Copie anonyme - n°anonymat : 224734

D2-00069
224734
Mat Appro

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 40	Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème 1

Partie I :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$t \mapsto (1-t^2)^n$ et $t \mapsto (1-t^2)^n$ sont continues respectivement sur $[0,1]$ et $[-1,1]$.

donc I_n et J_n sont bien définies

$t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[-1,1]$ et paire sur $[-1,1]$

De ce fait, $J_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt = 2 I_n$

2) $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 \, dt = \int_0^1 1 \, dt = 1$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \, dt - \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$

$= \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2-1) \, dt$ par linéarité d'intégrales définies

$= \int_0^1 \left[-t^2 (1-t^2)^n\right] dt$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

or $t \mapsto -t^2(1-t^2)^n$ est continue sur $[0,1]$ et négative (en effet $\forall t \in [0,1]$ $-t^2 \leq 0$ et $(1-t^2)^n \geq 0$ donc $-t^2(1-t^2)^n \leq 0$) de plus $0 \leq 1$

par croissance de l'Intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 -t^2(1-t^2)^n \, dt \leq 0$$

donc $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$u : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (1-t^2)^n$ et $v : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t$

sont C^1 sur $[0,1]$.

Par intégration par partie :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt = \Big[t(1-t^2)^n \Big]_0^1 + n\int_0^1 t\,(1-t^2)^{n-1} \times 2t \, dt .$$

$$I_n = 2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} \, dt .$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

I : pour $n=0$: A t'on le resultat souhaité ?

$I_0 = 1$ (2) et $\frac{(2^0\, 0!)^2}{1!} = 1$

donc $I_0 = \frac{(2^0\, 0!)^2}{1!}$

H) Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ fixé la propriété :

$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

Montrons que $I_{n+1} = \frac{(2^{n+1} (n+1)!)^2}{(2n+3)!}$

avec 4) $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$

donc $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(2n+3)} \times \left(\frac{2n+2}{2n+2}\right) \times \frac{(2^n (n)!)^2}{(2n+1)!}$

$I_{n+1} = \frac{2^2 (n+1)^2 (2^n (n)!)^2}{(2n+3) \times (2n+2)(2n+1)!}$

$I_{n+1} = \frac{(2^{n+1} (n+1)!)^2}{(2n+3)!}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

On $J_n = 2I_n = 2 \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

$$J_n = 2 \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}((n)!)^2}{(2n+1)!}$$

6) def I(n):
```
    i = 1
    for h in range(0; n+1)
        i = (([(2** h) * np.factorial(h)]**2)/(np.factorial(2*h+1)
    return i
```

7) on a $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$J_n = 2 \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1} \times (n!)^2}{(2n+1)!}$$

or $(2n+1)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}$ avec la formule admise

$(n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$ (puissance constante)

et $2^{2n} \times 2 = 2^{2n+1}$

par quotient :

$$J_n \underset{+\infty}{\sim} 2^{2n+1} \times (2\pi n)\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}}\left(\frac{e}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

$J_n \underset{+\infty}{\sim}$

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 40

Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$J_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$

donc $J_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$

Partie II

8) * $t \mapsto P(t)\,Q(t)$ est continue sur $[-1,1]$ (polynomiale)

donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$ est définie

* Soit $(P, Q, R, \lambda) \in \mathbb{R}[X]^3 \times \mathbb{R}$

$\displaystyle(\lambda P+Q, R) = \int_{-1}^{1} [\lambda P(t) + Q(t)]\, R(t)\, dt$

$\displaystyle= \lambda \int_{-1}^{1} P(t)\, \cancel{R}(t)\, dt + \int_{-1}^{1} Q(t)\, R(t)$

par linéarité d'intégrales définies.

