EXERCICE 1

Partie A

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la matrice P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.
2) Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale et égale à D. Déterminer D^n pour tout entier $n \geq 1$.
3) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $M^n = PD^nP^{-1}$.
4) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6+16\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3+8\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2-24\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Partie B : Probabilités

Au club de vacances « Les Flots Bleus », chaque jour, chaque enfant choisit une activité parmi trois possibilités : un jeu de ballon sur la plage, la planche à voile ou le ski nautique. Olivier est l'un de ces heureux vacanciers.
On suppose que le premier jour, chaque enfant choisit au hasard. Ensuite , chaque jour :

- chaque enfant qui a choisi le jeu de ballon la veille reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\frac{1}{2}$, change pour la planche à voile avec la probabilité $\frac{1}{4}$, ou change pour le ski nautique avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- chaque enfant qui a choisi la planche à voile la veille reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou change pour le ballon avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- chaque enfant qui a choisi le ski nautique la veille reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\frac{1}{4}$, change pour la planche à voile avec la probabilité $\frac{1}{4}$, ou change pour le ballon avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on définit les événements B_n « Olivier choisit le jeu de ballon le jour n », V_n « Olivier choisit la voile le jour n » et S_n « Olivier choisit le ski nautique le jour n ».
On note leurs probabilités $b_n = P(B_n)$, $v_n = P(V_n)$ et ${}_n = P\ S_n)$

1) Traduire les données de l'énoncé à l'aide des événements précédents. En particulier, on déterminera b_1, v_1 et s_1.
2) A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer b_{n+1}, v_{n+1} et s_{n+1} en fonction de b_n, v_n et s_n.

3) Pour tout entier naturel non nul n, on définit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ s_n \end{pmatrix}$. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $X_{n+1} = MX_n$ où M est la matrice de la partie A.

4) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $X_n = M^{n-1}X_1$.

5) En déduire b_n, v_n et s_n en fonction de n.

6) Calculer les limites de b_n, v_n et s_n quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2

Les parties A , B et C sont indépendantes et dans chaque partie l'urne considérée initialement est la suivante :
Une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher : 1 blanche et 3 rouges.
Pour les parties B et C on pourra utiliser les événements R_k : " le k-ième tirage donne une boule rouge "
et B_k : " le k-ième tirage donne une boule blanche " , pour k entier naturel non nul.

Partie A

1) On tire simultanément deux boules dans cette urne puis on les remet dans l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?

2) On effectue maintenant une succession de tirages simultanés de 2 boules dans cette urne (en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage) jusqu'à obtenir un tirage constitué de 2 boules rouges.
Soit N la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

   a) Quelles sont les valeurs prises par N ?
   b) Reconnaître la loi de N. On précisera $P(N = k)$ pour tout entier $k \geq 1$.
   c) En déduire son espérance et sa variance.
   d) Calculer la probabilité que l'expérience s'arrête au plus tard au quatrième tirage.

Partie B

On effectue des tirages d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Soit Y la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

1) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
2) Décrire l'événement $(Y = 2)$ et calculer $P(Y = 2)$.
3) Déterminer la loi de Y, son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.
4) Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête. Exprimer Z en fonction de Y.
En déduire la loi de Z, son espérance $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

Partie C

Dans cette partie, on effectue des tirages d'une boule avec remise dans l'urne jusqu'à ce que l'on obtienne 2 boules consécutives de la même couleur. On note X la variable aléatoire égale au numéro (rang) du tirage où l'expérience s'arrête.
Par exemple si les tirages ont donné successivement rouge, blanc, rouge, blanc, rouge, rouge alors $X = 6$.

1) Quelles sont les valeurs prises par X ?
2) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
3) Décrire l'événement $(X = 4)$, puis l'événement $(X = 2k)$ pour tout entier $k \geq 1$ et montrer que pour tout entier naturel non nul k : $P(X = 2k) = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$.

4) Décrire l'événement $(X = 5)$, puis l'événement $(X = 2k+1)$ pour tout entier $k \geq 1$ et montrer que pour tout entier naturel non nul k : $P(X = 2k+1) = \left(\dfrac{3}{16}\right)^k$.

5) Calculer les sommes $S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k)$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k+1)$. Vérifier que $S_1 + S_2 = 1$.

6) Calculer l'espérance de X. On rappelle que $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ si $-1 < x < 1$.

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \text{ pour } x > 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 2 cm).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = (-x+2)e^x - 2$ pour tout réel x positif ou nul.

1) Calculer la limite de g en $+\infty$.
2) Etudier les variations de la fonction g sur $[0,+\infty[$. (On précisera $g(0)$).
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle , notée α.
4) Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$ et montrer que $1 < \alpha < 2$. On donne $e \approx 2,7$.

Partie B

1) Rappeler $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
2) En déduire que f est continue et dérivable en 0. Préciser une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3) Déterminer la limite de f en $+\infty$, et donner une interprétation graphique de cette limite.
4) a) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
   b) En déduire le tableau de variations de f, en y faisant apparaître le réel α défini au A,3).
   c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$, où α est le réel défini au A,3).
5) Tracer la courbe (C) en plaçant les tangentes aux points d'abscisses 0 et α. On donne $\alpha \approx 1,6$.

Partie C

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 1$.
   b) Montrer que la suite est décroissante (on utilisera un raisonnement par récurrence).
   c) En déduire que la suite est convergente (sa limite est étudiée dans les questions suivantes).
2) L'équation $f(x) = x$ a une solution évidente : le nombre 0. On se propose de rechercher s'il existe d'autres solutions à cette équation.
   a) Montrer que dans $]0,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $e^x - x - 1 = 0$.
   b) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e^x - x - 1$.
   c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0,+\infty[$.
3) Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.