Copie anonyme - n°anonymat : 181583

E6-00143
181583
Mat Appro

Code épreuve : 282
Nombre de pages : 16
Session : 2025

Épreuve de : MATHS APPRO HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1

1) Soit $x \in E$

$\ell(x) = \ell\left(\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle_E e_i\right)$ (expression dans une base orthonormée)

$= \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle_E \ell(e_i)$ ℓ est linéaire

$= \langle x, \sum_{i=1}^{p} \ell(e_i) e_i \rangle_E$ par bilinéarité de $\langle . \rangle_E$

$= \langle x, a_0 \rangle_E$ avec $a_0 = \sum_{i=1}^{p} \ell(e_i) e_i \in E$

Supposons qu'il existe $a_1 \in E$ tel que $a_1 \neq a_0$

et $\ell(x) = \langle x, a_1 \rangle_E$

Alors $\ell(x) = \langle x, a_0 \rangle_E = \langle x, a_1 \rangle_E$

Donc $\langle x, a_0 - a_1 \rangle_E = 0$ donc $\forall x \in E, \langle x, a_0 - a_1 \rangle_E = 0$

Donc $a_0 = a_1$ donc par l'absurde a_0 est unique

Ainsi a_0 existe et est unique

2) Soit $y \in F$

$\ell : \begin{array}{c} E \\ x \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \langle u(x), y \rangle_F \end{array}$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$

D'après la 1), il existe un seul $z_y \in E$ tel que

$\forall x \in E, \langle u(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E$

3) Soient $(y, y') \in F^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

il existe $z_y \in E$ et $z_{y'} \in E$ tels que (2)

$\forall x \in E, \langle u(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E$, $\langle u(x), y' \rangle_F = \langle z_{y'}, x \rangle_E$

Ainsi pour $x \in E$,

$$\begin{aligned}\langle u(x), y + \alpha y' \rangle_F &= \langle u(x), y \rangle_F + \alpha \langle u(x), y' \rangle_F \quad \langle \cdot \rangle_F \text{ bilinéaire} \\ &= \langle z_y, x \rangle_E + \alpha \langle z_{y'}, x \rangle_E \\ &= \langle z_y + \alpha z_{y'}, x \rangle_E \quad \langle \cdot \rangle_E \text{ bilinéaire}\end{aligned}$$

or $(y + \alpha y') \in F$ donc il existe $z_{y+\alpha y'} \in E$ $\forall x \in E, \langle u(x), y + \alpha y' \rangle_F = \langle z_{y+\alpha y'}, x \rangle$

Ainsi $\forall x \in E$, $\langle z_{y+\alpha y'}, x \rangle - \langle z_y + \alpha z_{y'}, x \rangle = 0$

D'où $\forall x \in E$ $\langle z_{y+\alpha y'} - (z_y + \alpha z_{y'}), x \rangle = 0$

Ainsi $z_{y+\alpha y'} = z_y + \alpha z_{y'}$ car $(z_{y+\alpha y'} - (z_y + \alpha z_{y'})) \in E^\perp \cap E$

D'où $\forall (y, y') \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, u^*(y + \alpha y') = u^*(y) + \alpha u^*(y')$

u^* est linéaire

4) Notons $B = \mathcal{M}at_{B_E, B_F}(u^*)$

D'après 3) pour $j \in [\![1, n]\!]$, pour $x \in E$

$$\langle u(x), f_j \rangle_F = \langle x, u^*(f_j) \rangle_E$$

D'où ${}^t(AX) F_j = {}^t X B F_j$ i.e ${}^t X ({}^t A - B) F_j = 0$.