$= \lambda\, (R, R) + (Q, R)$

$(\cdot,\cdot)$ est linéaire à gauche.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

* Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$

$$(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t) \, dt = \int_{-1}^{1} Q(t) P(t) \, dt = (Q, P)$$

$(\cdot, \cdot)$ est symétrique. La symétrie et la linéarité à gauche implique la linéarité à droite

$(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire

* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$(P, P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2 \, dt$$

or $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ et $-1 \leq 1$
Par croissance de l'intégrale :

donc $(P, P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2 \, dt \geq 0$

$(\cdot, \cdot)$ est positive

* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ | $(P, P) = 0$

$$\int_{-1}^{1} P(t)^2 \, dt = 0$$

or $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ et $-1 \leq 1$
Par théorème de stricte positivité :

$\forall t \in [-1, 1]$ $P^2(t) = 0$ donc $P(t) = 0$

donc $\forall t \in [-1,1]\ P(t) = 0$

et P admet une infinité de racines. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Réciproquement, si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ $(P,P) = 0$

donc $\forall P \in \mathbb{R}[X]$ $(P,P) = 0 \iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$(\cdot,\cdot)$ est définie positive.

Par ailleurs, $(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt \in \mathbb{R}$.

donc $(\cdot,\cdot)$ est une forme linéaire.

Les points soulignés assurent que $(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

9) Soit $(i,j) \in [\![0;n]\!]^2 \mid i \neq j$.

$$\langle e_i, e_j\rangle = \int_{-1}^{1} t^i \times t^j\,dt = \left[\frac{t^{i+j+1}}{i+j+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{i+j+1} - \frac{(-1)^{i+j+1}}{i+j+1}$$

$\langle e_i, e_j\rangle \neq 0$

donc les polynômes de b_n ne sont pas orthogonaux pour ce produit scalaire.

10) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$u(P)(x) = \left((1-x^2)P'(x)\right)'$

or $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\deg(P(x)) \leq n$

donc $\deg(P'(x)) \leq n-1$

donc $\deg((1-x^2)P'(x)) \leq n-1+2$

car $\deg(1-x^2) = 2$

Au final, $\deg((1-x^2)P'(x)) \leq n+1$

donc $\deg(u(P)) \leq n$

donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ Soit $x \in \mathbb{R}$

$u(\lambda P+Q)(x) = ((1-x^2)(\lambda P+Q)'(x))'$

$u(\lambda P+Q)(x) = ((1-x^2)(\lambda P'(x)+Q'(x)))'$ par linéarité de la dérivée

$u(\lambda P+Q)(x) = (\lambda(1-x^2)P'(x) + (1-x^2)Q'(x))'$

$u(\lambda P+Q)(x) = \lambda((1-x^2)P'(x))' + ((1-x^2)Q'(x))'$

par linéarité de la dérivée

Au final : $u(\lambda P+Q)(x) = \lambda u(P)(x) + u(Q)(x)$

u est linéaire.

Au final, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

11a) $u(e_0) = u(1) = 0$ car si $P = 1$ P' est le polynôme nul donc :

$u(e_0) = ((1-x^2)\,0)' = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

$u(e_1) = u(X)$ or si $P = X$ alors $P' = 1$.

et $u(e_1) = ((1-X^2))' = -2X = -2e_1$

b) Soit $k \in [\![2;n]\!]$

$u(e_k) = u(X^k) = ((1-X^2)kX^{k-1})'$

$= (kX^{k-1} - kX^{k+1})'$

on a par linéarité de la dérivée.

$u(e_k) = k(k-1)X^{k-2} - k(k+1)X^k$

$u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}$

c) De fait avec $B_n = (e_0, \dots, e_n)$

On a $\mathrm{Mat}_{B_n}(u) = M = $

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -2 & 0 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & 0 & -6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & (0) & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n(n+1) \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}$$

Au titre de matrice triangulaire supérieure, les valeurs propres de u sont ses coefficients diagonaux.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $Sp(u) = Sp(M) = \{-k(k+1),\ k \in [\![0,n]\!]\}$

Ayant $(n+1)$ valeurs propres deux à deux distinctes et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ avec $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, u est diagonalisable et ses sous espace propres sont de dimension 1.

12) Cela revient à montrer que u est un endomorphisme symétrique.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$

Montrons que : $\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$

Posons $R : t \mapsto (1-t^2)P'(t)$

$u : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto R(t)$ et u $[-1,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto Q(t)$

sont $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ (car ce sont des fonctions polynomiales.

Par intégration par parties

$\langle u(P), Q \rangle = \int_{-1}^{1} R'(t)Q(t)\,dt = \Big[R(t)Q(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} R(t)Q'(t)\,dt$.

$\langle u(P), Q \rangle = R(1)Q(1) - R(-1)Q(-1) - \int_{-1}^{1} (1-t^2)P'(t)Q'(t)\,dt$.

or 1 et -1 sont racines de R car $R(t) = (1-t^2)P'(t)$

donc $\langle u(P), Q \rangle = -\int_{-1}^{1} (1-t^2)P'(t)Q'(t)\,dt$.

$\langle u(P), Q \rangle = -\int_{-1}^{1} P'(t)S(t)\,dt$ (*)

avec $S : t \mapsto (1-t^2)Q'(t)$.

$u : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto P(t)$ et $v : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto S(t)$

sont C^1 sur $[-1,1]$ car polynomiales.

<u>Ainsi par intégration par partie :</u>

$$\int_{-1}^{1} P'(t)S(t)\,dt = \Big[P(t)S(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P(t)S'(t)\,dt.$$

or -1 et 1 sont aussi racines de S donc $S(1)P(1) = S(-1)P(-1) = 0$

donc $\underline{\int_{-1}^{1} P'(t)S(t)\,dt = -\int_{-1}^{1} P(t)\left((1-t^2)Q'(t)\right)'\,dt}$.

en remplaçant dans (*), <u>on a pour double IPP :</u>

$$\langle u(P), Q \rangle = -\left(-\int_{-1}^{1} P(t)\left[(1-t^2)Q'(t)\right]'\,dt\right)$$

<u>donc $\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$</u>

donc u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.

De fait, il existe une b.o.n de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u, par ailleurs, u est diagonalisable (on le savait déjà avec sa Matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ B_n).

De fait, comme toute famille orthonormée $(L_0, \dots, L_n)$ de un espace vectoriel de dimension finie est telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![0;n]\!]^2 \qquad \langle L_i, L_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

cette famille est à fortiori, une famille orthogonale de l'espace.

Donc comme il existe une b.o.n de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u, il existe une base orthogonale formée de vecteurs propres de u. Or chaque sous espace propre est de dimension 1, ce qui assure que le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

L'existence est acquise.

13a) Soit $m \geq n$ et $f \in \mathbb{R}_m[X]$

$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_m[X]$ car $n < m$. De fait : d'après le théorème de la projection orthogonale :

$\{\|f-g\|, g \in \mathbb{R}_n[X]\}$ admet un minimum en unique vecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ $y = p_{\mathbb{R}_n[X]}(f)$ la projection

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 40 | Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$. et $\min\limits_{g \in \mathbb{R}_n[X]} \{\|f-g\|\} = \|f - p_{\mathbb{R}_n[X]}(f)\|$

Ainsi, en notant $p_{\mathbb{R}_n[X]}(f) = T_n$

il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\|f - T_n\| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[X]} \{\|f-g\|\} \left(= \|f - p_{\mathbb{R}_n[X]}(f)\|\right)$$

Par ailleurs $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ $\left(\text{et } f - T_n \in (\mathbb{R}_n[X])^{\perp}\right)$

or $(L_0, \dots, L_n)$ est une base (orthogonale) de $\mathbb{R}_n[X]$.

donc $\exists!\,(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k L_k$.

