Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Code épreuve : 283 **Nombre de pages :** 21 **Session :** 2025

Épreuve de : MATHS 2 ESCP / HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Première partie

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$
pour $i \in [\![1;n]\!]$
$X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc X_i admet un moment d'ordre 2 et d'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = E(X_i^2)$
car $E(X_i) = 0$

D'où $E(X_i^2) = 1$ car $V(X_i) = 1$
Ainsi par somme de variables aléatoires admettant une espérance, S_n admet une espérance et $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] = n$ par linéarité de l'espérance

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ E(S_n) = n$

b)
```
def simul(n):
    U=rd.normal(0,1,n)
    m=0
    for i in range(n):
        m=m+(U[i]**2)
    return m
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) Il semble que plus n est grand, plus l'écart pour un N grand de $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_{n_i}^2$ et n^2 est grand où $(S_{n_i}^2)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un échantillon de lois indépendantes de S_n

On peut donc conjecturer que $\lim_{n\to+\infty} E(S_n^2) = +\infty$. et $\lim_{n\to+\infty} E(S_n^2) - n^2 = +\infty$

Donc que $\lim_{n\to+\infty} V(S_n) = +\infty$

2a) $W_1(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ car $W_1 = \frac{1}{2}X_1^2$

Pour $x \leq 0$, $\mathbb{P}(W_1 \leq x) = 0$

Pour $x>0$, $\mathbb{P}(W_1 \leq x) = \mathbb{P}(X_1^2 \leq 2x) = \mathbb{P}(|X_1| \leq \sqrt{2x})$ par croissance de la racine sur $\mathbb{R}^+$

$$\mathbb{P}(W_1 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{2x} \leq X_1 \leq \sqrt{2x})$$
$$= \phi(\sqrt{2x}) - \phi(-\sqrt{2x})$$
$$= \phi(\sqrt{2x}) - (1-\phi(\sqrt{2x}))$$
$$= 2\phi(\sqrt{2x}) - 1$$

Ainsi $F_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x>0. \end{cases}$

F_{W_1} est continue sur $\mathbb{R}_*^-$ en tant que fonction nulle, continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition de $x \mapsto \sqrt{2x}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et ϕ continue sur $\mathbb{R}$.
De plus $\lim_{x\to 0^+} F_{W_1}(x) = 2\phi(0) - 1 = 0$ (continuité de ϕ en 0)

Ainsi $\lim_{x \to 0^+} F_{W_1}(x) = \lim_{x \to 0^-} F_{W_1}(x) = F_{W_1}(0)$

F_{W_1} est continue sur $\mathbb{R}$

F_{W_1} est aussi $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ sauf peut être en 0
car $x \mapsto \phi(\sqrt{2x})$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ par composition de telles fonctions.

Ainsi W_1 est à densité

Une densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 2 \times \frac{1}{\sqrt{2x}} \varphi(\sqrt{2x}) \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp(-x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

b) Ainsi d'après la 2), f_{W_1} étant une densité

$$\int_0^{+\infty} f_{W_1}(x)\,dx = 1 \quad \text{i.e} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}} = 1.$$

Or $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$

D'où $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

c) Montrons par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$

$P(n)$: $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

Initialisation

$n=1$

D'après 2a) et 2b), $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Ainsi $W_1 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $P(1)$ est vraie

Hérédité

Soit $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrons $P(n+1)$

$W_{n+1} = \frac{1}{2} S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} X_{n+1}^2 = W_n + \frac{1}{2} X_{n+1}^2$

W_n et $\frac{1}{2} X_{n+1}^2$ sont indépendantes par le lemme des coalitions ($X_1, \dots, X_{n+1}$ indépendantes)

$\frac{1}{2} X_{n+1}^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ car X_{n+1} et X_1 sont deux loi normales $\mathcal{N}(0;1)$ et le raisonnement de la 2a) et 2b) reste vrai

Par hypothèse de récurrence $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

Donc par stabilité de la loi γ entre variables indépendantes par somme, $W_{n+1} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$

$P(n+1)$ est vraie

Conclusion : par principe de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

d) $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(2W_n) = 2\mathbb{E}(W_n) = 2 \times \frac{n}{2} = n$ (linéarité de l'espérance)

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(S_n) = n$.

$\mathbb{V}(W_n) = \frac{n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\left(W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)$

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Ainsi d'après Koenig-Huygens,

$$\mathbb{E}(W_n^2) = \mathbb{V}(W_n) + \mathbb{E}(W_n)^2 = \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2}\right)^2$$
$$= \frac{n(n+2)}{4}$$

Or $W_n^2 = \frac{1}{4} S_n^2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(S_n^2) = n(n+2)$

De nouveau d'après Koenig-Huygens, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$V(S_n) = E(S_n^2) - E(S_n)^2 = n(n+2) - n^2 = 2n$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{V}(S_n) = 2n$

3)a) Pour $n \geq 3$, $n > 2$ donc $\frac{n}{2} > 1$ donc $\frac{n}{2} - 1 > 0$

Ainsi $\Gamma(\frac{n}{2} - 1)$ et $\Gamma(\frac{n}{2})$ sont bien définies et convergentes

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \times \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})} dt$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \times \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})} dt$ converge

Donc d'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}\left(\frac{1}{W_n}\right)$ existe et vaut $\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ d'après le calcul précedent

$\left(\frac{1}{W_n}\right.$ est à valeurs dans $]0;+\infty[$ et est bien définie car $\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, X_i(\omega) \neq 0$ (énoncé)$\left.\right)$

$\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{1}{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ car $\forall x>0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Ainsi $\mathbb{E}\left(\frac{1}{W_n}\right) = \frac{1}{\frac{n}{2}-1} = \frac{2}{n-2}$

Or $\frac{1}{W_n} = \frac{1}{\frac{1}{2}S_n} = \frac{2}{S_n}$, par linéarité de l'espérance on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-2}$

(b) Pour $n \geq 3$, d'après 3a), $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet un moment d'ordre 2 donc elle admet aussi une espérance.

4) Notons F la fonction de répartition de T_n.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}(|T_n| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq T_n \leq x)$

$= F(x) - F(-x)$

Notons aussi f la densité de T_n.
$g : x \mapsto F(x) - F(-x)$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ par somme et composition de telles fonctions (F est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ car f est $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$)
Ainsi pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = 2f(x) > 0$.

g est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x \to 0} g(x) = F(0) - F(0) = 0$, d'après le théorème de la bijection, g est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0;1[$
Comme $1-\alpha \in [0;1[$, il existe $t_{n,\alpha} \in \mathbb{R}^+$ (un unique) tel que $g(t_{n,\alpha}) = 1-\alpha$.

Or $g(t_{n,\alpha}) = \mathbb{P}(|T_n| \leq t_{n,\alpha})$

Ainsi il existe un unique $t_{n,\alpha} \in \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{R}^+$) tel que

$$\mathbb{P}(|T_n| \leq t_{n,\alpha}) = 1-\alpha$$

5) a) Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes par le lemme des coalitions pour $n \geq 3$, ainsi $\mathbb{E}\left(\frac{Y}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe et $\mathbb{E}\left(\frac{Y}{\sqrt{S_n}}\right) = \mathbb{E}(Y) \times \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = 0$ car $\mathbb{E}(Y) = 0$
$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

Or $T_n = \sqrt{n} \times \frac{Y}{\sqrt{S_n}}$ donc $\mathbb{E}(T_n)$ existe par linéarité

et $\mathbb{E}(T_n) = 0$ pour $n \geq 3$.

5b) De la même manière, Y^2 et $\frac{1}{S_n}$ admettent une espérance et sont indépendantes par le lemme des coalitions donc $E\left(\frac{Y^2}{S_n}\right)$ existe et $\mathbb{E}(Y^2/S_n) = E(Y^2) \times \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right)$

Or d'après Koenig-Huygens,

$$E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 1.$$

Ainsi $\mathbb{E}\left(\frac{Y^2}{S_n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-2}$

Donc $T_n^2 = n\frac{Y^2}{S_n}$ admet une espérance

et $\mathbb{E}(T_n^2) = \frac{n}{n-2}$ par linéarité de l'espérance

Donc $\mathbb{V}(T_n)$ existe et d'après Koenig-Huygens

$\forall n \geqslant 3,\ \mathbb{V}(T_n) = \frac{n}{n-2}$ car $E(T_n)^2 = 0$

c) Pour $n \geqslant 3$ $(T_n - Y)^2 = T_n^2 - 2T_nY + Y^2$

Par linéarité de l'espérance, $E((T_n - Y)^2)$ existe

$$\mathbb{E}((T_n - Y)^2) = E(T_n^2) - 2\mathbb{E}\left(\frac{Y^2}{\sqrt{S_n/n}}\right) + E(Y^2)$$

$$= \frac{n}{n-2} - 2\sqrt{n}E(Y^2)E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) + 1$$

car Y^2 et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes, et les deux autres espérances ont été calculées à la 5b)

Ainsi $\mathbb{E}((T_n - Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - 2\sqrt{n}\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}S_n}}\right)$$

par linéarité de l'espérance.

D'où $\forall n \geqslant 3,\ E((T_n - Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 21 | Session : 2025

Épreuve de : MATHS 2 ESCP/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) a) Soit $n \geq 2$

$W_{n+1} = W_n + \frac{1}{2} X_{n+1}^2$ comme $X_{n+1}^2(\Omega) \subset \mathbb{R}_*^+$

On a $W_{n+1} \geq W_n$ donc par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

$\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{W_n}}$ ainsi la croissance de l'espérance assure que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

Donc $\forall n \geq 3$, $U_{n+1} \leq U_n$, $(U_n)_{n\geq 2}$ est décroissante

$W_2 \hookrightarrow \gamma(1)$

Comme $\Gamma(\frac{1}{2})$ converge, par le théorème de transfert, U_2 existe et

$$U_2 = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Ainsi $U_2 = \sqrt{\pi}$

(NB : La suite est ainsi bien définie car tous les termes sont majorés par U_2 et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{W_n}}(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$)

b) Montrons par récurrence pour $n \geqslant 2$

$$P(n) : U_{n+1} U_n = \frac{2}{n-1}$$

Mais d'abord, pour $n \geqslant 3$,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \sqrt{2}\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) \text{ et } E\left(\frac{1}{W_n}\right) = 2E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{2}{n-2}$$

Ainsi d'après la formule de Koenig-Huygens

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)^2 = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)^2\right) - V\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{2}{n-2} - V\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

c)
```
def suite_u(n):
    u = np.zeros(n-1)
    u[0] = np.sqrt(np.pi)
    for i in range(1, n-1):
        u[i] = 2*1/(i*u[i-1])
    return u
```

d) On peut conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n U_n^2 = 2$

car le v représente le n qui croît progressivement et pour n qui s'approche de 80, on est déjà proches de 2.

On conjecture ainsi que $U_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

e) Démontrons le : pour $n \geqslant 2$, $U_n \geqslant 0$

en effet U_n est l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs positives.

Ainsi $(U_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et minorée donc convergente.

Pour $n\geq 3$, $0\leq U_{n+2}\leq U_{n+1}\leq U_n$

en multipliant par U_{n+1}, on a $(U_{n+1}\geq 0)$

$$0\leq U_{n+2}U_{n+1}\leq U_{n+1}^2\leq U_n U_{n+1}$$

Donc $0\leq \frac{2}{n}\leq U_{n+1}^2\leq \frac{2}{n-1}$ 6b).

en multipliant par $\frac{n}{2}$, on a donc

$$1\leq \frac{n}{2}U_{n+1}^2\leq \frac{n}{n-1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n-1}=1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}U_{n+1}^2=1$

(théorème des gendarmes)

Ainsi $U_{n+1}^2\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n+1}$ d'où $U_n^2\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n}$.

Or $U_n\geq 0$ donc en passant à la racine

$$U_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2}{n}}$$

7) $\mathbb{E}((T_n-Y)^2)=\frac{2n-2}{n-2}-\sqrt{2n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$=2+\frac{2}{n-2}-\sqrt{2n}\,U_n$

$=2+\underset{n\to+\infty}{o}(1)-2+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$ car $U_n\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2}{n}}$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}((T_n-Y)^2)=0$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev comme T_n-Y possède un moment d'ordre 2 pour $n\geq 3$ (5c), on a pour $\varepsilon>0$

$$0\leq \mathbb{P}(|T_n-Y-\mathbb{E}(T_n-Y)|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathbb{V}(T_n-Y)}{\varepsilon^2}$$

Or par linéarité de l'espérance, en utilisant la 5a) et car $E(Y)=0$ car $Y\hookrightarrow N(0;1)$

On a $\mathbb{E}(T_n-Y)^2=0$ et $E(T_n-Y)=0$

D'après Koenig-Huygens, on a ainsi

$$\mathbb{V}(T_n-Y)=\mathbb{E}((T_n-Y)^2)$$

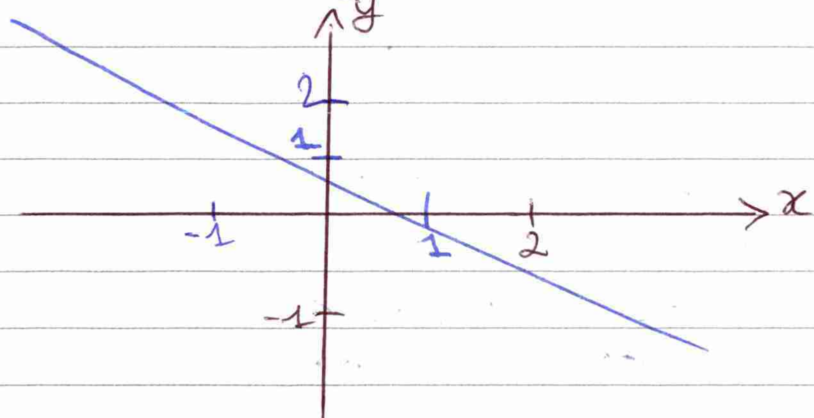
Ainsi $\forall\varepsilon>0$, $0\leq\mathbb{P}(|T_n-Y|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathbb{E}((T_n-Y)^2)}{\varepsilon^2}$

Comme $\lim_{n\to+\infty}E((T_n-Y)^2)=0$, par encadrement

$$\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|T_n-Y|\geq\varepsilon)=0$$

Ainsi $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} Y$.

Deuxième Partie

8) 

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

9) a)

$$(x,y) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a-y \\ x \leq y+b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a-y \\ x-y-b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq a-y \Rightarrow x \in]-\infty; a-y]$$

Ainsi si $(x,y) \in A$ alors $x \in]-\infty; a-y]$

Si $x \in]-\infty, a-y]$

$x+y \in]-\infty, a]$ donc $x+y \leq a$.

$x-y \in]-\infty, a-2y]$

Or $y \geq d$ donc $-2y \leq -2d$ donc $a-2y \leq a-(a-b)$

Donc $a-2y \leq b$ donc $x-y \leq b$

D'où $(x,y) \in A$, Ainsi $(x,y) \in A \Leftrightarrow x \in]-\infty, a-y]$

b) Comme $\mathbb{1}_A(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a-y} \varphi(x)\,dx = \phi(a-y)$

d'après 9a).

10) Soit $y \leq d$

Montrons que $(x,y) \in A \Leftrightarrow x \in]-\infty, b+y]$

Si $(x,y) \in A$ alors $x-y \leq b$ donc $x \leq b+y$

donc $x \in]-\infty, b+y]$

Si $x \in]-\infty, b+y]$.

$x-y \in]-\infty; b]$ donc $x-y \leq b$

$x+y \in]-\infty, b+2y]$

$b+2y \leq b+2d$ car $y \leq d$ or $2d+b = a$

Donc $x+y \in]-\infty; a]$ donc $x+y \leq a$

Ainsi $(x,y) \in A$

Donc $(x,y) \in A \Leftrightarrow x \in]-\infty, b+y]$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b+y} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)\,dx = \phi(b+y)$ (u1)

11) a) Notons $E_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y\leq a\}$, $E_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x-y\leq b\}$

E_1 et E_2 sont fermés car

$E_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)\leq a\}$ avec f continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=x+y)$

$E_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, h(x,y)\leq b\}$ avec h continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, h(x,y)=x-y)$

Ainsi comme $A=E_1\cap E_2$, par intersection finie de fermés, A est un fermée de $\mathbb{R}^2$.

b) $$\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{1}_A(x,y)\varphi_1(x)\,dx\right)\varphi_2(y)\,dy$$

(le théorème s'applique car A est une partie fermée)

$$\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\int_d^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy+\int_{-\infty}^{d}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy$$

(linéarité d'intégrales convergentes)

$$=\int_d^{+\infty}\Phi(a-y)\varphi(y)\,dy+\int_{-\infty}^{d}\Phi(b+y)\varphi(y)\,dy \quad \begin{pmatrix}9)\\ \text{et } 10)\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\left(\begin{smallmatrix}u=y-d\\ \text{affine}\end{smallmatrix}\right)\\ \left(\begin{smallmatrix}v=d-y\\ \text{affine}\end{smallmatrix}\right)}}{=}\int_0^{+\infty}\Phi(a-u-d)\varphi(u+d)\,du+\int_0^{+\infty}\Phi(b+d-v)\varphi(d-v)\,dv$$

$$=\int_0^{+\infty}\Phi(a-u-d)\varphi(u+d)+\Phi(b+d-u)\varphi(d-u)\,du$$

(linéarité d'intégrales convergentes)

Or $b+d=c$ et $a-d=c$, φ est paire, on obtient
Ainsi
$$\mathbb{P}(X, Y\in A)=\int_0^{+\infty}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\phi(c-z)\,dz$$

12) $\phi(c-z)=\int_{-\infty}^{c-z}\varphi(u)\,du = \int_{-\infty}^{c}\varphi(t-z)\,dt$
(pour $z\geq 0$) $\left(\begin{array}{c} t=u+z \\ \text{affine}\end{array}\right)$

On obtient donc
$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{c}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,dt\right)dz$$ par linéarité d'intégrales convergentes

13) Soient $u, v\in\mathbb{R}$

$$\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{u-v}{\sqrt2}\right)^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2}\left((u+v)^2+(u-v)^2\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times\left(2u^2+2v^2\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right)$$

$$\varphi(u)\varphi(v)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{-u^2}{2}-\frac{v^2}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{-1}{2}(u^2+v^2)\right)$$

Ainsi $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\varphi(u)\varphi(v)=\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt2}\right)$

Copie anonyme - n°anonymat : 181583

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 21 | **Session :** 2025

Épreuve de : MATHS2 ESCP/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

14) D'après le théorème admis, on peut intervertir les intégrales, ainsi

$$P((X,Y)\in A)=\int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,dz\right)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(d+z)\varphi(t-z)\,dz\right)dt+\int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(d-z)\varphi(t-z)\,dz\right)dt$$

(linéarité d'intégrales convergentes)

$$=\int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}\right)dz\right)dt+\int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right)dz\right)dt \quad 13)$$

$$=\int_{-\infty}^{c}\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)\left(\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}\right)dz\right)dt+\int_{-\infty}^{c}\varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right)\left(\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right)dz\right)dt$$

OR $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}\right)dz=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{d-t}{\sqrt{2}}}^{+\infty}\varphi(u)\,du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\frac{t-d}{\sqrt{2}}}\varphi(v)\,dv$ (φ paire)

$\left(u=\dfrac{d-t+2z}{\sqrt{2}}\right.$ affine$\left.\right)$ $\quad$ ($v=-u$ affine)

$$=\phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

De même $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right)dz=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi $P((X,Y)\in A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-d}^{c} \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) dt$

16) En appliquant le raisonnement à X et Y,
comme $c+d = a$ et $c-d = b$.

On a $\mathbb{P}((X,Y)\in A) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

$=$

Troisième Partie

17) On a $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k$ (coordonnées dans une base orthonormale)

Ainsi $x - \langle x, a_1 \rangle a_1 = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k$

Or $\langle x, a_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Donc $\langle a, a_1 \rangle a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \times (1, \dots, 1)$.

$= (\overline{x}, \overline{x}, \dots, \overline{x})$

Ainsi $\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k = x - (\overline{x}, \dots, \overline{x}) = (x_1 - \overline{x}, \dots, x_n - \overline{x})$

---

b) D'après la 17 a),

$\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle \langle x, a_k \rangle = \langle \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k, x \rangle$ (bilinéarité de $\langle \rangle$)

$= \langle (x_1 - \overline{x}, \dots, x_n - \overline{x}), x \rangle$

$= (x_1 - \overline{x}) x_1 + \dots (x_n - \overline{x}) x_n$

$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}) x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{x} x_k$

Or $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2 x_k \overline{x} + \overline{x}^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_k \overline{x} + \sum_{k=1}^{n} \overline{x}^2 - x_k \overline{x}$

$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_k \overline{x} + \overline{x} \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{x} - x_k \right)$

$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_k \overline{x} + \overline{x} \left(\underbrace{n \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{k=1}^{n} x_k}_{=0} \right)$

Ainsi $\sum_{k=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{x}x_k$

Donc $\sum_{k=2}^{n}\langle x, a_k\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

18) b) Si R_1 et R_2 sont indépendantes alors $cov(R_1, R_2)=0$

Réciproquement, si $cov(R_1,R_2)=0$.

Par linéarité de la covariance,

$\beta_1 V(X_1)+(\beta_1+\beta_2)cov(X_1,X_2)+\beta_2 V(X_2)=0$.

i.e $\beta_1+\beta_2=0$ car $V(X_2)=V(X_1)=1$ ($N(0;1)$) et $cov(X_1,X_2)=0$ (X_1,X_2 indépendantes)

donc $\beta_1=-\beta_2$ donc $R_2=\beta_1(X_1-X_2)$

19) a) $X_1,\dots,X_n$ sont independantes et de loi $N(0;1)$, par stabilité par somme de la loi normale

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow N(0,n)$$

et $\overline{X} \hookrightarrow N(0,\frac{1}{n})$

b) $\overline{X} = \langle (X_1,\dots,X_n),(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{n}}\langle X, a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1$

$U = \sum_{k=2}^{n}\langle X, a_k\rangle^2 = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2$ (17b)

c) D'après le théorème, $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes donc le lemme des coalitions assure que

$\overline{X}$ et U sont indépendantes

Comme $Y_2, \dots, Y_n$ sont $(n-1)$ variables aléatoires de loi $N(0;1)$ indépendantes,

$$U = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2 \hookrightarrow \chi^2(n-1)$$

20) a) $V = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sigma X_i + \mu - \sigma \overline{X} - \mu)^2$

$= \sigma^2 U$ ainsi $V = \sigma^2 U$

b) $E(U) = n-1$ car $U \hookrightarrow \chi^2(n-1)$ 18c)

Ainsi $\mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1} V\right) = \frac{1}{n-1} \mathbb{E}[V] = \frac{1}{n-1} \sigma^2 \times (n-1) = \sigma^2$
(linéarité de l'espérance)

$\frac{1}{n-1} V$ étant une variable aléatoire fonction d'un n-échantillon de Z indépendante de σ^2

$\frac{1}{n-1} V$ est ainsi un estimateur sans biais de σ^2

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751