(où F_j est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de f_j)

Ainsi ${}^t X ({}^t A - B) = 0$ car cette ~~matrice~~ s'annule sur une base de F

pour $i \in [\![1, p]\!]$, en notant $E_i \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ la matrice de coordonnées e_i

On a ${}^t E_i ({}^t A - B) = 0$ donc ${}^t A - B = 0$ car cette matrice s'annule sur une base de E

Ainsi ${}^t A = B$ donc ${}^t A = \mathcal{M}at_{B_E, B_F}(u^*)$

$Rg({}^t A) = Rg(A)$ d'où $Rg(u) = Rg(u^*)$

${}^t({}^t A) = A$ d'où $(u^*)^* = u$

5) Soit $(x, y) \in \mathrm{Im}(u^*) \times (\ker(u))$

Donc il existe $z \in F$ tel que $u^*(z) = x$ et $u(y) = 0$

$$\langle x, y \rangle_E = \langle u^*(z), y \rangle_E = \langle z, u(y) \rangle \quad (1)$$
$$= \langle z, 0 \rangle = 0$$

Ainsi $\forall (x, y) \in \mathrm{Im}(u^*) \times \ker(u)$, $\langle x, y \rangle_E = 0$

D'où $\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$

6) Soit $X \in \ker(A)$

Ainsi $AX = 0$ donc ${}^t A A X = 0$ donc $X \in \ker({}^t A A)$

Soit $X \in \ker({}^tAA)$, ${}^tAAX = 0$

Donc ${}^tX{}^tAAX = 0$ donc ${}^t(AX)AX = 0$ donc $\|AX\|^2 = 0$
Donc $AX = 0$ (norme définie positive)
Donc $X \in \ker(A)$

Ainsi $\ker(A) = \ker({}^tAA)$ (Double inclusion)

D'où $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$

D'après le théorème du rang appliqué à $u^* \circ u$ et u, on a

$$\dim(\mathrm{Im}(u^* \circ u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u^* \circ u))$$
$$\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u))$$

Ainsi $\mathrm{Rg}(u^* \circ u) = \mathrm{Rg}(u)$

Donc $\mathrm{Rg}(u^* \circ u) = \mathrm{Rg}(u^*)$ 4)

Et comme $\mathrm{Im}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Im}(u^*)$

car pour $x \in \mathrm{Im}(u^* \circ u)$, il existe $y \in E$,
$u^*(u(y)) = x$ or $u(y) \in F$
donc $x \in \mathrm{Im}(u^*)$

Ainsi $\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(u^*)$

7) Par composition d'applications linéaires, w est linéaire

Pour $x \in \mathrm{Im}(u^*)$, $u(x) \in \mathrm{Im}(u \circ u^*)$ et $w(x) \in \mathrm{Im}(u^* \circ u \circ u^*)$ $\subset \mathrm{Im}(u^* \circ u)$

Donc w est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(u^*)$ 6)

Pour $(x, y) \in \mathrm{Im}(u^*)^2$ tel que $w(x) = w(y)$

On a $w(x - y) = 0$ w est linéaire

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Emplacement QR Code	**Code épreuve :** 282	**Nombre de pages :** 16	**Session :** 2025
	Épreuve de : MATHS APPRO HEC/ESSEC		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc $u^* o u(x-y)=0$ donc $(x-y)\in \ker(u^* o u) = \ker(u)$ (6)

Donc $u(x-y)=0$ OR $(x-y)\in \mathrm{Im}(u^*)$ car celui-ci est un sous espace vectoriel

Or $\mathrm{Im}(u^*)=\ker(u)^\perp$ 5)

Donc $(x-y)\in \ker(u)\cap \ker(u)^\perp = \{0\}$

Ainsi $x-y=0$ donc $x=y$

Ainsi w est injectif, étant un endomorphisme en dimension finie, il est donc bijectif

w est donc un isomorphisme

$\forall x\in \mathrm{Im}(u^*), \exists! y\in \mathrm{Im}(u^*), w(x)=y$

Ainsi $\forall x\in E, \exists y\in E, {}^tAA{}^tAX = {}^tAY$

8) a) $I_n - Q = P$ est le projecteur orthogonal de $\mathrm{Im}(U)$ sur F

Ainsi ${}^tA(I_n-Q)=0$ car $\ker(w)=\ker(u^* o u)=\{0\}$ w est un isomorphisme

Donc ${}^tA={}^tAQ$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) Q est une matrice d'un projecteur orthogonal donc Q est diagonalisable et il existe P inversible, D diagonale telles que $Q = PDP^{-1}$

