ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MERCREDI 16 MAI 2001, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

EXERCICE 1

Partie 1:

Soit f la fonction définie pour tout x réel par: $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Etudier les branches infinies de C_f.

2. (a) Déterminer la fonction dérivée f' de f et dresser le tableau de variations de f.
   (b) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
   Tracer cette tangente dans un repère orthogonal d'unités :
   2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.
   (c) Donner l'allure de C_f et ses asymptotes éventuelles dans ce même repère.

On donne les valeurs suivantes : $f(-1) \approx 1{,}36$; $f(1) \approx 0{,}92$; $f(2) \approx 0{,}68$; $f(5) \approx 0{,}12$

Partie 2:

M désigne un nombre réel positif, n un entier naturel.

On définit l'intégrale : $I_n(M) = \int_0^M x^n e^{-x}dx$,en convenant que $I_0(M) = \int_0^M x^0 e^{-x}dx = \int_0^M e^{-x}dx$

1. (a) Calculer $I_0(M)$
   (b) En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente.On note I_0 sa valeur.

2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre $I_{n+1}(M)$ et $I_n(M)$.
   (b) En déduire , à l'aide d'une récurrence, que pour tout entier naturel n ,
   l' intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ est convergente , de valeur $I_n = n!$.
   (c) a désigne un paramètre réel.
   Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x) = a.f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   Déterminer a pour que g soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire Z.
   Calculer alors l'espérance E(Z) et la variance V(Z).

EXERCICE 2

Partie 1: On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les 4 matrices suivantes:

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \; D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} ; \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

(les détails des calculs figureront sur la copie).

(b) Vérifier que : $P^{-1}MP = D$ puis exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.

2. (a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer les coefficients de la matrice D^n.

(b) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer M^n en fonction de P, D^n et P^{-1}.

En déduire les coefficients de M^n en fonction de n.

3. (a) Montrer que D est inversible et calculer D^{-1}.

(b) En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de P, D^{-1} et P^{-1}.

Partie 2:

On effectue des tirages dans trois urnes:

- Une urne blanche contient 1 boule blanche et 3 boules noires.
- Une urne noire contient 3 boules noires et 1 boule verte.
- Une urne verte contient 1 boule noire et 3 boules vertes.

Pour le premier tirage, on choisit une urne au hasard, on y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient.

Le second tirage a lieu dans l'urne ayant la même couleur que la première boule obtenue au premier tirage: on y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient.

On continue ainsi en suivant le même protocole:

le $n+1$- ième tirage s'effectue dans l'urne ayant la même couleur que la boule obtenue au n-ième tirage, et une boule tirée est toujours remise dans l'urne dont elle provient.

Pour n entier naturel non nul , on désigne par :

B_n l'événement : " le n-ième tirage donne une boule blanche ".

N_n l'événement : " le n-ième tirage donne une boule noire ".

V_n l'événement : " le n-ième tirage donne une boule verte ".

1. (a) Calculer $P(B_1), P(N_1)$ et $P(V_1)$.

(b) Etablir que $P(B_2) = \frac{1}{48}$ et $P(N_2) = \frac{7}{12}$

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $P(B_{n+1}) = \frac{1}{4}P(B_n)$

De quel type est la suite $(P(B_n))_{n\geq 1}$? En déduire $P(B_n)$ en fonction de n .

(b) M désigne la matrice définie à la partie 1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} P(B_n) \\ P(N_n) \\ P(V_n) \end{pmatrix}$

En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{B_n, N_n, V_n\}$, établir que : $X_{n+1} = MX_n$.

(c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $X_n = M^{n-1}X_1$.

3. En déduire $P(N_n)$ et $P(V_n)$ en fonction de n et déterminer leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

(On trouvera à la fin de l'exercice des extraits de table de lois usuelles)

n désigne un entier naturel plus grand que 2.
On dispose d'une urne contenant $2n$ boules noires et $n^2 - 2n$ boules blanches.
Un jeu consiste à effectuer n tirages successifs d'une boule dans cette urne, avec remise de la boule tirée après chaque tirage.
Un joueur est déclaré gagnant à l'issue du jeu s'il a tiré au plus 2 boules noires au cours des n tirages.

Un joueur participe à ce jeu suivant les deux situations distinctes suivantes:

I. Situation 1: Dans cette situation, $n = 20$.

On désigne par p la probabilité d'obtenir une boule noire lors d'un tirage , et par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées par le joueur à l'issue du jeu.

1. (a) Décrire le contenu de l'urne puis calculer la probabilité p.

   (b) Reconnaître la loi de X.
   (On justifiera clairement la réponse et on précisera $X(\Omega)$ et $P(X=k)$, pour tout élément k de $X(\Omega)$)

   (c) Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

2. Calculer la probabilité que le joueur soit gagnant dans cette situation.

II. Situation 2: Dans cette situation, n est un entier fixé supérieur ou égal à 30.

On désigne par p' la probabilité d'obtenir une boule noire lors d'un tirage , et par Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées par le joueur à l'issue du jeu.

1. (a) Vérifier que $p' = \frac{2}{n}$.

   (b) Reconnaître la loi de Y.
   (On justifiera clairement la réponse et on précisera $Y(\Omega)$ et $P(Y=k)$, pour tout élément k de $Y(\Omega)$)

   (c) Donner l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$.

2. (a) Justifier que la loi de probabilité de Y peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et dont on rappellera les caractéristiques : ensemble des valeurs, loi de probabilité, espérance, variance.

   (b) A l'aide de cette approximation, calculer, à l'aide de la table fournie ci-dessous, la probabilité que le joueur soit gagnant dans cette situation.
   Retrouver cette valeur sans la table à l'aide de la partie 1 de l'exercice 1.

Extrait de la table $(k, P(n, p, k))$
de la loi binomiale de taille $n = 20$ et de paramètre $p = 0,1$

k	0	1	2	3
$P(n, p, k)$	0, 1216	0, 2702	0, 2852	0, 1901

Extrait de la table $(k, P(\lambda, k))$
de la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$

k	0	1	2	3
$P(\lambda, k)$	0, 1353	0, 2707	0, 2707	0, 1804