

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

---

**EPREUVES ESC**

**CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES**

---

***MATHEMATIQUES***  
**OPTION TECHNOLOGIQUE**

***JEUDI 4 MAI 2000 , de 8 h à 12 h***

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;*

**"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique  
est interdit pendant cette épreuve".**

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants dont les différentes parties sont elles-mêmes largement indépendantes.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement**, son numéro d'inscription sur les copies.

## Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x$  réel par :  $f(x) = (x^2 - x - \frac{3}{4}) \cdot e^{2x}$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

- (a) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .  
(b) Étudier les branches infinies de  $\mathcal{C}$ .
- (a) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa fonction dérivée  $f'$  change de signe en  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$  et en  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .  
(b) Donner le tableau de variations de  $f$ .
- (a) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = 0$ .  
(b) Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs du réel  $x$ .  
(c) Déterminer une équation des tangentes à  $\mathcal{C}$  aux points d'abscisses  $-\frac{1}{2}$ ,  $0$  et  $\frac{3}{2}$ .
- (a) Tracer les tangentes à  $\mathcal{C}$  aux points d'abscisses  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $0$  et  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  dans un repère orthonormé d'unité  $2\text{ cm}$ .  
(b) Tracer  $\mathcal{C}$  et ses asymptotes éventuelles dans ce même repère.

On prendra :  $\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1,1$  ;  $f(-\frac{\sqrt{5}}{2}) \simeq 0,2$  ;  $f(\frac{\sqrt{5}}{2}) \simeq -5,8$  ;  $2e^{-1} \simeq 0,7$  ;  $2e^3 \simeq 40$ .

- (a) Calculer l'intégrale :  $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{2x} dx$ .  
(b) Calculer, à l'aide d'intégrations par parties, les deux intégrales suivantes :  
$$J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x \cdot e^{2x} dx \quad \text{et} \quad K = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2 \cdot e^{2x} dx$$
  
(c) Déterminer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire de l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère choisi à la question 4. telles que :  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$  et  $f(x) \leq y \leq 0$ .  
Hachurer cet ensemble sur le graphique précédent.

## Exercice 2

### Partie I

- Rappeler, pour tout réel  $x$ , la valeur de :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ .
- Soit  $a$  un réel. On suppose que le nombre  $N$  de skieurs qui se présentent pendant une durée  $T$  à une remontée mécanique est une variable aléatoire dont la loi est définie par :  
pour tout entier naturel  $n$ ,  $P(N = n) = a \cdot \frac{5^n}{n!}$ .  
(a) Déterminer la valeur de  $a$ .  
(b) Reconnaître la loi de  $N$  et donner son espérance mathématique.

(c) En utilisant l'extrait de table fourni ci-dessous, répondre aux questions suivantes :

Pendant la durée  $T$ ,

- quelle est la probabilité qu'au moins six skieurs se soient présentés à la remontée mécanique ?
- quelle est la probabilité qu'au plus deux skieurs se soient présentés à la remontée mécanique ?
- sachant qu'au moins six skieurs se sont présentés à la remontée mécanique, quelle est la probabilité qu'il y en ait eu au plus neuf ?

Extrait de la table de la loi de Poisson de paramètre 5, probabilités individuelles  $p(n)$  et cumulées  $F(n)$  de  $\mathcal{P}(5)$  :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181
$F(n)$	0,0067	0,0404	0,1247	0,2650	0,4405	0,6160	0,7622	0,8666	0,9319	0,9682	0,9863

## Partie II

$U$  désigne une variable aléatoire continue de loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

- (a) Donner une densité de  $U$ .
  - (b) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de la variable aléatoire  $U$ .
  - (c) Exprimer, en fonction du réel  $x$ , la probabilité :  $P(U > x)$ .
2. La compagnie des remontées mécaniques a installé deux guichets au bas des pistes. On estime que le temps de passage d'un skieur à l'un des guichets suit la même loi que la variable aléatoire  $U$ . Trois skieurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  se présentent en même temps aux guichets.  $A$  et  $B$  s'adressent simultanément aux deux guichets,  $C$  attend que  $A$  ou  $B$  libère un guichet.