b)

$$\|f - T_n\|^2 = \langle f - T_n , f - T_n \rangle$$

$$= \langle f - T_n , f \rangle - \langle f - T_n , T_n \rangle$$

$$= \langle f - T_n , f \rangle$$ car $f - T_n \in (\mathbb{R}_n[X])^{\perp}$

et $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

avec une identité de polarisation :

$$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f , T_n \rangle + \|T_n\|^2$$

$$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f , T_n \rangle + \left\|\sum_{k=0}^{n} c_k L_k\right\|^2$$

or $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale donc :

avec le théorème de Pythagore :

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} c_k L_k\right\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|c_k L_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_k\|^2$$

donc $\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_k\|^2 - 2\langle f , T_n \rangle$

(4a) Soit $k \in \mathbb{N}$

$\deg(x^2-1) = 2$

donc $\deg(P_k) = 2k$.

Ainsi en dérivant k fois P_k : $\underline{\deg(P_k^{(k)}) = 2k - k = k}$

<u>donc Q_k est un polynôme de degré k.</u>

P_k est un polynôme de degré $(2k)$ est de coefficient dominant 1.

Donc $\exists R \in \mathbb{R}[X]$ $P_k(X) = X^{2k} + R(X)$

avec $\deg(R) < 2k$!

ainsi en dérivant k fois P_k :

on a $Q_k(X) = P_k^{(k)}(X) = (2k) \times \cdots \times (k+1) X^{2k-k} + R^{(k)}(X)$

$Q_k(X) = \dfrac{(2k)!}{k!} X^k + R^{(k)}(X)$

<u>donc Q_k est de degré k et de coefficient dominant égale à $\dfrac{(2k)!}{k!}$</u>

b) $Q_0 = P_0^{(0)} = P_0 = 1$

$Q_1 = P_1' = ((X^2-1)^1)' = 2X$

$Q_2 = P_2'' = ((X^2-1)^2)'' = (2 \times 2X(X^2-1))' = (4X^3-4X)'$

donc $Q_2 = 12X^2 - 4$

ce qui est cohérent avec le résultat établi en (14a).

c) i) Soit $k \in \mathbb{N}$, Soit $x \in \mathbb{R}$.

si $k \geq 1$

$$P_1(x) P_k'(x) = (x^2-1)\, k (x^2-1)^{k-1} \, 2x$$

$$= (x^2-1)\, 2xk (x^2-1)^{k-1}$$

$$= 2xk(x^2-1)^k$$

$$P_1(x) P_k'(x) = 2k\, e_1(x)\, P_k(x)$$

si $k=0$:

$$P_1(x) P_0'(x) = (x^2-1) \times 0$$

et $2 \times 0\, e_1(x)\, P_0(x) = 0$

donc $P_1(x) P_0'(x) = 2 \times 0\, e_1(x)\, P_0(x)$

On raccorde ces cas : et donc : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$P_1(x) P_k'(x) = 2k\, e_1(x)\, P_k(x)$$

(ii) Soit $k \in [\![0;n]\!]$ fixé

Soit $x \in \mathbb{R}$

$x \mapsto (x^2-1)$ est $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$ et P_k' est dérivable $k+1$ fois ainsi

ainsi $\left[(x^2-1) \times P_k'(x)\right]^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (x^2-1)^{(i)} \left[P_k'(x)\right]^{(k+1-i)}$

or si $i \geq 3$ $(x^2-1)^{(i)} = 0$

donc $\left[(x^2-1) P_k'(x)\right]^{(k+1)} = (x^2-1)^{(0)} \left[P_k'(x)\right]^{(k+1)} + 2x \left[P_k'(x)\right]^{(k)} \rightarrow$

~~avec ce qui précède:~~

~~on $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $\forall x \in \mathbb{R}$~~