$\left.\begin{array}{l} tr(Q) = tr(D) \\ Rg(Q) = Rg(D) \end{array}\right\}$ deux matrices semblables

or $Q^2 = Q$ donc $P(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur de Q, ainsi $sp(Q) \subset \{0;1\}$

Ceci nous permet d'affirmer que $Rg(D) = tr(D)$

Donc $tr(Q) = tr(D) = Rg(D) = Rg(Q) = Rg(\pi) = Rg(u)$

Ainsi $tr(Q) = Rg(u)$

9) M est inversible $\Leftrightarrow Rg(M) = p$
$\Leftrightarrow Rg({}^tAA) = p \Leftrightarrow Rg(u^* \circ u) = p \Leftrightarrow Rg(u^*) = p$ 6)
$\Leftrightarrow Rg({}^tA) = p \Leftrightarrow Rg(A) = p$

Ainsi M inversible $\Leftrightarrow Rg(A) = p$

10) a) $MM^{-1} = I_p$, $MM^{-1}\,{}^tA = {}^tA$

Donc ${}^tAAM^{-1}\,{}^tA = {}^tA = {}^tAQ$ 8a).

Donc ${}^tA(Q - A(M)^{-1}\,{}^tA) = 0$

Comme $Rg(A) = Rg({}^tA) = p$
Donc $\dim(\ker({}^tA)) = 0$ d'après le théorème du rang, ainsi $Q - AM^{-1}\,{}^tA = 0$

D'où $Q = AM^{-1}\,{}^tA$

b)
```
def Calcule_Q(A):
    if al.matrix_rank(A)==p:
        B=np.transpose(A)
        M=np.dot(B,A)
        return np.dot(A,np.dot(al.inv(M),B))
    else :
        print("La matrice n'est pas de rang p")
```

11) M est symétrique $({}^tM = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = M)$
M est donc diagonalisable en base orthonormée
notons cette base $(X_1, \dots, X_p) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^p$ tel que
$\forall i \in [\![1;p]\!],\ MX_i = \lambda_i X_i \quad \lambda_i \in Sp(M)$

Ainsi $\quad {}^tX_i M X_i = {}^tX_i \lambda_i X_i = \lambda_i \|X_i\|^2 = \lambda_i$

Or pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que
$X = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i$

Ainsi $\quad {}^tXMX = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \alpha_i\alpha_j {}^tX_i M X_j = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \alpha_i\alpha_j {}^tX_i \lambda_j X_j$

$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \sum_{j=1}^{p} \langle X_i, X_j \rangle$

$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \lambda_i \quad$ car $\langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i \neq j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Or pour $i \in [\![1;p]\!]$, $\lambda_i = {}^tX_i M X_i = {}^tX_i {}^tA A X_i = \|AX_i\|^2 \geq 0$

Donc $\quad {}^tXMX \geq 0 \quad$ pour $\quad X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

Partie II

Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, soit $H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

12) $J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\|A(X+H)-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2$

$= \frac{1}{2}\left(\|(AX-Y)+AH\|^2 - \|AX-Y\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\|AX-Y\|^2 + 2\langle AX-Y, AH\rangle + \|AH\|^2 - \|AX-Y\|^2\right)$

$= \langle AX-Y, AH\rangle + \frac{1}{2}\|AH\|^2$

$= {}^t(AX-Y)AH + \frac{1}{2}\,{}^t(AH)AH$

$= {}^t(AX)AH - {}^tYAH + \frac{1}{2}\,{}^tH\,{}^tAAH$

$= {}^tX\,{}^tAAH - {}^tYAH + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$

$= \langle X, MH\rangle - \langle Y, AH\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$

$= {}^t(MH)X - {}^t(AH)Y + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$

$= {}^tHMX - {}^tH\,{}^tAY + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$ (M est symétrique)

