# Copie anonyme - n°anonymat : 224734

| | | |
|---|---|---|
| Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 35 | Session : 2025 |

Épreuve de : Maths 2 HEC/ESCP

D2-00069 224734 Mat2 Appro

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Première partie

1a) $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

donc $X_i$ admet un moment d'ordre 2.

Par Koenig-Huygens : on a $\forall i \geq 1$ $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2$

donc $\forall i \geq 1$ $E(X_i^2) = 1 + 0^2 = 1$

De fait, par la linéarité de l'espérance :

$E(S_n)$ existe et $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n$

b)
```
def simul(n):
    Y = rd.normal(0,1)**2
    T = np.array(Y, [n,n])
    S = np.sum(T,0)
print(S)
```

c) Le script semble simuler un grand nombre de fois la moyenne empirique de $S_n^2$.

En repérant les valeurs de $S_n$ à l'aide d'un graphique

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2a) $W_1 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} X_1^2$

$W_1(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $F_{W_1}$ la fonction de répartition de $W_1$.

si $x < 0$ : $F_{W_1}(x) = 0$

si $x \geq 0$ : $F_{W_1}(x) = p\left(\frac{1}{2} X_1^2 \leq x\right) = p\left(X_1^2 \leq 2x\right)$

$F_{W_1}(x) = p(|X_1| \leq \sqrt{2x})$ car $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$

$F_{W_1}(x) = \phi(\sqrt{2x}) - \phi(-\sqrt{2x})$ car $X_1 \hookrightarrow N(0,1)$ donc $X_1$ est une VA à densité.

$F_{W_1}(x) = 2\phi(\sqrt{2x}) - 1$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Montrons que $\phi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \phi(0) + \int_{0}^{x} \varphi(t)\,dt$$

or $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

donc $G : x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\,dt$ est l'unique primitive de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $0$.

donc $G$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc $\phi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, $x \mapsto \sqrt{2x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

donc $x \mapsto 2\phi(\sqrt{2x}) - 1$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ par composition.

Ainsi, $F_{W_1}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $0$. (1)

De fait, $F_{W_1}$ est déjà continue sur $\mathbb{R}^*$.

Étude en $0$ :

$\lim_{x\to 0^-} F_{W_1}(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} F_{W_1}(x) = 2\phi(0) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$

par continuité de $\phi$ en $0$.

et $F_{W_1}(0) = 0$

Donc $F_{W_1}$ est continue en $0$. Donc $F_{W_1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (2)

(1) et (2) assure que $W_1$ est une VA à densité

Une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_{W_1}(x) = F_{W_1}'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\sqrt{2}\,\phi'(\sqrt{2x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Posons $f_{W_1}(0) = 0$

et au final : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

---

c) Au titre de densité de probabilité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{W_1}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f_{W_1}(t)\,dt = 1$$ car $f_{W_1}$ est nulle sur $\mathbb{R}^-$

donc $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}\,dx = 1$

donc $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Au final : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

# Copie anonyme - n°anonymat : 224734

| | | |
|---|---|---|
| Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 35 | Session : 2025 |
| Épreuve de : Maths 2 HEC/ESCP | | |

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) $W_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2}$

or $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indépendante. Ainsi, par le lemme des coalition, $\left(\frac{X_1^2}{2}, \dots, \frac{X_n^2}{2}\right)$ sont aussi indépendants.

avec ce qui précède :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{1/2-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donc $W_1 \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$

or $(X_1, \dots, X_n)$ sont de même loi donc

$\forall i \in [\![1;n]\!]$ $\frac{X_i^2}{2}$ suit la même loi que $W_1$.

donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $\frac{X_i^2}{2} \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$

L'indépendance de $\left(\frac{X_1^2}{2}, \dots, \frac{X_n^2}{2}\right)$ et la stabilité de la loi gamma assure que :

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

d) Ainsi, $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

donc $E(W_n) = V(W_n) = \frac{n}{2}$.

or $S_n = 2W_n$ ainsi par linéarité de l'espérance :

$E(S_n)$ existe et $E(S_n) = 2E(W_n) = 2 \times \frac{n}{2} = n$

$V(W_n)$ existe donc $V(S_n)$ existe et :

$V(S_n) = V(2W_n) = 4V(W_n) = 4 \times \frac{n}{2} = 2n$

3a) Soit $n \geqslant 3$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$

et $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ donc $W_n(\Omega) \subset ]0;+\infty[$

Par théorème de transfert :

$\frac{1}{W_n}$ admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\,dt$ converge absolument.

ssi $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\,dt$ converge.