~~$(1-x^2) Q_k''(x) - 2x Q_k'(x) + k(k+1) Q_k(x) = 0.$~~

$\rightarrow + \quad 2 \left[P_k'(x)\right]^{(k-1)} = (x^2-1) Q_k''(x) + 2x Q_k'(x) + 2 Q_k(x)$

car $\left[P_k'(x)\right]^{(k+1)} = P_k^{(k+2)}(x) = \left[Q_k(x)\right]^{(2)} = Q_k''(x)$

de même: $\left[P_k'(x)\right]^{(k)} = Q_k'(x)$

et $\left[P_k'(x)\right]^{(k-1)} = Q_k(x)$

donc $\left[(x^2-1) P_k'(x)\right]^{(k+1)} = \left[P_1(x) \times P_k'(x)\right]^{(k+1)}$

$= (x^2-1) Q_k''(x) + 2x Q_k'(x) + 2 Q_k(x)$

or $\left[P_1(x) P_k'(x)\right]^{(k+1)} = \left[2k\, e_1(x) P_k(x)\right]^{k+1} = 2k \left[x P_k(x)\right]^{k+1}$

de même avec la formule de Leibniz:

$\left[P_1(x) P_k'(x)\right]^{(k+1)} = 2k \left[x P_k(x)\right]^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^{(i)} P_k^{(k+1-i)}(x)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

or si $i \geqslant 2$ $x^{(i)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$

donc $2k\left[e_1(x)P_k(x)\right]^{(k+1)} = 2kx^{(0)}P_k^{(k+1-0)}(x) + 2k1 \times P_k^{(k)}(x)$

$2k\left[e_1(x)P_k(x)\right]^{k+1} = 2kx\,Q_k'(x) + 2kQ_k(x)$.

donc $(1-x^2)Q_k''(x) - 2x\,Q_k'(x) - 2Q_k(x) = -(2kx\,Q_k'(x) + 2kQ_k(x))$

ADMIS pour la suite.

~~On a bien $u(Q_0) = 0 \times Q_0$ et $Q_0 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$~~

~~donc $u(Q_0) = -0(1)\,Q_0$~~

~~et Q_0 vecteur propre de u associé à la valeur propre 0.~~

Soit $k \in [\![0;n]\!]$

$u(Q_k)(x) = \left((1-x^2)Q_k'(x)\right)'$

$= Q_k''(x)(1-x^2) - 2x\,Q_k'(x)$ (par dérivation)

$= -k(k+1)\,Q_k(x)$

car $Q_k''(x)(1-x^2) - 2x\,Q_k'(x) + k(k+1)\,Q_k(x) = 0$ d'après ce qui précède.

donc $u(Q_k)(x) = -k(k+1)\,Q_k(x)$

et $Q_k \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

donc Q_k est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $-k(k+1)$

iii) Soit $k \in [\![0;n]\!]$

ADMIS pour le moment.

d) Soit $k \in \mathbb{N}$, on vise le résultat souhaité. Soit $(f,g) \in (\mathbb{R}[X])^2$

<u>Initialisation :</u> (je me trompe sûrement mais je pense que c'est pour $k \geqslant 1$?)

A t'on le résulta souhaité pour $k = 1$? | Ls possible erreur ? je traite le cas où $k \in \mathbb{N}^*$

$u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\quad v : [-1,1] \to \mathbb{R}$
$t \mapsto f(t)$ $\quad t \mapsto g(t)$

sont C^1 sur $[-1,1]$ car fonctions polynomiales

Par IPP :

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{f'(t)}_{u'} \underbrace{g(t)}_{v} dt = (-1)^0 \left[f^{(1-1-0)}(t) \, g^{(0)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^{(1)} \int_{-1}^{1} f(t) g'(t) dt.$$

le résultat est validé par IPP "classique" pour $k=1$

<u>Hérédité :</u>

Supposons pour $k \geqslant 1$ fixé, le résultat souhaité vrai.

