Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Code épreuve : 295 **Nombre de pages :** 23 **Session :** 2025

Épreuve de : EM LYON MATHS APPRO

Problème 1

PARTIE 1.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[-1,1]$ donc

I_n et J_n sont bien définies pour $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^{0}(1-t^2)^n dt \underset{\substack{u=-t \\ \text{affine}}}{=} \int_0^1 (1-u^2)^n du = I_n$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = 2I_n$

2) $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 dt = \int_0^1 1 dt = 1$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n dt$$ linéarité de l'intégrale

$$= \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2-1) dt$$

$$= -\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$$

Comme $t \mapsto t^2(1-t^2)^n$ est continue, positive sur $[0,1]$, $\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt \geq 0$ (bornes croissantes)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$

$(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante

4) Soit $n \geq 1$

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^1 (1+t)(1-t)(1-t^2)^{n-1} dt$$
$$= \int_0^1 1 \times (1-t^2)^n dt$$

Posons $u : t \mapsto (1-t^2)^n$ et $v : t \mapsto t$, u et v sont $\mathcal{C}^1([0;1])$, par intégration par parties
$(\forall t \in [0;1],\ u'(t) = -2t \times n(1-t^2)^{n-1},\ v'(t) = 1)$

$$I_n = \left[(1-t^2)^n t\right]_0^1 + 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1} t^2 dt$$
$$= 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1} t^2 dt - 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1} dt + 2n I_{n-1}$$
$$= 2n\left(-\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}(1-t^2) dt\right) + 2n I_{n-1}$$
$$= -2n I_n + 2n I_{n-1}$$

i.e $(2n+1) I_n = 2n I_{n-1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$

5) Montrons par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$

$$P(n) : I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Initialisation

$n=0$

$I_0 = 1 \quad (3)$

$= \dfrac{(2^0 0!)^2}{(2\times 0+1)!}$

P(0) est vraie.

Hérédité

Soit P(n) vraie pour $n \in \mathbb{N}$

Montrons P(n+1) :

$I_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2n+3} I_n \quad 4) \quad (n+1 \geq 1)$

$= \dfrac{2(n+1)}{2n+2} \times \dfrac{2(n+1)}{2n+3} \times \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ (hypothèse de récurrence)

$= \dfrac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}$

P(n+1) est vraie

Conclusion : par principe de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}, \ I_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ J_n = 2 I_n = 2 \times \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

6)
```
def I(n):
    i=1
    for k in range(1,n+1):
        i=((2*k)/(2*k+1))*i
    return i
```

7) $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\times\dfrac{(4^n)^2\left(2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\right)}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{(2n+1)}}$ (ADMIS)

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^{2n+1}\times\pi\times\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{2\sqrt{\pi}\times\sqrt{n}\times\left(\frac{2n+1}{e}\right)\times\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\times 2\times\frac{4^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}$$

OR $\left(\dfrac{2n+1}{e}\right)^{2n+1} = \dfrac{2n+1}{e}\times\left(\left(\dfrac{2n+1}{e}\right)^2\right)^n$

$$= \frac{2n+1}{e}\times\frac{(4n^2+4n+1)^n}{e^{2n}}$$

et $2\times 4^{2n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n} = 2\times\dfrac{(4n^2)^n}{e^{2n}}$

$$\frac{(4n^2)^n}{(4n^2+4n+1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/e$$

CAR $\dfrac{(4n^2)^n}{(4n^2+4n+1)^n} = \exp\left(n\left(\ln(4n^2)-\ln(4n^2+4n+1)\right)\right)$

$$= \exp\left(n\left(\ln(4n^2)-\ln(4n^2)-\ln\left(1+\frac{4n+1}{4n^2}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{4n+1}{4n^2}\right)\right)$$

OR $n\ln\left(1+\dfrac{4n+1}{4n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\dfrac{4n+1}{4n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4n^2}{4n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

Donc par continuité de exp en 0,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(4n^2)^n}{(4n^2+4n+1)^n} = \frac{1}{e}$$

Ainsi $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}\times\dfrac{2}{\frac{2n+1}{e}}\times\dfrac{1}{e} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Ainsi $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$

Partie II

8) $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P, Q\rangle \in \mathbb{R}$

car pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$P(X)Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ avec } \underset{a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}}{n \in \mathbb{N}}$$

Or $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1,1]$ en tant que polynôme, l'intégrale est ainsi bien définie

Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)dt = \langle Q, P\rangle$$

$\langle . \rangle$ est symétrique

Pour $(P,Q,R) \in \mathbb{R}[X]^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle P+\alpha Q, R\rangle = \int_{-1}^{1} (P(t)+\alpha Q(t))R(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} P(t)R(t) + \alpha \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)dt \quad \text{linéarité d'intégrales définies}$$

$$= \langle P,R\rangle + \alpha \langle Q,R\rangle$$

$\langle . \rangle$ est linéaire à gauche, par symétrie il est bilinéaire.

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt$$

$t \mapsto P^2(t)$ est continue, positive et bornes croissantes assurent que $\langle P, P \rangle \geq 0$

De plus si $\langle P,P \rangle = 0$ alors $t \mapsto P^2(t)$ étant continue et positive, on a $\forall t \in [-1;1], P^2(t) = 0$
D'où $\forall t \in [-1,1], P(t) = 0$
P admet une infinité de racines donc $P = 0$

$\langle . \rangle$ est définie positive.

Ainsi $\langle . \rangle$ est un produit scalaire

9) Soit $(i,j) \in [\![0;n]\!]^2$ pour $n \geq 2$
Si $i \neq j$.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \int_{-1}^{1} t^{i+j}\,dt = \left[\frac{t^{i+j+1}}{i+j+1}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{i+j+1} - \frac{(-1)^{i+j+1}}{i+j+1}$$

Or si par exemple $i=0$, $j=2$.

$\langle e_i, e_j \rangle = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq 0$ mai $i \neq j$

les polynomes de (B_n) ne sont pas orthogonaux

10) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$\deg(P') \leq n-1$ donc $\deg((1-x^2)P'(x)) \leq n+1$

donc $\deg(u(P)) \leq n$ ainsi $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$u(P+\alpha Q)(X) = \left((1-X^2)(P+\alpha Q)'(X)\right)'$$
$$= \left((1-X^2)P'(X)\right)' + \left((1-X^2)\alpha Q'(X)\right)'$$
$$= \left((1-x^2)P'(x)\right)' + \alpha\left((1-x^2)Q'(X)\right)'$$
$$= u(P) + \alpha u(Q)$$

Ainsi u est linéaire, u est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

11) a) $e_0'(X) = 0$ d'où $u(e_0) = 0$

$$u(e_1)(x) = \left((1-x^2)e_1'(x)\right)' = (1-x^2)' = -2X = -2e_1(X)$$

Ainsi $u(e_1) = -2e_1$

b) Soit $k \in [\![2, n]\!]$

$$u(e_k)(x) = \left((1-x^2)kx^{k-1}\right)' = \left(kx^{k-1} - kx^{k+1}\right)'$$
$$= -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}$$

c) Notons B la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_n$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & \\ \vdots & 0 & -6 & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & -n(n+1) \end{pmatrix}$$

B est triangulaire, ainsi $sp(B) = \{-k(k+1), k \in [\![0;n]\!]\}$

B admet $(n+1)$ valeurs propres et $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

Ainsi : B admet le nombre maximal de valeurs propres, la dimension de chaque sous-espace propre est de 1.

Ainsi $sp(U) = \{-k(k+1), k \in [\![0;n]\!]\}$ et

$\forall \lambda \in sp(u), \dim(E_\lambda(u)) = 1$.

12) U est diagonalisable car elle admet $(n+1)$ valeurs propres, il existe une base formée de vecteurs propres de U de $\mathbb{R}_n[X]$.

13) a) D'après le théorème de minimisation par projeté orthogonal, $\mathbb{R}_n[X]$ étant un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_m[X]$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que.

$$\|f - T_n\| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - g\|$$

et $T_n = p(f)$ où p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages : 23	Session : 2025
	Épreuve de : EM LYON MATHS APPRO		
	Consignes	• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre	

et $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ (12).

On a qu'il existe $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k$$

~~Et pour $k \in [\![0, n]\!]$, $c_k = \langle T_n, L_k \rangle$ (~~base~~ orthonormée)~~
~~$= \langle f, L_k \rangle$~~
~~(car $p(f) = T_n$).~~

FEUILLE D'APRÈS

b) $$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, T_n\rangle + \|T_n\|^2$$
$$= \|f\|^2 - 2\langle f, p(f)\rangle + \|T_n\|^2$$
$$= \|f\|^2 - 2\langle f, p^2(f)\rangle + \|T_n\|^2 \quad (p^2 = p \text{, } p \text{ projecteur})$$
$$= \|f\|^2 - 2\langle p(f), p(f)\rangle + \|T_n\|^2 \quad (\text{orthogonal})$$
$$= \|f\|^2 - 2\|T_n\|^2 + \|T_n\|^2$$
$$= \|f\|^2 - \|T_n\|^2$$
$$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_k\|^2$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$(L_0, \dots, L_n)$ est orthogonale

D'où pour $i \in [\![0;n]\!]$

$\langle L_i, T_n \rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k \langle L_k, L_i \rangle$ bilinéarité du produit scalaire

$= c_i \langle L_i, L_i \rangle = c_i \|L_i\|^2$

D'où $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $c_i = \frac{\langle L_i, T_n \rangle}{\|L_i\|^2}$ ($L_i \neq 0$ car unitaire d'où $\|L_i\| \neq 0$)

$= \frac{\langle L_i, f \rangle}{\|L_i\|^2}$ (car $\langle L_i, T_n \rangle = \langle L_i, p(f) \rangle = \langle p(L_i), f \rangle = \langle L_i, f \rangle$)

et $\|T_n\|^2 = \langle T_n, T_n \rangle = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_i c_j \langle L_i, L_j \rangle$

$= \sum_{i=0}^{n} c_i^2 \|L_i\|^2$ car pour $i \neq j$ $\langle L_i, L_j \rangle = 0$

Ainsi: $\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_i\|^2$

14) a) Soit $k \in \mathbb{N}$:

$\deg(P_k) = 2 \times k = 2k$

Ainsi $\deg(Q_k) = 2k - k = k$

Le coefficient dominant de P_k est 1, si on dérive une fois, le coefficient dominant de P_k' est 2

Montrons par récurrence pour $i \in [\![0;k]\!]$

$P(i)$: " le coefficient dominant de $P_k^{(i)}$ est $2i$

b) $Q_0 = P_0 = 1$ $\quad Q_1 = P_1' = 2X \quad Q_2 = P_2'' = 12X^2 - 4.$

c) i) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}$

$$P_1(x)P_k'(x) = (x^2-1) \times 2kx(x^2-1)^{k-1}$$
$$= 2k\,e_1(x)\,P_k(x)$$

(La formule est vraie pour $k=0$, $0=0$)

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_1(x)P_k'(x) = 2k\,e_1(x)P_k(x)$

ii) En appliquant la formule de Leibniz à l'ordre $(k+1)$ $(k \geq 1)$ et en remarquant que pour $i \geq 2$, $P_1^{(i)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
On a pour $x \in \mathbb{R}$

$$\left(P_1(x)P_k'(x)\right)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{2} \binom{k+1}{i} P_1^{(i)}(x) P_k^{(k+2-i)}(x)$$

$$= P_1(x)P_k^{(k+2)}(x) + (k+1)P_1^{(1)}(x)P_k^{(k+1)}(x) + \binom{k+1}{2}P_1''(x)P_k^{(k)}(x)$$

$$= (1-x)^2 Q_k''(x) + 2(k+1)x\,Q_k'(x) + 2\times\frac{k(k+1)}{2}Q_k(x)$$

Or pour $i \geq 2$, $2ke_1^{(i)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$
Donc en appliquant la formule de Leibniz de l'autre côté de l'inégalité à l'ordre $(k+1)$

On a $\left(2ke_1(x)P_k(x)\right)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{1} \binom{k+1}{i} (2ke_1)^{(i)}(x)\, P_k^{(k+1-i)}(x)$

$$= 2kx\, Q_k'(x) + 2k(k+1) Q_k(x)$$

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$

$$2kx\, Q_k'(x) + 2k(k+1)Q_k(x) = (1-x^2)\, Q_k''(x) + 2(k+1)x\, Q_k'(x) + k(k+1) Q_k(x)$$

i.e $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1-x^2)\cdot Q_k''(x) - 2x\, Q_k'(x) + k(k+1) Q_k(x) = 0$

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$u(Q_k)(x) = \left((1-x^2)Q_k'(x)\right)'$$
$$= (1-x^2)'\, Q_k'(x) + (1-x^2)\, Q_k''(x)$$
$$= (1-x^2)Q_k''(x) - 2x\, Q_k'(x)$$
$$= -k(k+1)\, Q_k(x)$$

Ainsi Q_k est un vecteur propre associé à la valeure propre $-k(k+1)$ de u, Q_k est non nul car de coefficient dominant égal à $\frac{(2k)!}{k!}$

iii) Pour $k \in [\![0;n]\!]$
$L_k \in E_{-k(k+1)}(u)$ (ils ont été réordonnées)

et $Q_k \in E_{-k(k+1)}(u)$

Cet espace est de dimension 1, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $L_k = \alpha Q_k$
Le coefficient dominant permet d'affirmer que $\alpha = \frac{k!}{(2k)!}$

Ainsi $L_k = \frac{k!}{(2k)!} Q_k$

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 23 | Session : 2025

Épreuve de : EM LYON MATHS APPRO

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Problème 2
Partie 1

1) f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive en tant que quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour $A \geq 0$.

$$\int_0^A f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\text{Arctan}(x)\right]_0^A = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(A)$$

Comme $\lim\limits_{A \to +\infty} \text{Arctan}(A) = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut $1/2$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\substack{u=-x \\ \text{affine}}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{1}{1+(-u)^2} \times (-du) = \int_{-\infty}^0 f(u)\,du$$

Ainsi : $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ converge et vaut $1/2$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ par linéarité d'intégrales convergentes

f est donc une densité de probabilité.

2) $tf(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{t}$

Par comparaison d'intégrales à fonctions positives ($\forall t \geq 1$, $tf(t) \geq 0$ et $\frac{1}{\pi t} \geq 0$)

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge (Riemann $\alpha = 1$)

$\int_1^{+\infty} tf(t) dt$ diverge aussi

X n'admet donc pas d'espérance

et pas de variance par contraposée du théorème sur les moments d'une variable aléatoire

3) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \lim_{B \to -\infty} [\mathrm{Arctan}(t)]_B^x$$
$$= \frac{1}{\pi} \mathrm{Arctan}(x) + \frac{1}{2}$$

F est continue sur $\mathbb{R}$ car arctan l'est. F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (fonction de répartition). D'après le théorème de la bijection, F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$

Pour $y \in]0;1[$, $F(x) = y \iff \frac{1}{\pi} \mathrm{Arctan}(x) = y - \frac{1}{2}$

$$\iff \mathrm{Arctan}(x) = \pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$
$$\iff x = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \quad \left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

Ainsi $\forall y \in]0;1[$, $F^{-1}(y) = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)$

4) a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$ $\quad F^{-1}(U)(\Omega) = \mathbb{R}$

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x))$$ croissance de F sur $\mathbb{R}$

$$= F(x) \text{ car } F(x) \in]0;1[$$

Ainsi Y suit la même loi que X

b) La méthode d'inversion nous permet de créer ce programme :

```
def cauchy():
    return np.tan(np.pi*(rd.random()-1/2))
```

5) $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{P}(Z \leq x) = 0$

Pour $x \in \mathbb{R}^+$

$\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(|X| \leq x^2)$ croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$$= \mathbb{P}(-x^2 \leq X \leq x^2)$$

$$= \mathbb{P}(X \leq x^2) - \mathbb{P}(X \leq -x^2)$$

$$= \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x^2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(-x^2) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x^2) \quad (\text{Arctan est impaire})$$

$x \mapsto \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x^2)$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ par composition de telles fonctions donc Z est à densité et une densité de Z est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \begin{cases} \frac{4x}{\pi(1+x^4)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

6) Soit $k \in [\![1;2]\!]$

$$t^k f_2(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2t^{k+1}}{\pi \times t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \times \frac{t^k}{t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{t^{3-k}}$$

Par comparaison d'intégrales à fonctions positives $\left(\forall t \geq 1,\ t^k f_2(t) \geq 0,\ \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{t^{3-k}} \geq 0\right)$ $\int_1^{+\infty} t^k f_2(t)\,dt \geq 0$ converge si et seulement si $\frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3-k}}\,dt$ converge si et seulement si $3-k > 1$ (Riemann) si et seulement si $2 > k$

Ainsi Z admet une espérance mais pas une variance

7) a) Posons $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$

$$\frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{\alpha x(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \beta x(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}$$

or $\alpha x(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \beta x(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = (\alpha + \beta)x^3 + \sqrt{2}x^2(\alpha - \beta) + x(\alpha + \beta)$

$$= \sqrt{2} \times x^2 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{(-1)}{2\sqrt{2}}\right) = x^2$$

Ainsi $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ conviennent

b) $x \mapsto x^2 - \sqrt{2}x + 1$ et $x \mapsto x^2 + \sqrt{2}x + 1$ sont continues sur $[0;+\infty[$ et positives, ne s'annulant pas (déterminant négatif (-2))
les fonctions inverses sont donc continues sur cet intervalle $[0;+\infty[$

$$\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 23	**Session :** 2025

Emplacement QR Code

Épreuve de : EM LYON MATHS APPRO

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Par comparaison d'intégrales à fonctions positives ($\forall t \geq 1$, $\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \geq 0$, $\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1} \geq 0$, $\frac{1}{t^2} \geq 0$)

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann $\alpha = 2$ $\alpha > 1$)

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx$ convergent

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx$ convergent

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} \underset{\substack{(u=\sqrt{2}x \\ \text{affine})}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\frac{u^2}{2}+u+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\frac{1}{2}(u^2+2u+2)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u+1)^2+1}$$

$$\underset{\substack{(t=u+1 \\ \text{affine})}}{=} \frac{2}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \sqrt{2} \lim_{A\to+\infty} [\mathrm{Arctan}(t)]_1^A$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) Pour $x \geq 0$

$$\alpha x = \frac{\alpha}{2} \times 2x = \frac{\alpha}{2}\left(2x - \sqrt{2} + \sqrt{2}\right)$$

$$\beta x = \frac{\beta}{2} \times 2x = \frac{\beta}{2}\left(2x + \sqrt{2} - \sqrt{2}\right)$$

Ainsi

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right) + \frac{\beta}{2}\left(\frac{2x + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right)$$

Soit $A \geq 0$

$$\int_0^A t f_2(t)\,dt = \int_0^A \frac{4}{\pi} \times \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^A \frac{t^2}{\left(1 + \sqrt{2}t + t^2\right)\left(1 - \sqrt{2}t + t^2\right)}\,dt \quad \text{(identité remarquable } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{, } a = t^2 + 1 \text{, } b = \sqrt{2}t\text{)}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\alpha}{2}\left(\int_0^A \frac{2x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2}\,dx + \sqrt{2}\int_0^A \frac{1}{1 - \sqrt{2}x + x^2}\,dx\right) + \frac{\beta}{2}\left(\int_0^A \frac{2x + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}x + x^2}\,dx - \int_0^A \frac{\sqrt{2}\,dx}{1 + \sqrt{2}x + x^2}\right)\right)$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi}\left(\left[\ln\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\right]_0^A + \sqrt{2}\int_0^A \frac{1}{1 - \sqrt{2}x + x^2}\,dx\right) + \frac{2\beta}{\pi}\left(\left[\ln\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\right]_0^A - \sqrt{2}\int_0^A \frac{1\,dx}{1 + \sqrt{2}x + x^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\alpha \ln\left(A^2 - \sqrt{2}A + 1\right) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\alpha\int_0^A \frac{1}{1 - \sqrt{2}x + x^2}\,dx + \frac{2}{\pi}\beta\ln\left(A^2 + \sqrt{2}A + 1\right) - \frac{2\sqrt{2}\beta}{\pi}\int_0^A \frac{1\,dx}{1 + \sqrt{2}x + x^2}$$

Or $\frac{2}{\pi}\alpha\ln\left(A^2 - \sqrt{2}A + 1\right) + \frac{2}{\pi}\beta\ln\left(A^2 + \sqrt{2}A + 1\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\ln\left(\frac{A^2 - \sqrt{2}A + 1}{A^2 + \sqrt{2}A + 1}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\ln\left(1 - \frac{2\sqrt{2}A}{A^2 + \sqrt{2}A + 1}\right) \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$$

Les autres intégrales étant toutes convergentes, on obtient en passant aux limites avec $A \to +\infty$, d'après 7b)

$$E(Z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\alpha \times \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\beta \times \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$= 3\alpha - \beta$$

$$= 3 \times \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Enfin, $E(Z) = \sqrt{2}$

8) La fonction mystère réalise un n-échantillon de la loi de Z et ensuite compare l'écart entre la moyenne empirique et $\sqrt{2}$ pour n grand et epsilon petit. On peut conjecturer que $\overline{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ où Z_i est une réalisation de Z indépendante des autres, $\overline{Z}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \sqrt{2}$

On pourrait vouloir utiliser la loi faible des grands nombres mais Z_i n'admet pas de variance, ce qui nous empêche de l'utiliser.

Partie 2

9) $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0;1\}$, $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(\omega \in A) = \mathbb{P}(A)$

Ainsi $\mathbb{1}_A \hookrightarrow B(0;1)$ $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$

et $\mathbb{V}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$

10) a) Soit $\omega \in \Omega$

Si $\omega \in (X > s)$ $\mathbb{1}_{(X>s)}(\omega) = 1$.

$\chi_{]s;+\infty[}(X(\omega)) = 1$ car $X(\omega) \in]s;+\infty[$.

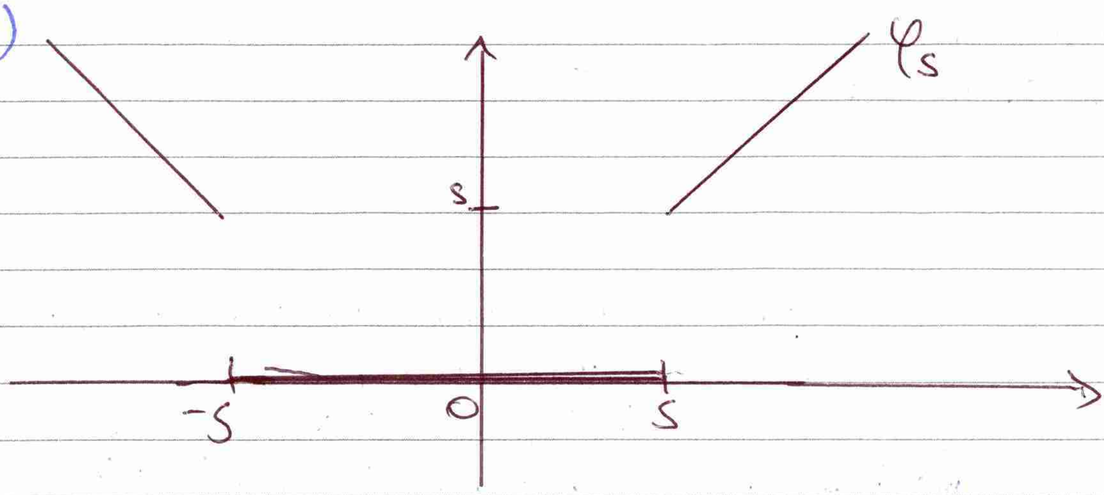
D'où $\mathbb{1}_{(X>s)}(\omega) = \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega))$

Si $\omega \in (X \leq s)$, $\mathbb{1}_{(X>s)}(\omega) = 0$

et $\chi_{]s;+\infty[}(X(\omega)) = 0$ car $X(\omega) \notin]s;+\infty[$

Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{(X>s)}(\omega) = \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega))$

b)



Car pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| \in]s;+\infty[\iff x \in]-\infty;-s[\cup]s;+\infty[$

$\varphi(s)$ est discontinue en s et $-s$

11) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $Y_k + Z_k = X_k$

(on peut le montrer en réalisant une disjonction de cas $\omega \in (|X_k| \leq M)$ et $\omega \in (|X_k| > M)$)

12) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$(|X_k| \leq M)$ et $(|X_k| > M)$ forment un système complet d'événements

$\mathbb{E}[Y_k^2 / (|X_k| > M)]$ existe car si $\omega \in (|X_k| > M)$
$Y_k^2(\omega) = 0$, donc $\mathbb{E}[Y_k^2 / (|X_k| > M)] = 0$.

$E(Y_k^2 / (|X_k| \leq M))$ existe car si $\omega \in (|X_k| \leq M)$
$Y_k^2(\omega) = X_k^2(\omega) \leq M^2$

($Y_k^2 / (|X_k| \leq M)$ est à valeurs positives et majorée par M^2)

Ainsi : $\mathbb{E}[Y_k^2 \mathbb{1}(|X_k| \leq M)] \leq M^2$

D'où $E(Y_k^2)$ existe

et $E(Y_k^2) = \underbrace{E(Y_k^2 \mathbb{1}(|X_k| \leq M)}_{\leq M^2} + \mathbb{E}(Y_k^2 \mathbb{1}(|Y_k| > M))$

13) b) L'inégalité triangulaire assure que $0 \leq |E(Z_k)| \leq E(|Z_k|)$

Donc par encadrement $\lim\limits_{M \to +\infty} E(Z_k) = 0$.

c) D'après 11, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $Y_k = X_k - Z_k$

Par linéarité de l'espérance

$\lim\limits_{M \to +\infty} \mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(X_k) - \lim\limits_{M \to +\infty} \mathbb{E}[Z_k] = E(X_k) = 0$.

14) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$(|x| \leq \frac{t}{2})$ et $(|y| \leq \frac{t}{2})$

Comme $|x+y| \leq |x| + |y| \leq \frac{t}{2} + \frac{t}{2}$ inégalité triangulaire

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a donc $|x+y| \leq t$

Ainsi par contraposée

$$|x+y| > t \Rightarrow \left(|x| > \frac{t}{2}\right) \text{ ou } \left(|y| > \frac{t}{2}\right)$$

15) D'après la question précédente avec $x = \overline{Y_n}$ et $y = \overline{Z_n}$ car $\overline{X_n} = \overline{Z_n} + \overline{Y_n}$

On a pour $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n}| > t) \leq \mathbb{P}\left(\left(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2}\right) \cup \left(|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}\right)\right)$$

Or $\mathbb{P}\left(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2}\right) \cup |\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}\right) \leq \mathbb{P}\left(|\overline{Z_n}| > \frac{t}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}\right)$

(formule du Criblole)

D'où $\mathbb{P}(|\overline{X_n}| \geq t) \leq \mathbb{P}\left(\left(\overline{Z_n} > \frac{t}{2}\right)\right) + \mathbb{P}\left(|\overline{Y_n}| > \frac{t}{2}\right)$

17) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}(\overline{Y_n}^2) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Y_i Y_j\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[Y_i Y_j] \quad \text{linéarité de l'espérance}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[Y_i^2] - 2\sum_{1 \leq i < j \leq n}\mathbb{E}[Y_i Y_j]\right)$$

(On a sorti la diagonale et remarqué que les deux triangles sont égaux)

19) Par encadrement, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{-2\varepsilon}{3} \leq \mathbb{P}(|\overline{X}_n| > t) - \frac{2\varepsilon}{3} \leq \frac{4M^2}{t^2 n}.$$

Comme ε on peut le prendre infiniment petit, par définition d'une limite et par encadrement

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n| > t) = 0.$$

20) $\overline{X_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{P} X$ où X est certaine égale à 0

Car $\forall t > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - X| > t) = 0$.

Le résultat de la question 8 semble cohérent puisque même si on ne peut pas utiliser la loi faible des grands nombres car il n'y pas de variance, la partie précédente permet de montrer en posant $Y = X - E(X)$ (pour obtenir l'espérance nulle) que Y peut converger en probabilité sans avoir nécessairement une variance