \end{cases}$$

Donc :

$\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$, où $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq 0_{3,1}$ (ie $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ forme une famille ~~d'un vecteur~~ libre d'un vecteur, c'est donc une base de $E_0(A)$ de dimension 3.

- $X \in E_3(A) \iff (A - 3I)X = 0_{3,1}$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{3,1}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$\iff (*)$

Numéro d'inscription 502078

Né(e) le 21/04/2004

Nom SALAH

Prénom (s) MATHIEU CHARLES RICHA

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 10

Numéro de table 013

$$(\ast) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \\ z = z \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \text{ où } \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (:c) } \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ forme}$$

une famille libre d'un vecteur, c'est donc une base de $E_3(A)$ de dimension 1.

$\cdot\ X \in E_{-3}(A) \Leftrightarrow (A+3I)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 9y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

Donc :

$$E_{-3}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

, où $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (i.e) $\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ forme une famille libre d'un vecteur, c'est donc une base de $E_{-3}(A)$ de dimension 3.

Ainsi comme A est diagonalisable, d'après la formule de changement de base, on a :

$A = PDP^{-1}$, où :

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

, où P est inversible

5) Calculons P^2.

On a :

$$P^2 = P \times P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= 9 I_3 .$$

Donc :

$$P^2 = 9 I_3 \Rightarrow \frac{1}{9} P^2 = I_3$$

$$\Rightarrow P \times \frac{1}{9} P = I_3$$

Ainsi, d'après le cours, on a :

$\exists B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : P \times B = I_3$, où

$$B = \frac{1}{9} P .$$
$$= P^{-1} .$$

On en conclut que :

$$P^{-1} = \frac{1}{9} P .$$

6.a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a :

$$DN = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$$

et :

$$ND = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

D'où :

$$DN + ND = \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix}$$

Résolvons dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le système (S) suivant telle que :

$$DN + ND = 0_{3,3} \iff \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -6a = 0 \\ -3b = 0 \\ c = 0 \\ -3d = 0 \\ e = e \\ 3f = 0 \\ g = g \end{cases} \iff (*)$$

Numéro d'inscription 362078

Né(e) le 21/04/2004

Nom SALAMA

Prénom (s) MATHIEU CHARLES RICHA

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/10

Numéro de table 013

Signature

$$(*) \iff \begin{cases} -6a = 0 \\ -3b = 0 \\ c = c \\ -3d = 0 \\ e = e \\ 3f = 0 \\ g = g \\ 3h = 0 \\ 6i = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = c \\ d = 0 \\ e = e \\ f = 0 \\ g = g \\ h = 0 \\ i = 0 \end{cases}$$

$$\iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on en conclut que :

$$\boxed{N \in E_D \iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

b) D'où, on en déduit que :

$$E_b = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, (c, e, g) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (c, e, g) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Montrons que $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille libre.

· Posons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Résolvons le système (S) telle que :

$$a\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille libre de 3 vecteurs, c'est donc une base de E_D, de dimension 3.

7. a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Posons $N = P^{-1}MP$.

On a :

$M \in E_A \iff AM + MA = 0_3$

$\iff A(PNP^{-1}) + (PNP^{-1})A = 0_3$ (car $M = PNP^{-1}$)

$\iff (PDP^{-1})(PNP^{-1}) + (PNP^{-1})(PDP^{-1}) = 0_3$ (car $A = PDP^{-1}$, d'après 4.c)

$\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0_3$

$\iff P(DN + ND)P^{-1} = 0_3$

$\iff P^{-1}P(DN + ND)P^{-1} = P^{-1}0_3$

$\iff (DN + ND)P^{-1} = 0_3$

$\iff (DN + ND)P^{-1} \times P = 0_3 \times P$

$\iff DN + ND = 0_3$.

$\iff N \in E_D$

Ainsi :

$M \in E_A \iff N \in E_D$

b) J'admets le résultat.

8) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Je n'arrive pas à trouver l'argument qui me permet d'affirmer que A et M commutent afin d'utiliser la formule du binôme de Newton, pour autant je pense que c'est cela qu'il faut utiliser.