6/

car $f_{W_n}$ est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et $\forall t > 0 \quad \frac{1}{t} f_{W_n}(t) \geq 0$.

or $t \mapsto \frac{1}{t} f_{W_n}(t) = \frac{1}{t} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} t^{(\frac{n}{2}-1)-1} e^{-t}$

qui est continue sur $]0 ; +\infty[$.

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\,dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{(\frac{n}{2}-1)-1} e^{-t}\,dt$

or $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ est défini sur $]0 ; +\infty[$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\,dt$ converge si $\frac{n}{2} - 1 > 0$

si $n > 2$

si $n \geq 3$

or $n \geq 3$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\,dt$ converge.

donc $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance.

Donc $E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{(\frac{n}{2}-1)-1} e^{-t}\,dt$

donc $E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Par un raisonnement similaire à : 2d)

$2W_n = S_n$ or $X_i(\omega) \neq 0$ donc $S_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$

donc $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{2W_n}$

or $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance donc par linéarité de l'espérance : $E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ existe.

et $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

or $\forall x > 0 \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

pour $x = \frac{n}{2} - 1 > 0$ car $n \geqslant 3$.

on a $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)$

donc $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{n}{2}-1}$

$$E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-2}$$

d) Soit $n \geqslant 3$

On peut montrer similairement que : $\frac{1}{\sqrt{W_n}}$ admet une espérance.

en effet, $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

et $W_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

Ainsi par théorème de transfert :

$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ existe ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t)\,dt$ converge absolument

ssi $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t)\,dt$ converge

car $f_{W_n}$ est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et $\forall t > 0$ $\frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t) > 0$

or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t)$ est continue sur $]0;+\infty[$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t)\,dt$ est impropre en $+\infty$ et en $0$

or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)-1} e^{-t}\,dt$

qui converge ssi $\frac{n}{2} - \frac{1}{2} > 0$ ou $n > 1$ ou $n \geqslant 2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

car $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ est définie sur $]0 ; +\infty[$

or $n \geq 3 \geq 2$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t)\, dt$ converge.

et $E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ existe.

de plus $\forall \omega \in \Omega \quad W_n(\omega) > 0$

donc $\forall \omega \in \Omega \quad \sqrt{W_n(\omega)} > 0$

et $\frac{1}{\sqrt{W_n(\omega)}} > 0$ (cela a bien du sens) car $W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$

avec la relation $S_n = 2W_n$

on a $\sqrt{S_n} = \sqrt{2}\sqrt{W_n}$

donc $\frac{1}{\sqrt{S_n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{W_n}}$

par linéarité de l'espérance : $E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{2}} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

donc $\forall n \geq 3$ (voire même $n \geq 2$ dans ce cas précis) $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une espérance.

4) Soit $\alpha \in ]0,1[$

Posons $F_{Tn}$ la fonction de repartition de $T_n$.

Montrons $F_{Tn}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_{Tn}(x) = P(T_n \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_{Tn}(t)\,dt = F_{Tn}(0) + \int_{0}^{x} f_{Tn}(t)\,dt$$

or $f_{Tn}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

donc $G : x \mapsto \int_0^x f_{Tn}(t)\,dt$ est l'unique primitive de $f_{Tn}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Ainsi $G$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc $F_{Tn}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (1)

Donc $F_{Tn}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (2) (car dérivable sur $\mathbb{R}$, car $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$)

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad F_{Tn}'(x) = G'(x) = f_{Tn}(x) > 0$

car $f_{Tn}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

donc $F_{Tn}$ est strictement croissante. (3)

Au titre de fonction de repartition (d'une VA à densité):

$\lim\limits_{x \to -\infty} F_{Tn}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{Tn}(x) = 1$ (4)

Les 4 points (1), (2), (3), (4) assurent que:

$F_{T_n}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

On $p(|T_n| \le t_{n,\alpha}) = F_{T_n}(t_\alpha) - F_{T_n}(-t_{n,\alpha})$

car $T_n$ est une VA à densité.