$= \langle H, MX\rangle - \langle H, {}^tAY\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$

$= \langle MX - {}^tAY, H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$ $\langle . \rangle$ est bilinéaire

$= \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$

Ainsi: $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$

13) Si $D(X) = 0$ alors pour $H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$J_0(X+H) - J_0(X) \underset{(2)}{=} \frac{1}{2}\,{}^tHMH \geq 0$ 11)

D'où $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $J_0(X+H) \geq J_0(X)$

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 16	Session : 2025

Épreuve de : MATHS APPRO HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc J_0 possède un minimum global atteint en X

Réciproquement

Si J_0 admet un minimum global en un point $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ J_0(H+X) \geqslant J_0(X)$$

Donc pour $H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$\langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tHMH \geqslant 0$$

Donc pour $H = \lambda H'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $H' \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ on a

$$\lambda\langle D(X), H'\rangle + \frac{1}{2}\lambda^2\,{}^tH'MH' \geqslant 0$$

pour $\lambda > 0$, en divisant par λ on a

$\langle D(X), H'\rangle + \frac{1}{2}\lambda\,{}^tH'MH' \geqslant 0$

en passant aux limites avec $\lambda \to 0^+$, on a

$\langle D(X), H'\rangle \geqslant 0$

pour $\lambda < 0$, en divisant par λ et en passant aux limites avec $\lambda \to 0^-$, on obtient

$\langle D(X), H'\rangle \leqslant 0$

Donc $\langle D(X), H'\rangle = 0$

Ainsi $\forall H' \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ \langle D(X), H'\rangle = 0$

D'où $D(X) = 0$

Ainsi J_0 possède un minimum global atteint en un point $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $D(X) = 0$

~~15) a) Comme $X \in S_0$~~
~~$D(X) = 0$ donc $^tAAX = {}^tAY = {}^tAQY$ 8a)~~
~~Ainsi $^tA(AX - QY) = 0$~~

Le théorème de minimisation par projeté orthogonal permet d'affirmer que $\min_{X \in Im(A)} \|Z - Y\|$ existe et $Z = QY$

De plus $\min_{Z \in Im(A)} \|Z - Y\| = \min_{X \in \mathcal{M}_{p,1}} \|AX - Y\|$

Donc $AX = QY$

~~15) Comme $X \in S_0$~~
~~$D(X) = 0$~~
~~Donc $MX = {}^tAY$~~
~~Donc $M^{-1}MX = M^{-1}{}^tAY$~~
~~Donc $X = M^{-1}{}^tAY$~~
~~Donc $AX = AM^{-1}{}^tAY = QY$ 10)a)~~

b) $A(X - X_0) = AX - AX_0 = QY - QY = 0$ d'après la 15) car $X_0 \in S_0$ aussi

Ainsi $(X - X_0) \in Ker(A)$

~~$\langle X, X \rangle = \langle X - X_0, X \rangle + \langle X_0, X \rangle$ (<.> bilinéarité)~~
~~$= \langle X - X_0, X \rangle + \langle X_0, X - X_0 \rangle + \langle X_0, X_0 \rangle$~~
~~$= \langle X - X_0, X \rangle + \langle X_0, X_0 \rangle$~~
~~car $X_0 \in Ker(A)^\perp$ et $(X - X_0) \in Ker(A)$~~
~~Donc $\|X\|^2 = \langle X - X_0, X \rangle + \|X_0\|^2$~~

Si $X \neq X_0$ alors $\|X-X_0\|^2$ or

$$\|X-X_0\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X_0, X\rangle + \|X_0\|^2$$
$$= \|X\|^2 - 2(\langle X_0, X-X_0\rangle + \langle X_0, X_0\rangle) + \|X_0\|^2$$
$$= \|X\|^2 - 2\|X_0\|^2 + \|X_0\|^2 \text{ car } \begin{cases} X_0 \in \ker(A)^\perp \\ X-X_0 \in \ker(A) \end{cases}$$
$$= \|X\|^2 - \|X_0\|^2$$

Donc $\|X\|^2 > \|X_0\|^2$ par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $\|X\| > \|X_0\|$

c) $Rg(A) = p$ donc M est inversible. 9) et
$Q = AM^{-1}\,{}^tA$ (10 a))

D'après 15) a) $AX = QY$

D'où $M^{-1}\,{}^tAAX = M^{-1}\,{}^tAAM^{-1}\,{}^tAY$
i.e $X = M^{-1}\,{}^tAY$

Ainsi la questition 15 dans son ensemble permet d'affirmer que si X existe alors il est unique
Par synthèse, posons $X = M^{-1}\,{}^tAY$

$$D(X) = MX - {}^tAY = MM^{-1}\,{}^tAY - {}^tAY = 0$$
Ainsi $X \in S_0$

Donc par analyse synthèse, $S_0 = \{X\}$

16) a) $T = \|AX - AU_0\|^2 = \|AM^{-1}\,{}^tAY - AU_0\|^2$
$$= \|QY - AU_0\|^2 = \|Q(AU_0 + Z) - AU_0\|^2$$
$$= \|QAU_0 + QZ - AU_0\|^2$$
$$= \|AM^{-1}({}^tAA)U_0 + QZ - AU_0\|^2$$
$$= \|AU_0 + QZ - AU_0\|^2 = \|QZ\|^2$$
$$= {}^t(QZ)QZ = {}^tZ\,{}^tQQZ = {}^tZQZ$$
Q est la matrice d'un projecteur orthogonal (${}^tQ = Q$ $Q^2 = Q$)

Ainsi $T = \|QZ\|^2 = {}^tZQZ$

b)
```
def simuleT(A, sigma):

    a = np.shape(A)
    Z = rd.normal(0, sigma, a[0])
    Q = Calcule_Q(A)
    T = np.dot(np.transpose(Z), np.dot(Q, Z))
    return(T)
```

c)
```
def esperance(A, sigma)

    e = np.zeros(10000)
    for i in range(10000):
        e[i] = simuleT(A, sigma)
    esp = 0
    for i in range(10000):
        esp = esp + e[i]
    return esp/10000
```

d) Il semble que $\mathbb{E}(T) = n$ pour $\sigma = 1$

Le deuxième graphique semble suggérer $\mathbb{E}[T] = \sigma^2 \times n$ en effet plus le sigma est grand, plus l'espérance est grande et lorsque l'on regarde les valeurs on remarque ce lien avec σ^2

e) $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

D'après Koenig, Huygens,

$$\mathbb{E}(Z_1^2) = \mathbb{V}(Z_1) + E(Z_1)^2 = \mathbb{V}(Z_1) = \sigma^2$$

Ainsi $\mathbb{E}[Z_1^2] = \sigma^2$

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 16 | Session : 2025

Épreuve de : MATHS APPRO HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Soit $k \in \{3, 4\}$

$\displaystyle\int^{+\infty} \frac{t^k e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt$ converge

car $\displaystyle\frac{t^k e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (croissance comparée)

Par comparaison d'intégrales à fonctions positives $\left(\forall t \geq 1, \frac{1}{t^2} \geq 0, \frac{t^k e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \geq 0\right)$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^k e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt$ aussi :

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt \underset{\substack{u=-t \\ \text{affine}}}{=} (-1)^k \int_{-\infty}^{0} \frac{u^k e^{-\frac{u^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt$

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^k e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt$ converge

et vaut 0 si $k=3$ et $\displaystyle 2\int_0^{+\infty} \frac{t^4 e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt$ si $k=4$

Ainsi d'après le théorème de transfert

$E[Z_1^3] = 0.$

$\displaystyle E[Z_1^4] = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^4 e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

f) $T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{i,j} Z_i Z_j$ car $T = {}^tZQZ$

$= \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} Z_i^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2 \\ i\neq j}} Q_{ij} Z_i Z_j$ (on a séparé la diagonale)