D'où, on a :

$$(A+M)^2 = A^2 + 2AM + M^2.$$

D'où, on a :

$$(A+M)^2 = A^2 + M^2 \iff 2AM = 0$$
$$\iff AM = 0$$
$$\iff A = 0_3 \text{ ou } M = 0_3.$$

Or :

$$A \neq 0_3 \left(\text{car } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

D'où :

$$\boxed{(A+M)^2 = A^2 + M^2 \iff M = 0_3.}$$

9) Considérons φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = AM + MA$.

Numéro d'inscription 302078

Né(e) le 21/04/2004

Signature

Nom SALAMA

Prénom (s) MATHIEU CHARLES AICHA

20 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/10

Numéro de table 010

D'une part, on a :

~~$\varphi(M) = 0 \iff AM + MA = 0,$~~
~~$X \in E_0(\varphi) \iff \mathrm{Ker}(\varphi = 0$~~

$X \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(M) = 0$

$\iff AM + MA = 0$

$\iff M \in E_A.$

Ainsi on a d'après la 1.a) :
$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 3.$

Ainsi, d'après le théorème du rang, on a :

$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = -\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$
$= -3 + 9$
$= 6$

$\boxed{\Rightarrow \mathrm{rg}(\varphi) = 6}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Exercice 3.

Partie I.

1) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Considérons $f_i : x \mapsto \frac{i}{x^{i+1}}$ une fonction continue sur $[1, +\infty[$, en tant que fonction inverse ne s'annulant pas en $x = 0$, et continue sur $]-\infty, 1[$, en tant que fonction nulle.

De plus :

- f_i est positive sur $[1, +\infty[$, en tant que fonction inverse positive et nulle sur $]-\infty, 1[$.

On a :

$$\int_{-\infty}^{1} f_i(t)\, dt = 0 \quad \text{(intégrale d'une fonction nulle)}$$

De plus, $\forall A \geq 1$:

$$\int_1^A f(x)\, dx = \int_1^A \frac{i}{x^{i+1}}\, dx$$

$$= i \int_1^A \frac{1}{x^{i+1}}\, dx$$

$$= i \left[\frac{-1}{i\, x^i} \right]_{x=1}^{A} = (*)$$

$(*) = i\left(\frac{-1}{iA^i} + \frac{1}{i}\right)$

$= 1 - \frac{1}{iA^i}$

$\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$

Donc :

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Ainsi, par Chasles :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)dt = 1.$

On en conclut que $\forall i \in [\![1,n]\!]$:
f_i peut-être considérée comme une densitée de probabilité.

2.a) · Considérons $x \mapsto x f_i(x)$, une fonction continue sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions usuelles sur $[1, +\infty[$, et en tant que fonction nulle sur $]-\infty, 1[$.
On a :

$\int_{-\infty}^{1} x f_i(x)\, dx = 0$ (intégrale d'une fonction nulle)

D'autre part, on a $\forall A \geq 1$:

$\int_1^A x f_i(x)\, dx = i \int_1^A \frac{1}{x^i}\, dx$ (par linéarité)

$= i\left[\frac{-1}{(i-1)\, x^{i-1}}\right]_{x=1}^{A} = (*)$

$(*) = i \left[\frac{-1}{(i-1)A^{i-1}} + \frac{1}{i-1} \right]$

$= \frac{i}{i-1} - \frac{i}{(i-1)A^{i-1}}$

$\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{i}{i-1}$

Ainsi, par Chasles :

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\,dx = \frac{i}{i-1}$.

. Comme, $x \mapsto f_i(x)x$ est une fonction positive sur $[1,+\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 1[$, montrer la convergence absolue revient à montrer la convergence simple.

Ainsi, on a :

X_i admet une espérance qui vaut $\frac{i}{i-1}$ $\Leftrightarrow$ $i > 1$
$\Leftrightarrow i \in [\![2,n]\!]$.

b) D'après les questions précédentes, $\forall i \in [\![2,n]\!]$, on a que ~~les~~ ~~la classe~~ catégorie socioprofessionnelle avec le revenu le plus élevé est la numéro 2 et la dernière est la n.

3) Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

On a, $\forall x < 1$:

$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$ (intégrale d'une fonction nulle)

Numéro d'inscription 502078

Né(e) le 71/04/2004

Nom SALAMA

Prénom (s) MATHIEU

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09/10

Numéro de table 013

et $\forall x \geq 1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt \text{ (par Charles)}$$

$$= 0 + \int_{1}^{x} f(t)\,dt \text{ (intégrale d'une fonction nulle)}$$

$$= \int_{1}^{x} f(t)\,dt$$

$$= i \int_{1}^{x} \frac{1}{t^{i+1}}\,dt$$

$$= i \left[-\frac{1}{i t^{i}} \right]_{t=1}^{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^{i}}$$

Ainsi on en conclut que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

4) a) Considérons $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

Posons $V_i = \frac{1}{U^{1/i}}$

On a :

$V_i(\Omega) = \left(\frac{1}{U^{1/i}}\right)(\Omega)$

$=]1, +\infty[$.

D'où, $\forall x \in]1, +\infty[$:

$\mathbb{P}(V_i \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right)$

$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{U} \leq x^i\right)$ (en composant par $x \mapsto x^i$ une bijection croissante sur $[1, +\infty[$)

$= \mathbb{P}\left(U \geq \frac{1}{x^i}\right)$ (en composant par $x \mapsto \frac{1}{x}$ une bijection décroissante sur $]1, +\infty[$)

$= 1 - \mathbb{P}\left(U < \frac{1}{x^i}\right)$

$= 1 - \mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{x^i}\right)$ (car U est à densité)

Or :

$\frac{1}{x^i} \in U(\Omega)$, d'où :

$\mathbb{P}(V_i \leq x) = 1 - F_U\left(\frac{1}{x^i}\right)$

$= 1 - \frac{1}{x^i}$

Ainsi, on en conclut que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_{V_i}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

i.e. V_i suit la même loi que X_i.

b)
```
import numpy.random as rd
def simulX(i):
    U = rd.uniform(0,1)
    X = 1/(U**(1/i))
    return X
```

Partie II.

5) ~~def simulY(n,p):~~
```
import numpy.random as rd
def simulY(n,p):
    V = rd.binomial(n,p)
    Y = V + 1
    return Y
```

6)
```
def loiY(n,p):
    N = 10000
    loi = [0] * n
    for k in range N :
        y = simulY(n,p)
        loi[y[k]]
    return loi
```

7)
```
def representation_Y(n,p):
    T = np.linspace(0, 101, 10000)
    x = [t for t in range T]
    y = [loi Y(n,p) for t in range T]
    plt.plot(x,y)
    plt.bar(x,y)
    plt.show()
```

8) a) • La clé primaire d'une table dans une base de données doit être unique.

b) • Pour la première table, cela pourrait être le numéro de sécurité sociale (id) "i_insee"
• Pour la deuxième table, cela pourrait être le numéro du département (id) "d_numero"
• Pour la 3ème table, cela pourrait être le code PCS (id) "p_pcs"

d)
```
SELECT i_code_profession FROM individu;
WHERE "i_departement" = "28";
```

```
SELECT i_insee, p_categorie FROM profession;
INNER JOIN ON individu.i_code_profession = profession.p_pcs;
```

Numéro d'inscription: J02C78

Né(e) le: 21/04/2004

Signature

Nom: SALAMA

Prénom (s): MATHIEU

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 10

Numéro de table: C13

Partie III.

10.a) Admettons le résultat.

b) D'après la formule des probabilités totales associée au SCE $(Y-1=k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$, on a :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} P\big((Y=k)\cap(Z_n\leq x)\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P_{(Y=k)}(Z_n\leq x)\times P(Y=k) \quad (\text{car } P(Y=k)\neq 0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x)\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}.$$

b) Ainsi d'après la formule du binôme de Newton et d'après la 10.a) et la 3 de la partie I, on a :

$$G_n(x) = 1 - \frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

11) φ_n est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, en tant que différence de ~~quo~~ fonctions rationnelles et continue pour les mêmes raisons sur $\mathbb{R}$.

Ainsi :

Z_n est une variable aléatoire à densité.