On désigne par :

- $U_1$  et  $U_2$  les temps de passage respectifs de chacun des deux skieurs  $A$  et  $B$ ,
- $V$  le temps d'attente du skieur  $C$ .

On supposera que les variables aléatoires  $U_1$  et  $U_2$  sont indépendantes.

- Justifier que : pour tout  $x$  réel,  $(V > x) = (U_1 > x) \cap (U_2 > x)$ .
- En déduire, pour tout  $x$  réel,  $P(V > x)$  en fonction de  $P(U > x)$ .
- Etablir que la variable  $V$  admet pour fonction de répartition la fonction  $G$  définie par :
 
$$\begin{cases} G(x) = 0 & \text{si } x < 0, \\ G(x) = 2x - x^2 & \text{si } x \in [0; 1], \\ G(x) = 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
- En déduire une densité de probabilité  $g$  de la variable  $V$ .
- Montrer que  $V$  admet une espérance et une variance que l'on calculera.

## Exercice 3

### Partie I

On considère dans  $M_3(\mathbb{R})$  les six matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que la matrice  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$  (les détails des calculs figureront sur la copie).
- (b) On constate que :  $M \cdot T = I$ . En déduire que  $M$  est inversible et donner la matrice  $M^{-1}$ .
2. (a) Vérifier que :  $P^{-1} \cdot M \cdot P = D$ .
- (b) Pour tout entier naturel  $n$ , donner l'expression de  $M^n$  en fonction de  $P$ ,  $D^n$  et  $P^{-1}$ .
- (c) Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer les coefficients de la matrice  $D^n$ .
- (d) On désigne par  $\Delta$  la matrice dont les coefficients sont les limites quand  $n$  tend vers  $+\infty$  des coefficients de la matrice  $D^n$  et l'on admet que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$ .  
Déterminer la matrice  $\Delta$  et montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = L$ .

## Partie II

Une administration, dont on suppose l'effectif constant, répartit ses employés d'une année sur l'autre, au hasard entre trois secteurs  $A$ ,  $B$  et  $C$ , en respectant les proportions suivantes :

- 75% des employés du secteur  $A$  y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur  $C$ ,
  - 75% des employés du secteur  $B$  y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur  $A$ ,
  - 25% des employés du secteur  $C$  y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur  $A$  et 50% dans le secteur  $B$ .
1. On désigne par  $a$ ,  $b$  et  $c$  les effectifs respectifs dans les secteurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  au cours de la première année de fonctionnement. Au cours de la deuxième année, les effectifs dans les secteurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont respectivement de 35, 30 et 15 employés.

On pose :  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$ .

- (a) Vérifier que :  $M \cdot X = B$ , où  $M$  est la matrice définie dans la partie I.
  - (b) En déduire, à l'aide de la question 1.(b) de la partie I, les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
2. La première année, un employé  $E$  travaille dans le secteur  $A$ .  
Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on désigne par :

- $A_n$  l'événement : " $E$  travaille dans le secteur  $A$  la  $n^{\text{ième}}$  année",
- $B_n$  l'événement : " $E$  travaille dans le secteur  $B$  la  $n^{\text{ième}}$  année",
- $C_n$  l'événement : " $E$  travaille dans le secteur  $C$  la  $n^{\text{ième}}$  année",

et on pose :  $a_n = P(A_n)$ ,  $b_n = P(B_n)$ ,  $c_n = P(C_n)$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  et  $U = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n \end{pmatrix}$ .

- (a)  $M$  désigne la matrice de la partie I. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $\{A_n, B_n, C_n\}$ , établir que :  $U_{n+1} = M \cdot U_n$ .
- (b) Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $U_n = M^{n-1} \cdot U_1$ .
- (c)  $L$  désigne la matrice de la partie I et l'on admet que :  $U = L \cdot U_1$ . Déterminer les limites quand  $n$  tend vers  $+\infty$  des probabilités  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .