# Copie anonyme - n°anonymat : 181583

E6-00143
181583
Mat Appro

| Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2025 |
|---|---|---|

Épreuve de : MATHS EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

## Exercice 1

1) a) $g$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ par produit de telles fonctions ($x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln(x)$)

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} + \ln(x) \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(e) \geq \ln(x)$
$\Leftrightarrow e \geq x$ (par croissance de exp sur $\mathbb{R}$)

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ (croissance comparée)

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1/e$ | $\searrow$ | $0$ |
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

b) Pour $k \geq 3$, on a $k \geq e$ donc $g(k+1) \leq g(k)$

Ainsi : $\forall k \geq 3$, $\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \frac{\ln(k)}{k}$

$\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante

$\frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$

Comme $\forall k \geq 4$, $g(k) \leq g(4)$

On a $\forall k \geq 4$, $\frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}$

2)a) Pour $x \in ]n;+\infty[$, $x>0$ et $x-n>0$
Ainsi $f_n$ est dérivable sur $]n;+\infty[$ par composition avec $\ln$ $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+)$ et somme de fonctions dérivables

Pour $x \in ]n;+\infty[$, $f_n'(x) = \ln(x) + \frac{x-n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n}$

$= \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{(x-n)^2 - x^2}{x(x-n)}$

$= \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{n^2 - 2nx}{x(x-n)}$

Ainsi $\forall x > n$, $f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{n^2-2nx}{x(x-n)}$

b) $f: t \mapsto \ln(t)$ est concave sur $\mathbb{R}_*^+$ car $\ln$ est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_*^+)$

et $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\ln'(t) = \frac{1}{t}$, $\ln''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$

Ainsi $\ln$ est en dessous de sa tangente en 1 d'équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x-1$

Ainsi $\forall t > 0$, $\ln(t) \leq t-1$

Pour $x > n$, $\frac{x}{x-n} > 0$, ainsi $\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{x}{x-n} + 1 \leq 0$

Comme $f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{x}{x-n} + 1 - \frac{n}{x}$

On a $\left(\frac{-n}{x}<0\right)$ $\forall x>n,\ f_n'(x)<0$

Ainsi $f_n$ est strictement decroissante sur $]n;+\infty[$

c) $f_n(n+1)=\ln(n+1)-(n+1)\ln(1)=\ln(n+1)>0$

$f_n(n+2)=2\ln(n+2)-(n+2)\ln(2)$

$\frac{f_n(n+2)}{2(n+2)}=g(n+2)-\frac{\ln(2)}{2}\leq 0$ (1b)

Comme $2(n+2)>0$, $f_n(n+2)\leq 0$

$f_n$ est continue sur $[n+1,n+2]$, strictement décroissante, elle réalise donc une bijection vers $[f_n(n+2), f_n(n+1)]$

Comme $0\in[f_n(n+2), f_n(n+1)]$ d'après ce qui précède

il existe un unique $x_n\in[n+1,n+2]$ tel que $f(x_n)=0$.

3) $x_n\in[n+1,n+2]$ ainsi pour $n\geq 2$

$n+1\leq x_n\leq n+2$ donc $1+\frac{1}{n}\leq\frac{x_n}{n}\leq 1+\frac{2}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{2}{n}=1$

Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=1$

$x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n$

4a) Soit $n \geq 2$

$f_n(x_n) = 0$ OR $f_n(x_n) = (x_n - n)\ln(x_n) - x_n \ln(x_n - n)$

Ainsi $x_n \ln(x_n - n) = (x_n - n)\ln(x_n)$

i.e $\ln(x_n - n) = (x_n - n)\dfrac{\ln(x_n)}{x_n}$ $\quad (x_n \geq n+1 > 0)$

Ainsi $\forall n \geq 2 \ \ln(x_n - n) = (x_n - n)\dfrac{\ln(x_n)}{x_n}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ $\left(x_n \underset{+\infty}{\sim} n\right)$

Ainsi par croissance comparée,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$

5)a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1)}{1+x-1} = \ln'(1) = 1$ (taux d'accroissement)

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

On en déduit par composition avec $(U_n)_{n \geq 2}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - n) = 1$ 4b)

Ainsi $\ln(U_n + 1) \underset{n \to +\infty}{\sim} U_n$

$\ln(1 + n + U_n) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{U_n}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{U_n}{n}\right)$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} + \dfrac{U_n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln(u) = +\infty$

# Copie anonyme - n°anonymat : 181583

| Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2025 |
|---|---|---|

Épreuve de : MATHS EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a $\dfrac{\ln(1+n+U_n)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Ainsi $\ln(1+n+U_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

b) Pour $n \geq 2$, $\ln(x_n) = \ln(1+n+U_n)$

Ainsi $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ 5a)

$\ln(x_n - n) = \ln(1+U_n)$, ainsi $\ln(x_n - n) \underset{n\to+\infty}{\sim} U_n$ 5a)

$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $(x_n - n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

Donc en rassemblant tous les équivalents, d'après 4a),

$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

6) Pour $n \geq 2$, $\dfrac{\ln(n)}{n} \geq \dfrac{1}{n}$.

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (Riemann $\alpha = 1$)

Par comparaison, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n}$ diverge

Comme $U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$

Comme $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge, par comparaison

$\sum_{n \geq 2} U_n$ diverge aussi $\left( \forall n \geq 2, \frac{\ln(n)}{n} \geq 0 \right.$

et il existe $N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n \geq 0$ $\left. \left( \begin{array}{c} \text{équivalente} \\ \text{à un nombre} \\ \text{positif} \end{array} \right) \right)$

$U_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}} = 0$ (CROISSANCE COMPARÉE)

$\frac{\ln(n)^2}{n^2} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Par comparaison de séries positives (à termes positifs) $\left( \forall n \geq 2, \frac{1}{n^{3/2}} \geq 0, \frac{\ln(n)^2}{n^2} \geq 0 \right)$

Comme $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge $\left( \text{Riemann } \begin{array}{c} \alpha = \frac{3}{2} \\ \alpha > 1 \end{array} \right)$

$\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$ converge aussi

Par comparaison, $\left( \forall n \geq 2, U_n^2 \geq 0, \frac{\ln(n)^2}{n^2} \geq 0 \right)$

$\sum_{n \geq 2} U_n^2$ converge.

Exercice 2

1) a) Soit $x \in F$

$\|p(x)\|^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \langle x, p^2(x)\rangle$ p est symétrique car projecteur orthogonal

$= \langle x, p(x)\rangle$ car $p^2 = p$

$= \langle x, p(x) - x\rangle + \langle x, x\rangle$ bilinéarité de $\langle . \rangle$.

$= -\langle x, x - p(x)\rangle + \|x\|^2$

$= \|x\|^2$ car $x \in F$ et $(x - p(x)) \in F^\perp$ (projection orthogonale)

Ainsi $\|p(x)\|^2 = \|x\|^2$ donc $\|p(x)\| = \|x\|$

Ainsi $F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$

b) Soit $x \in E$

$\|x\|^2 = \|x - p(x) + p(x)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$

d'après le theorème de Pythagore car

$\langle x - p(x), p(x)\rangle = 0$ car $(x - p(x)) \in F^\perp$ et $p(x) \in F$
p projecteur orthogonal sur F

Ainsi $\forall x \in E, \|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$

c) Soit $x \in E$ tel que $\|p(x)\| = \|x\|$

Donc d'après 1b), $\|x - p(x)\|^2 = 0$

Donc $\|x - p(x)\| = 0$ donc $x - p(x) = 0$ car
$\langle . \rangle$ est définie positive
Ainsi $x = p(x) \in F$

Donc $x \in F$

Par double inclusion $F = \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$

Pour $x \in E$, $\|x - p(x)\|^2 \geq 0$

Donc $\|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2$ donc $\|x\| \geq \|p(x)\|$
(croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$)

Ainsi $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

2) a) Soit $x \in F_1 \cap F_2$

$p_1(x) = x$ et $p_2(x) = 0$

Ainsi $x = p_1(x) = p_1(p_2(x)) = p_3(x) \in F_3$

car $p_1 \circ p_2 = p_3$ et $p_3$ projection orthogonale sur $F_3$

Ainsi $F_1 \cap F_2 \subset F_3$

b) Comme $x \in F_3$, $\|p_3(x)\| = \|x\|$ 1c)

or $p_3(x) = p_1 \circ p_2(x) = p_1(p_2(x))$

D'après l'inégalité de 1c) avec $y = p_2(x) \in E$,

on a $\|p_3(x)\| \leq \|p_2(x)\|$

Ainsi $\forall x \in F_3$, $\|x\| \leq \|p_2(x)\|$

Comme $\|x\| \geq \|p_2(x)\|$ (toujours 1c)

On a $\|x\| = \|p_2(x)\|$

et d'après l'égalité de la 1c) de nouveau

# Copie anonyme - n°anonymat : 181583

| Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2025 |
|---|---|---|

Épreuve de : MATHS EDHEC

**Consignes**
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$x \in F_2$

Donc $\|x\| = \|p_2(x)\|$

OR $\|x\| = \|p_3(x)\| = \|p_1(p_2(x))\|$

Comme $p_2(x) \in E$, on a $p_2(x) \in F_1$ (1c) OR $p_2(x) = x$ car $x \in F_2$

Donc $x \in F_1$,

c) La 2b) assure que $F_3 \subset F_2 \cap F_1$.

Donc $F_3 = F_2 \cap F_1$ par double inclusion

d) $p_3$ est un projecteur orthogonal donc il est symétrique de $E$, $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p_3(x), y\rangle = \langle x, p_3(y)\rangle$

Pour $(x,y) \in E^2$

$$\langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle = \langle p_3(x), y\rangle = \langle x, p_3(y)\rangle$$
$$= \langle x, p_1 \circ p_2(y)\rangle = \langle p_1(x), p_2(y)\rangle$$
$$= \langle p_2 \circ p_1(x), y\rangle$$

On a appliqué le fait que $p_1$ et $p_2$ sont aussi des projecteurs orthogonaux

Ainsi $\forall (x,y)\in E^2$, $\langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle = \langle p_2\circ p_1(x), y\rangle$

c) $\forall (x,y)\in E^2$, $\langle p_1\circ p_2(x) - p_2\circ p_1(x), y\rangle = 0$
(bilinéarité de $\langle\,\rangle$)

Ainsi $\forall x\in E$, $p_1\circ p_2(x) - p_2\circ p_1(x) = 0$
car $(p_1\circ p_2(x) - p_2\circ p_1(x)) \in E^\perp \cap E$

Ainsi $\forall x\in E$, $p_1\circ p_2(x) = p_2\circ p_1(x)$

D'où $p_1\circ p_2 = p_2\circ p_1$

3) a) $p$ est endomorphisme de $E$ car composition d'endomorphismes

Pour $x\in E$, $p^2(x) = p(p_1(p_2(x))) = p(p_2(p_1(x)))$ (car $p_1\circ p_2 = p_2\circ p_1$)

$= p_1(p_2^2(p_1(x))) = p_1\circ p_2\circ p_1(x)$ $p_2^2 = p_2$ $p_2$ projecteur

$= p_2\circ p_1\circ p_1(x)$ $(p_1\circ p_2 = p_2\circ p_1)$

$= p_2(p_1(x))$ $(p_1^2 = p_1)$

$= p_1(p_2(x)) = p(x)$

Ainsi $p^2 = p$

$p$ est donc un projecteur

b) Soit $(x,y) \in E^2$

$\langle p(x), y\rangle = \langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle = \langle p_2(x), p_1(y)\rangle$ ($p_1$ projecteur orthogonal)

$= \langle x, p_2(p_1(y))\rangle$ $p_2$ projecteur orthogonal

$= \langle x, p_2 \circ p_1(y)\rangle$ $p_2$ et $p_1$ commutent

$= \langle x, p(y)\rangle$

Ainsi $\forall (x,y) \in E^2, \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$

$p$ est un endomorphisme symétrique de $E$

c) 3a) et 3b) permettent d'affirmer que $p$ est un projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p) = F_1 \cap F_2$

($\mathrm{Im}(p) \subset F_1 \cap F_2$ directement et pour $x \in F_1 \cap F_2$, $p_1(x) = x = p_2(x)$ donc $p_1 \circ p_2(x) = x \in \mathrm{Im}(p)$)

4) Si $p_1$ et $p_2$ sont deux projections orthogonales respectivement sur $F_1$ et $F_2$, $p_1 \circ p_2$ est une projection orthogonale sur $F_1 \cap F_2$ si et seulement si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

Exercice 3

Partie 1

1) $f$ est continue sur $\mathbb{R}_*^-$ par produit de $x \mapsto -2x$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ continues sur $\mathbb{R}_-^*$. $f$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ en tant que fonction nulle, $f$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en $0$.

$f$ est positive sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}^-$, $f$ est positive car moins fois moins fait plus)

Pour ~~A~~ $\leq 0$

$$\int_A^0 f(x)dx = \left[e^{-x^2}\right]_A^0 = 1 - e^{-A^2} \xrightarrow[A\to-\infty]{} 1$$

Ainsi $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ converge et vaut 1.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1

f est bien une densité de probabilité

2) Soit $x>0$, $F(x)=1$ car $X(\Omega)=]-\infty;0]$

Soit $x\leq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x -2te^{-t^2}dt = \lim_{B\to-\infty}\left[e^{-t^2}\right]_B^x = e^{-x^2}$

Ainsi ~~$\forall x \in \mathbb{R}$~~, $F(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x>0 \\ e^{-x^2} \text{ si } x\leq 0 \end{cases}$

3) Une densité de $Y \hookrightarrow N(0;\frac{1}{2})$ est donnée par

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$

4) Soit $B\leq 0$, posons $I_B = \int_B^0 -2t^2e^{-t^2}dt$

Posons $u: t\mapsto e^{-t^2}$ $v: t\mapsto t$, u et v sont $\mathcal{C}^1([B;0])$
et $\forall t\in[B,0]$, $u'(t) = -2te^{-t^2}$, $v'(t)=1$
Ainsi par intégration par parties,

$$I_B = \left[te^{-t^2}\right]_B^0 - \int_B^0 e^{-t^2}dt = -Be^{-B^2} - \int_B^0 e^{-t^2}dt \; (**)$$

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t)dt = 1$.

# Copie anonyme - n°anonymat : 181583

| Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2025 |
|---|---|---|

**Épreuve de :** MATHS EDHEC

**Consignes**
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{\substack{u=-t \\ \text{affine}}}{=} -\int_0^{-\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^0 e^{-u^2} du$$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt$

en passant aux limites avec $B \to -\infty$, comme $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\lim_{B \to -\infty} -Be^{-B^2} = 0$ (croissance comparée)

On a $\lim_{B \to -\infty} I_B = \frac{-\sqrt{\pi}}{2}$

Donc $\int_{-\infty}^0 t f(t) dt$ converge et vaut $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Donc ($X(\Omega) = ]-\infty; 0]$), X admet une espérance et $E(X) = \frac{-\sqrt{\pi}}{2}$

5) Soit $x < 0$, $G(x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x) = 0$

Pour $x \geq 0$

$G(x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x) = \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{x})$ (croissance de ~~$x \mapsto \sqrt{x}$~~ sur $\mathbb{R}_+$)

$= \mathbb{P}(-X \leq \sqrt{x})$ $(X(\Omega) = ]-\infty; 0])$

$= \mathbb{P}(X \geq -\sqrt{x})$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi $G(x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -\sqrt{x})$

$= 1 - e^{-x}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

On remarque donc que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

6) $Z$ admet une espérance et $E(Z) = 1$ ($Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$)

Ainsi comme $X^2 = Z$, $X$ admet un moment d'ordre 2 donc une variance

D'après Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \left(\frac{-\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ainsi $V(X) = 1 - \frac{\pi}{4}$ (NB: on est rassuré par le calcul car $V(X) \geq 0$)

7)
```
def simulX(n):
    M=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        M[i]=-np.sqrt(rd.exponential(1))
    return M
```
(NB: Il ne faut pas oublier le − devant np.sqrt car $X(\Omega) = ]-\infty ; 0]$)

```
def EsperanceX(n):
    e=0
    simulX(n)
    for i in range(n):
        e = e + M[i]
    return e/n
```

Partie 2

8) h est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et 1 (elle est continue en 1 mais pas en 0)

$$\int_0^1 h(x)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\int_0^1 dx - 2\int_0^1 x\,dx$$

(linéarité de l'intégrale)

$$= 2 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2 - 2\times\frac{1}{2} = 1$$

Ainsi $\int_0^1 h(x)\,dx = 1$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = 1$ ($h(x)=0$ pour $x \notin [0;1]$)

h est donc une densité de probabilité

9) $Y(\Omega)=[0;1]$, pour $x \geq 1$, $H(x)=1$

pour $x \leq 0$, $H(x)=0$

Pour $x \in ]0;1[$, $H(x) = P(Y \leq x) = \int_0^x 2(1-t)\,dt$

$$= \left[-(1-t)^2\right]_0^x = 1-(1-x)^2$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1-(1-x)^2 \text{ si } x \in ]0;1[ \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(\Omega) \subset [0;1]$

Pour $x \geq 1$, $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 1$
Pour $x \leq 0$, $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 0$
Pour $x \in ]0;1[$

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(Y_i \leq x)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_1 \leq x)$$ $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi

$$= \mathbb{P}(Y_1 \leq x)^n$$

$$= H(x)^n$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ H(x)^n \text{ si } x \in ]0;1[ \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases} = H(x)^n$

Or pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{P}(\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x)$

$$= \mathbb{P}\left(M_n - 1 \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \quad (n \geq 1)$$

$$= \mathbb{P}\left(M_n \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \left(H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$

(NB: $T_n$ est à densité car $H$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ sauf peut être en 0 et 1 et par composition de $x \mapsto 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}$ $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ en tant que fonction affine donc $F_n$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ sauf peut être en 0 et 1 et continue sur $\mathbb{R}$ )

11) Soit $y \in \mathbb{R}$

$$n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \times \frac{y}{n} \quad \left(\frac{y}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right)$$

Ainsi par continuité de exp sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 181583

| Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2025 |
|---|---|---|

Épreuve de : MATHS EDHEC

Emplacement QR Code

**Consignes**
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

12) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 1+\frac{x}{\sqrt{n}} \leq 0 \\ \left(1-(1-x)^2\right)^n \text{ si } \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \in ]0;1[ \\ 1 \text{ si } \frac{x}{\sqrt{n}}+1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = 1$$

Si $x \geq 0$, $F_n(x) = 1$ (car $\frac{x}{\sqrt{n}}+1 \geq 1$)
Si $x<0$, comme $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, -1 \leq \frac{x}{\sqrt{n}} \leq 0$ par définition d'une limite

Donc $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-(1-x)^2\right)^n = e^{-(1-x)^2}$ (11)

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ e^{-(1-x)^2} \text{ si } x<0 \end{cases}$

Je n'a pas trouvé la fonction de répartition de $X$.

Problème 1

1) Soit $n \geq 1$ (NB : dans la consigne $n \in \mathbb{N}$ mais le produit commence à 1)

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k} = \frac{1}{4^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{k} = \frac{1}{4^n} \times \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+n)}{n!}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or $\prod_{k=1}^{n}(k+n) = \prod_{k=n+1}^{2n} k = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{n!}$

Ainsi $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k} = \frac{1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!} = B_n$

Ainsi $\forall n \geqslant 0$, $B_n = \frac{1}{4^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}$

($n=0$ est donné par convention et car $B_0 = 1$)

```
def B(n):
  P=1
  for k in range(1,n+1):
      P = P*(k+n)/(4*k)
  return P
```

Partie 2

2) $W_0 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^0 dt = \frac{\pi}{2}$

$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$

$W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$

3) Soit $n \geqslant 2$

$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1}(t) - \sin^n(t)) dt$ linéarité de l'intégrale

$= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)(\sin(t) - 1) dt$

comme $t \mapsto \sin^n(t)(\sin(t)-1)$ est continue

18 / 20

et négative sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, $(\forall t\in[0;\frac{\pi}{2}], \sin(t)\in[0;1])$

On a avec les bornes croissantes, $W_{n+1}-W_n\leq 0$

Ainsi $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante

Soit $n\geq 0$

4) Posons $u : t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ $v : t\mapsto -\cos(t)$, $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1([0;\frac{\pi}{2}])$ et pour $t\in[0;\frac{\pi}{2}]$, $u'(t)=(n+1)\cos(t)\sin^n(t)$

$v'(t)=\sin(t)$

Par intégration par parties,

$$W_{n+2}=\int_0^{\pi/2}\sin(t)\sin^{n+1}(t)\,dt=\left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\sin^n(t)\,dt$$

$$=(n+1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(t))\sin(t)^n\,dt=(n+1)W_n-(n+1)W_{n+2}$$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$

5) Montrons par récurrence pour $n\in\mathbb{N}$ :

$$P(n) : \begin{cases} W_{2n}=\frac{\pi}{2}B_n \\ W_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)B_n}\end{cases}$$

Initialisation

$n=0$, la 2) assure que $\begin{cases} W_0=\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}B_0 & (B_0=1) \\ W_1=1=\frac{1}{(2\times 0+1)B_0}\end{cases}$

Hérédité

Soit $P(n)$ vraie pour $n\in\mathbb{N}$, montrons $P(n+1)$

$$W_{2n+2}=\frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \quad 4)$$

$$=\frac{2n+1}{2n+2}\times\frac{2n+2}{2n+2}\times\frac{\pi}{2}B_n \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$=\frac{\pi}{2}\times B_{n+1}$$

car $B_{n+1}=\frac{1}{4}\times\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}B_n$

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \quad 4)$$

$$= \frac{(2n+2)\times(2n+2)}{(2n+3)(2n+2)} \times \frac{1}{(2n+1)B_n} \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$= \frac{1}{2n+3} \times \frac{1}{\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} B_n}$$

$$= \frac{1}{(2n+3)B_{n+1}}$$

Conclusion: par principe de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$, $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$

(NB : $\forall n \geq 0$, $B_n > 0$)

6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n-1>0)$

$$W_{2n-1} = W_{2(n-1)+1} = \frac{1}{(2(n-1)+1)B_{n-1}} = \frac{1}{(2n-1)B_{n-1}} \quad 5)$$

Or $(2n-1)B_{n-1} = \frac{(2n-1)!}{4^{n-1}(n-1)!^2} = \frac{4n^2}{2n} \times \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} = 2n B_n$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{2n-1} = \frac{1}{2n B_n}$

7) Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1} \text{ par décroissance de } (W_n)$$

i.e $\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2n B_n}$ (5 et 6)

En multipliant par $\frac{2}{\pi} B_n \geq 0$, on a

$$0 \leq \frac{2}{(2n+1)\pi} \leq B_n^2 \leq \frac{2}{2n\pi}$$

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2025

Épreuve de : MATHS EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}} \quad (B_n \geq 0)$$

Or $2n+2 \geq 2n+1$ donc $\frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{2n+1}$

donc $\frac{2}{\pi} \times \frac{1}{2n+2} \leq \frac{2}{\pi(2n+1)}$

Donc $B_n \geq \sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}} \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}$

8) en multipliant par $\sqrt{n} \times \sqrt{\pi}$ l'inégalité 7)

On a pour $n \geq 1$, $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{\pi n} B_n \leq 1$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$ car $n \underset{n \to +\infty}{\sim} n+1$

On a par encadrement $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\pi n} B_n = 1$

Donc $B_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

Partie 3

9) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k(\Omega) = \{0;1\}$

$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$

(Car $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1)$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_k = -1) = 1$)

Ainsi $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, $E(Y_k) = \frac{1}{2}$, $V(Y_k) = \frac{1}{4}$

b) $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}X_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k$

Les $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes par lemme des coalitions et $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, on a donc $T_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

c) $T_n(\Omega) = \{0, \dots, n\} = [\![0, n]\!]$

$T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} S_n$ i.e $S_n = 2T_n - n$

Donc $S_n(\Omega) = \{2j - n, j \in [\![0;n]\!]\}$

Pour $k \in S_n(\Omega)$, il existe donc $j \in [\![0;n]\!]$, $k = 2j - n$

$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(2T_n - n = k) = \mathbb{P}(2T_n = k + n)$

$= \mathbb{P}(T_n = \frac{k+n}{2}) = \mathbb{P}(T_n = j)$

$= \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

Ainsi $\forall k \in S_n(\Omega)$, $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

10) a)

$\{k \in [\![0, n-1]\!], S_{2k+1} = 0\} = \{\emptyset\}$ car il y a un nombre forcément différent de 1 et de $-1$,

Ainsi $R_n = \text{card}(\{k \in [\![1; n]\!], S_{2k} = 0\})$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{\frac{2k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2^2}\right)^k$ 9)

$= \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = B_k$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = B_k$

c)

11) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in [k, k+1]$

$k \leq t \leq k+1$ donc $\sqrt{k} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{k+1}$

(croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$)

donc $\displaystyle\int_k^{k+1} \sqrt{k}\,dt \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \sqrt{k+1}\,dt$

i.e $\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{k+1}$

i.e $2\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k+1}$

i.e $\dfrac{1}{2\sqrt{k}} \geq \dfrac{\sqrt{k+1}\,(\sqrt{k})}{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}$

OR $\dfrac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}} = \dfrac{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}) \times (\sqrt{k} + \sqrt{k+1})}{k - k+1} = \dfrac{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}{-1}$

$k \leq t \leq k+1$ donc $\dfrac{1}{2\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}$

(décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ sur $\mathbb{R}_*^+$)

Donc $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{2\sqrt{k}}\,dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{2\sqrt{k+1}}\,dt$

i.e $\dfrac{1}{2\sqrt{k}} \geq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}$

D'où $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

et $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ en décalant d'un indice

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})}$

# Copie anonyme - n°anonymat : 181583

| Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2025 |
| --- | --- | --- |

Épreuve de : MATHS EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

12) Soit $n \geq 1$.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \leq B_k \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) \quad (11 \text{ et } 7)$$

Ainsi $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right) \leq B_k \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$

en sommant sur $[\![1;n]\!]$, on a

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{2}\right) \leq E(R_n) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$$

Par téléscopage

D'où $\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} E(R_n) \leq 1$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = 1$, par encadrement

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi n}}{2} E(R_n) = 1$

Donc $E(R_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \sqrt{n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 4

13) a) $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

D'où $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ i.e $\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$

b) Soit $x\in[0;4[$

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{4}\right)^n \sqrt{n\pi}$$

Comme pour $n\geqslant 1$, $\sqrt{n}\leq n$

Comme $\sqrt{\pi}\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{x}{4}\right)^n$ converge (série géométrique dérivée convergente $\left|\frac{x}{4}\right|<1$)

Par comparaison de séries à termes positifs ($\forall n\geqslant 1$, $\left(\frac{x}{4}\right)^n\sqrt{n\pi}\geqslant 0$, $\sqrt{\pi}n\left(\frac{x}{4}\right)^n\geqslant 0$)

$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{x}{4}\right)^n\sqrt{n\pi}$ converge

Donc $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge aussi par comparaison de séries à termes positifs.

14) Soit $x \in [0;4[$, soit $y \in [0;4[$ avec $y \geq x$

$$f(y) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n - x^n}{\binom{2n}{n}} \geq 0$$

Car $\forall n \geq 1$, $y^n - x^n \geq 0$ car $y \geq n$

Donc $f$ est croissante sur $[0;4[$

15) a) pour $n \geq 1$, $x \in [0;4[$
l'inverse est une fonction décroissante et l'inégalité de la 7) permettent d'affirmer que

$$\sqrt{n}\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{n+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

or pour $n \geq 1$, $\sqrt{n+1} \leq n+1$ et $\sqrt{n} \geq 1$

Donc $\forall n \geq 1, \forall x \in [0;4[$, $\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq (n+1)\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n$

b) en sommant entre 0 et $+\infty$, on obtient pour $x \in [0;4[$

$$\sqrt{\pi}\frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{x}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{4}\right)\right)$$

i.e $\sqrt{\pi}\frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi} \times \left(\frac{x}{4} \times \frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x}\right)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ par encadrement, $f$ est prolongeable par continuité en 0.

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$ par entrainement

16)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751