$= T_1 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} Q_{ij} Z_i Z_j$ (les deux triangles sont égaux)

$= T_1 + 2T_2$

Ainsi $\underline{T = T_1 + 2T_2}$

$E(T) = E(T_1) + 2E(T_2)$ linéarité de l'espérance

$= \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} E(Z_i^2)$ car $E(T_2) = 0$ par indépendance des variables

$= \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} \sigma^2$

$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}$

$= \sigma^2 n$ $(\forall i \in [\![1;n]\!], Q_{ii} = 1)$

Ainsi $\underline{E(T) = \sigma^2 n}$

20) a)

$$\|u+v\|^2-\left(\|u\|+\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2=\left(\|u+v\|+\|u\|+\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)\left(\|u+v\|-\|u\|-\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)$$

$$=\|u+v\|^2-\left(\|u\|^2+2\frac{\|u\|\langle u,v\rangle}{\|u\|}+\frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}\right)$$

$$=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2-\left(\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}\right)$$

$$=\|v\|^2-\frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$=\frac{\|v\|^2\|u\|^2-\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

Ainsi $\|u+v\|^2-\left(\|u\|+\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2=\frac{\|v\|^2\|u\|^2-\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$

b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à u et v, on a

$$\|v\|^2\|u\|^2\geqslant\langle u,v\rangle^2$$

Ainsi $\|u+v\|^2\geqslant\left(\|u\|+\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2$

Ainsi par croissance de la racine carrée

$$\|u+v\|^2\geqslant\left|\|u\|+\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right|\geqslant\|u\|+\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}$$

Donc $\|u+v\|^2-\|u\|\geqslant\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}$

23) a) Soit $\lambda \in]0;+\infty[$

$$\left(|\alpha_i|+\sqrt{\lambda}\right)^2\left(|\alpha_i|-\sqrt{\lambda}\right)^2 \geq 0$$

Or $\left(|\alpha_i|+\sqrt{\lambda_i}\right)^2\left(|\alpha_i|-\sqrt{\lambda}\right)^2 = \left(\alpha_i^2+2\sqrt{\lambda}|\alpha_i|+\lambda\right)\left(\alpha_i^2-2\sqrt{\lambda}|\alpha_i|+\lambda\right)$

$$=\left(\alpha_i^2+\lambda-2\sqrt{\lambda}|\alpha_i|\right)\left(\alpha_i^2+\lambda+2\sqrt{\lambda}|\alpha_i|\right)$$

$$=\left(\alpha_i^2+\lambda\right)^2-4\lambda\alpha_i^2$$

Ainsi: $\left(\alpha_i^2+\lambda\right)^2 \geq 4\lambda\alpha_i^2$

Donc $\dfrac{\left(\alpha_i^2+\lambda\right)^2}{4\lambda} \geq \alpha_i^2$ $\quad (4\lambda > 0)$

Donc $\dfrac{1}{4\lambda} \geq \dfrac{\alpha_i^2}{\left(\alpha_i^2+\lambda\right)^2}$

Ainsi: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{\left(\alpha_i^2+\lambda\right)^2} \leq \frac{1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{k} y_i^2$

D'où $\forall \lambda \in]0;+\infty[$, $F(\lambda) \leq -1 + \dfrac{1}{4\lambda}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} y_i^2$

b) ~~Soit~~ $\cancel{\lambda \in]0;+\infty[}$

$\cancel{\lambda+\alpha_i^2 \geq \alpha_i^2}$ ~~donc~~ $\dfrac{1}{\left(\lambda+\alpha_i^2\right)^2} \leq \dfrac{1}{\left(\alpha_i^2\right)^2}$ décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

~~Donc~~ $\cancel{F(\lambda) \geq -1}$

~~En supposant qu'il existe~~ $\cancel{\lambda_0}$ ~~tel que~~ $\cancel{F(\lambda_0)=0}$

19) d) d'après 5 $\ker(B)^\perp = \operatorname{Im}({}^tB)$

Donc il existe $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$D(X_0) = {}^tBBV$$