Montrons $\exists!\, t_\alpha \in \mathbb{R}$, $F_{T_n}(t_\alpha) - F_{T_n}(-t_\alpha) = 1-\alpha$.

Je n'aboutis pas ici... Je me propose

ou du moins, je ne suis pas sûr de comment conclure.

alors plutôt de montrer que $F_{|T_n|}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_{|T_n|}(x) = F_{T_n}(x) - F_{T_n}(-x)$

or $F_{T_n}$ est une bijection donc $x \mapsto F_{T_n}(x) - F_{T_n}(-x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. (différence de deux bijection est une bijection?)

↳ Si ce n'est pas le cas, j'admet que $F(|T_n|)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

or $1-\alpha \in ]0,1[$ et $F(|T_n|)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

D'après le théorème de la bijection: $\exists!\, t_{n\alpha} \in \mathbb{R}$ /

$F_{|T_n|}(t_{n,\alpha}) = \alpha \in ]0,1[$

L'existence et l'unicité est prouvée

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 35 | Session : 2025

Épreuve de : Maths 2 HEC / ESCP

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5a) Soit $n \geq 3$

$Y$ et les $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Le lemme des coalitions assure alors que :

* $Y$ et $S_n$ sont indépendantes (car $Y$ et $(X_1^2, \dots, X_n^2)$ le sont, donc encore par le lemme des coalitions : $Y$ et $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ le sont).

* De même, $Y$ et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes encore par le lemme des coalitions.

* Finalement, encore par le lemme des coalitions, $Y$ et $\frac{1}{\sqrt{S_n/n}}$ sont indépendantes.

or avec 3b) $E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe donc $E\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}\right)$ existe

et $Y \hookrightarrow N(0,1)$ donc $E(Y)$ existe et vaut $0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Par indépendance de $Y$ et $\frac{1}{\sqrt{S_n/n}}$

$E(T_n)$ existe et $E(T_n) = E(Y) \times E\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}\right)$

par linéarité de l'espérance

En effet si $E(X)$ et $E(Y)$ existent et $X$ et $Y$ sont indépendants, $XY$ admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$

donc $E(T_n) = E(Y) \times \sqrt{n} \times E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = 0$

car $E(Y) = 0$

b) Soit $n \geq 3$

de la même manière :

$V(T_n)$ existe ssi $E(T_n^2)$ existe

or $\forall \omega \in \Omega \quad T_n^2(\omega) = \left(\sqrt{n} \frac{Y(\omega)}{\sqrt{S_n(\omega)}}\right)^2 = n \times \frac{Y^2(\omega)}{S_n(\omega)}$

donc $T_n^2 = n \times \frac{Y^2}{S_n}$

or $Y$ et $S_n$ sont indépendantes d'après la question précédente (avec le lemme des coalitions) donc par le lemme des coalitions : $nY^2$ et $\frac{1}{S_n}$

sont indépendantes.

Or avec Koenig-Huyghens $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 1$

car $Y \hookrightarrow N(0,1)$ donc par linéarité $E(nY^2) = n\,1 = n$

et $E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{n-2}$ d'après (3a).

L'indépendance de $nY^2$ et $\frac{1}{S_n}$ et l'existence

de $E(nY^2)$ et $E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ assure que :

$E(T_n^2)$ existe et que $E(T_n^2) = E\left(\frac{nY^2}{S_n}\right) = E(nY^2) \times E\left(\frac{1}{S_n}\right)$

donc $E(T_n^2)$ existe et $E(T_n^2) = (n \times 1) \times \frac{1}{n-2} = \frac{n}{n-2}$

$T_n$ admet un moment d'ordre 2 donc $V(T_n)$ existe

et par Koenig Huyghens et le fait que $E(T_n) = 0$

$$\boxed{V(T_n) = E(T_n^2) + E(T_n)^2 = \frac{n}{n-2} + 0 = \frac{n}{n-2}}$$

c) Soit $n \geq 3$

Sous réserve d'existence :

Par Koenig-Huyghens : $E((T_n - Y)^2) = V(T_n - Y) + (E(T_n - Y))^2$

or par linéarité de l'espérance : $E(T_n - Y) = E(T_n) - E(Y) = 0$
d'après 5a)

donc $E((T_n - Y)^2) = V(T_n - Y)$

or $V(T_n)$ existe, $V(Y)$ existe et $T_n$ et $Y$ admettent un moment d'ordre 2 donc $\mathrm{cov}(T_n, Y)$ existe.

Ainsi. $E((T_n - Y)^2) = V(T_n - Y) = V(T_n) + (-1)^2 V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(T_n, -Y)$

car $T_n$ et $Y$ ne sont pas indépendantes

$$E((T_n - Y)^2) = V(T_n) + V(Y) - 2\,\mathrm{cov}(T_n, Y)$$

$$E((T_n - Y)^2) = \frac{n}{n-2} + 1 - 2\,\mathrm{cov}(T_n, Y) \quad (\text{avec } Sb)$$

$$E((T_n - Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - 2\,\mathrm{cov}(T_n, Y)$$

or $\mathrm{cov}(T_n, Y) = E(T_n Y) - \underbrace{E(T_n)E(Y)}_{=0}$ avec Koenig Huyghens.

car $E(T_n) = E(Y) = 0$

donc $\mathrm{cov}(T_n, Y) = E(T_n Y) = E\left(\frac{\sqrt{n}\, Y^2}{\sqrt{S_n}}\right)$

sous réserve d'existence.

même justification qu'à (Sn) et (Sb)

a avec tout le travail ^fait^ précédemment, on a encore que $Y$ et $S_n$ sont indépendantes (lemme des coalitions)

donc le lemme des coalitions assure encore que :

$\sqrt{n}\, Y^2$ et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes or $E(\sqrt{n}\,Y^2)$ existe et vaut avec K-H et par linéarité de l'espérance $\sqrt{n}\times 1=\sqrt{n}$.

et $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe avec b)

et comme $W_n=\dfrac{1}{2}S_n$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{S_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{W_n}}$

car $\forall \omega\in\Omega \quad S_n(\omega)>0$ et $W_n(\Omega)>0$.

donc $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{S_n}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}E\left(\dfrac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

AINSI, l'indépendance de $\sqrt{n}\,Y^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{S_n}}$ et le fait que leurs espérances existent assure que :

$E(T_nY)$ existe et

$cov(T_n,Y)=E(T_nY)=\sqrt{n}\,E(Y^2)\times E\left(\dfrac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$

donc $\boxed{cov(T_n,Y)=\sqrt{n}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times E\left(\dfrac{1}{\sqrt{W_n}}\right)}$ par linéarité de l'espérance

Au final:

$$E((T_n-Y)^2) = V(T_n - Y) = \frac{2n-2}{n-2} - 2\,\mathrm{cov}(T_n, Y)$$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \times E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

$$\boxed{E((T_n-Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)}$$

6a) Soit $n \geq 2$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2}(X_{n+1})^2 = W_n + \frac{1}{2}(X_{n+1})^2$$

or $\forall \omega \in \Omega \quad \frac{1}{2} X_{n+1}^2(\omega) \geq 0$

donc $\underline{\forall \omega \in \Omega \quad W_{n+1}(\omega) \geq W_n(\omega) > 0}$

$\underline{\text{car } W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right) \text{ donc } W_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}}$

par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}^+$

$\underline{\forall \omega \in \Omega \quad \sqrt{W_{n+1}(\omega)} \geq \sqrt{W_n(\omega)} > 0}$

au final, par decroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

On a $\forall \omega \in \Omega \quad 0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{W_{n+1}(\omega)}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{W_n(\omega)}}$

$\forall n \geq 2$ $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ existe d'après (b) (travail fait pour justifier que $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe)

donc $\forall n \geq 2$ $\forall \omega \in \Omega$ on a par croissance de l'espérance :

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}(\omega)}}\right) \leq E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n(\omega)}}\right)$$

donc $\forall n \geq 2$ $u_{n+1} \leq u_n$

donc $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante

$u_2 = E\left(\dfrac{1}{\sqrt{W_2}}\right)$ où $W_2 = \dfrac{1}{2} S_2 = \dfrac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)$

Or $W_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ ou $W_2 \hookrightarrow \gamma(1)$ d'après (2c).

$t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ or $W_2(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$

Par théorème de transfert :

$E\left(\dfrac{1}{\sqrt{W_2}}\right)$ existe ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_2}(t)\,dt$ converge absolument

ssi $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\,dt$ converge car $f_{W_2}$ est nulle sur $\mathbb{R}^-$

et $\forall t > 0 \quad \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_2}(t) > 0$

or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_2}(t)$ est continue sur $]0;+\infty[$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_2}(t)\,dt$ est impropre en $0$ et en $+\infty$

or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_2}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^{1/2-1} e^{-t}\,dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

car $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ est définie sur $]0;+\infty[$

or $\frac{1}{2} > 0$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_2}(t)$ est conv.

$\boxed{\text{donc } u_2 \text{ existe et } u_2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ d'après (2b)}}$

b) Soit $n \geq 2$

les termes de la suite sont définies et avec

le travail fait précédemment :

$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right)$ et $E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ existent et

$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} t^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-t}\,dt$ car $W_{n+1} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$

$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\,dt$

# Copie anonyme - n°anonymat : 224734

| Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 35 | Session : 2025 |
|---|---|---|
| Épreuve de : HEC Maths 2 | | |

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

donc $E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \times \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

et de la même manière :

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\, dt$$

car $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-t}\, dt$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Au final :

$$u_{n+1} \times u_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) \times E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \times \cancel{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \frac{1}{\cancel{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}} \times \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$u_{n+1} \times u_n = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \times \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}}{\cancel{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)} \times \left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$u_{n+1} \times u_n = \dfrac{1}{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{n-1}$

car $\forall n > 0$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

c) def suite_u(n):

```
        S= np.array []
        u= np.pi
        for k in range (n):
                u= 2 /(~~uk~~ * (k-1))
        S= S + np.append (u)
   return (S)
```

On connait $u_2$ donc on peut construire les autres termes avec la relation demandée en 6b).

$\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n(n-1)}$ car $u_n > 0$

donc $u_3 = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}(2-1)}$

$u_4 = \dfrac{2}{u_3(3-1)}$

etc....

d) Le programme suivant exécute ceci :

* il affiche dans un tableau numpy les 80 premières valeurs de la suite $u_n$.

* créée un vecteur qui renvoie la liste des entiers entre 2 et 81 (non compris) donc $[\![2 ; 80]\!]$

* et génère la courbe des points définies par les listes V et U. et relie les points.

La forme de la courbe représentant les valeurs de $(u_n)^2 n$ semble converger vers 2. (pour $n = 80$)

On conjecture que: $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n^2 \times n) = 2$

on conjecture (en vue de (e)) que comme $2 \neq 0$

$$u_n^2 \times n \underset{+\infty}{\sim} 2$$

donc $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

$$\boxed{\text{donc } u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}}$$

e) On a $\forall n \geq 2$ $u_{n+1} \times u_n = \dfrac{2}{n-1}$

or $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par 0.

donc $(u_n)_{n \geq 2}$ converge (théorème de la convergence monotone)

Notons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On a: $\forall n \geq 2$ $0 \leq u_n \leq u_2$

Par théorème de prolongement des inégalités :

$$0 \leq l \leq 2$$

Or par extraction, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

or $\dfrac{2}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$

donc $u_{n+1} \times u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

or $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$ car $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

donc $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$

par passage à une puissance constante dans un équivalent. On a bien :

$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ car $\forall n \geqslant 2 \quad u_n \geqslant 0$

7) On vise :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - 4| \geqslant \varepsilon) = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Emplacement QR Code

| | | |
|---|---|---|
| Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 35 | Session : 2025 |

Épreuve de : Maths 2 HEC/ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

## Partie II

8) supposons $a = 2$ et $b = -1$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 2 \text{ et } x-y \leq -1 \}$$

donc $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \leq -1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2x \leq 1 \\ x-y \leq -1 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x-y \leq -1 \end{cases}$

$\boxed{\text{donc nécessairement } x \leq \frac{1}{2}}$

~~donc~~ $\cancel{\begin{cases} -1 \leq 2y \leq 2 \\ \end{cases}}$ ~~donc~~ $\cancel{\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases}}$

SUITE →

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ / $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$

donc $2x \leq 3$

donc nécessairement $x \leq \frac{3}{2}$.

et nécessairement car $x \leq 1+y$

alors $2 \geq x+y \geq 2y+1$

donc $y \leq \frac{1}{2}$

9) Soit $y \in \mathbb{R}$ / $y \geq d$

a) Supposons $(x,y) \in A$

donc $\begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \end{cases}$ donc $\begin{cases} x \leq a-y \\ x-y \leq b \end{cases}$ donc $\begin{cases} x \leq a-y \\ x \leq b+y \end{cases}$

donc $x \leq a-y$

donc $x \in ]-\infty, a-y]$

Supposons $x \in ]-\infty ; a-y]$

donc $x \leq a-y$ et $\boxed{x+y \leq a}$

et $x-y \leq a-2y$ (1)

or $a = 2d + b$.

et $y \geq d$ donc $-2y \leq -2d$.

donc $a-2y \leq 2d - 2d + b$. (2)

donc (1) et (2) assure que $\boxed{x-y \leq 2d - 2d + b = b}$

donc $(x,y) \in A$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a-y} 1 \times \varphi(x)\,dx + \int_{a-y}^{+\infty} 0 \times \varphi(x)\,dx = \phi(a-y) + 0$

car $\mathbb{1}_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

or avec a) $(x,y) \in A \Leftrightarrow \cancel{x}\ \in ]-\infty, a-y]$

donc $\mathbb{1}_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq a-y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \phi(a-y)$

1c) Supposons $y \leq d$.

Montrons que $(x,y) \in A$ si $x \in ]-\infty ; b+y]$

Supposons $(x,y) \in A$.

donc $x+y \le a$ et $x-y \le b$

donc $x \le b+y$.

et $x \in ]-\infty ; b+y]$

Supposons $x \in ]-\infty ; b+y]$.

$x \le b+y$ donc $\boxed{x-y \le b}$ (1)

et $x+y \le b+2y$

or $-b = 2d - a$ donc $b = a-2d$

or $y \le d$ donc $2y \le 2d$.

donc $x+y \le b+2y = a-2d+2y \le a-2d+2d = a$

$\boxed{\text{donc } x+y \le a}$ (2)

(1) et (2) assure la réciproque

donc $(x,y) \in A \iff x \in ]-\infty ; b+y]$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b+y} 1 \times \varphi(x)\,dx + \int_{b+y}^{+\infty} 0 \times \varphi(x)\,dx = \phi(b+y)$

car $1\!\!1_A(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in A \iff x \le b+y \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

similairement : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \phi(b+y)$

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 35 | Session : 2025

Épreuve de : Maths 2 HEC / ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

1) a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq a \text{ et } x-y \leq b\}$

Posons : $f : (x,y) \mapsto x+y$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

et $g : (x,y) \mapsto x-y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

Or $]-\infty ; a]$ et $]-\infty ; b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

or l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

donc $F_1 = f^{-1}(]-\infty ; a])$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

de même $F_2 = g^{-1}(]-\infty , b])$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

donc $A = F_1 \cap F_2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ par intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11b) Soit $X \hookrightarrow N(0,1)$ et $Y \hookrightarrow N(0,1)$.

Avec le théorème Admis : – X et Y sont bien indépendantes
– de même densité $\varphi$
– A est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$
(11a)

Le théorème admis assure que :

$$p((X,Y) \in A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_A(x,y)\varphi(x)\,dx \right) \varphi(y)\,dy .$$

$$p((X,Y) \in A) = \int_{-\infty}^{d} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_A(x,y)\varphi(x)\,dx \right) \varphi(y)\,dy + \quad \text{(ici } y \leq d)$$

$$\int_{d}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_A(x,y)\varphi(x)\,dx \right) \varphi(y)\,dy \quad \text{(ici } y \geq d)$$

par linéarité d'intégrales convergentes.

avec les résultats de 9b) et 10)

$$p((X,Y) \in A) = \int_{-\infty}^{d} \underset{(1)}{\phi(b+y)\varphi(y)\,dy} + \int_{d}^{+\infty} \underset{(2)}{\phi(a-y)\varphi(y)\,dy} \quad (*)$$

posons dans la première intégrale (1) : $y = a - c - z$

$\Psi : ]a-c-d, +\infty[ \to \mathbb{R}$
$u \mapsto a - c - u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]a-c-d, +\infty[$
et réalise une bijection strictement

30 /

monotone de $]a-c-d\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;d[$.

Par théorème de changement de variable :

sous réserve de convergence, on a l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{d} \phi(b+y)\varphi(y)\,dy \quad \text{et} \quad \int_{a-c-d}^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d-z)\,dz = \int_{0}^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d-z)\,dz$$

$$b+y = 2c-a+y = c+(\underbrace{c-a+y}_{=-z})$$

d'après le résultat que l'on vient démontrer.

et de plus $a-c-d = d-d = 0$

$$\text{et } y = a-c-z = d-z$$

or on peut montrer que $\int_0^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d-z)\,dz$

converge car : $\forall z \geq 0 \quad 0 \leq |\phi(c-z)\varphi(d-z)| \leq \varphi(d-z)$

car $|\phi(c-z)| \leq 1$

or $\int_0^{+\infty} \varphi(d-z)\,dz$ converge (densité d'1 loi normale centrée et réduite)

Par critère de comparaison par infériorité :

$\int_0^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d-z)\,dz$ converge absolument donc converge.

et on a l'égalité avec le théorème de changement de variable :

$$\text{et } \int_{-\infty}^{d} \phi(b+y)\varphi(y)\,dy = \int_0^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d-z)\,dz$$

Avec un changement de variable du type

$y = c - b + z$ dans (2)

On trouve par une même analyse (méthode et mêmes justifications pour le changement (dans l'intégrale (2)) de variables que :

$$\int_d^{+\infty} \phi(a-y)\,\varphi(y)\,dy = \int_0^{+\infty} \phi(c-z)\,\varphi(d+z)\,dz$$

car $c-b+z = d+z$

Au final avec les changement de variable dans (1) et (2) on a : en reprenant (*)

$$p((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty} \varphi(d-z)\,\phi(c-z)\,dz + \int_0^{+\infty} \varphi(d+z)\,\phi(c-z)\,dz$$

par linéarité d'intégrales qui convergent :

On a bien :

$$p((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty} \left(\varphi(d-z) + \varphi(c-z)\right)\phi(c-z)\,dz$$

(2) avec (11)

$$p((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty} \left(\varphi(d-z) + \varphi(c-z)\right)\phi(c-z)\,dz$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 224734

**Code épreuve :** 283 **Nombre de pages :** 35 **Session :** 2025

**Épreuve de :** Maths 2 HEC / ESCP

**Consignes**
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

or $\phi(c-z) = \int_{-\infty}^{c-z} \varphi(t)\,dt$. (*)

on a $p(X_{(4)} \leq A) = \int_{0}^{+\infty} (\varphi(d-z) + \varphi(d+z)) \times \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{c-z} \varphi(t)\,dt\right]}_{(\star)} dz$

avec le changement de variable dans (*)

$u = t + z$

on se "permet" de justifier le changement de variable

de manière analogue à 11 b) (critère $\mathcal{C}^1$ de $u \mapsto u-z$ et bijection, tout comme la convergence) pour aller plus vite et avancer.

Ainsi $\phi(c-z) = \int_{-\infty}^{c} \varphi(u-z)\,du$ avec le changement de variable

or les variables "u" et "t" sont muettes

donc $\phi(c-z) = \int_{-\infty}^{c} \varphi(t-z)\,du$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

en remplaçant dans (☆) :

On obtient :

$$p((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty} \left(\varphi(d+z)+\varphi(d-z)\right)\left(\int_{-\infty}^{c} \varphi(t-z)\,dt\right) dz$$

$$p((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{c} \left[\varphi(d+z)+\varphi(d-z)\right]\varphi(t-z)\,dt\right) dz$$

13) Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

$$\varphi(u)\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$$

$$\varphi(u)\varphi(v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$$

et
$$\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}} e^{-\frac{\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(u+v)^2+\frac{1}{2}(u-v)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u^2+\cancel{uv}+\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}u^2-\cancel{uv}+\frac{1}{2}v^2\right)}$$

$$\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$$

donc $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(u)\varphi(v) = \varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)$$

14) $$P((X,Y)\in A) = \int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\,\varphi(t-z)\,dz\right)dt$$

d'après le résultat admis.

$$= \int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(d+z)\varphi(t-z)\,dz + \int_0^{+\infty}\varphi(d-z)\varphi(t-z)\,dz\right)dt$$

par linéarité d'intégrale qui converge.

$$= \int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)dz + \int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right)dz\right)dt$$

avec 13)

Admis pour le reste.

P III

12a) $\sum_{k=2}^{m} \langle x, a_k\rangle a_k = \sum_{k=2}^{m}\Big($

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751