Montrons que : $$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t) g(t) dt = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left[f^{(k-j)}(t) \, g^{(j)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^{k+1}$$

$$\times \int_{-1}^{1} f(t) g^{(k+1)}(t) dt.$$

Posons : $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ et $v : [-1,1] \to \mathbb{R}$
$t \mapsto f^{(k)}(t)$ $\quad t \mapsto g(t)$

sont C^1 sur $[-1;1]$ car polynomiales.

Par IPP :

$$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)\, g(t)\, dt = \left[f^{(k)}(t)\, g(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)\, g'(t)\, dt.$$

or pour $g = g'$ qui est aussi dérivable

(on remplace g par g' dans le résultat supposé dans l'hypothèse de récurrence) : (le résultat est valable $\forall g \in \mathbb{R}[X]$)

$$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t) g(t)\, dt = \left[f^{(k)}(t)\, g(t)\right]_{-1}^{1} - \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t)\, \underbrace{g^{(j+1)}(t)}_{*}\right]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t)\, \underbrace{g^{(k+1)}(t)}_{**}\, dt\right)$$

$*$ car $(g')^{(j)} = g^{(j+1)}$ et $**$ $(g')^{(k)} = g^{(k+1)}$

donc $$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t) g(t)\, dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} \left[f^{[k-(1+j)]}(t)\, g^{(j+1)}(t)\right]_{-1}^{1} + \left[f^{(k)}(t)\, g(t)\right]_{-1}^{1}$$

$$+ (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} f(t)\, g^{(k+1)}\, dt.$$

par changement d'indice dans la somme et en ajoutant celui-ci qui correspond au terme où $j = 0$: on a bien le résultat souhaité :
(encore par IPP)

$$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)\, g(t)\, dt = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left[f^{(k-j)}(t)\, g^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} f(t) g^{(k+1)}(t) dt$$

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 40 | **Session :** 2025

Épreuve de : Maths EMC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Conclusion :

$\forall k \geq 1 \quad \forall (f,g) \in (\mathbb{R}[X])^2$

$$\int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)\, g(t)\, dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t)\, g^{(j)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t)\, g^{(k)}(t)\, dt$$

e) Soit $k \in [\![0;n]\!]$ fixé.

i) Soit $x \in \mathbb{R}$

P_k est de degré $2k$ et de coefficient dominant 1.

donc $\exists R \in \mathbb{R}[X] \quad P_k = X^{2k} + R(X)$

avec $\deg(R(X)) < 2k$

en dérivant P_k $(2k)$ fois, P_k est de degré 0 et de coefficient dominant : $(2k)!$

de fait : $P_k^{(2k)}(x) = (2k)!\, X^0 = (2k)!$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(ii)

Initialisation :

pour $l=0$:

$P_k^{(0)}(x) = P_k(x) = (x^2-1)^k = (x^2-1)^{k-0} \times 1$

le polynome $R_{k,0}$ est le polynôme constant égal à 1.

La propriété est vérifiée pour $l=0$

Hérédité :

Supposons la propriété pour $l \in [\![0;k-1]\!]$ fixé :

on veut $\forall x \in \mathbb{R}$ $P_k^{(l+1)}(x) = (x^2-1)^{k-(l+1)} R_{k,l+1}(x)$.

dérivons : $P_k^{(l)}$ qui est dérivable, par hypothèse de récurrence

il vient :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $P_k^{(l+1)}(x) = (k-l)(x^2-1)^{k-(1+l)} \times (2x) \times R_{k,l}(x)$

$+ R_{k,l}'(x)(x^2-1)^{k-l}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $P_k^{(l+1)}(x) = (x^2-1)^{k-(1+l)}\left((k-l)(2x) \times R_{k,l}(x) + R_{k,l}'(x) \times (x^2-1)\right)$

Posons $R_{k,l+1}(x) = (k-l)(2x) R_{k,l}(x) + R_{k,l}'(x)(x^2-1)$

22/

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $P_k^{(l+1)}(x) = (x^2-1)^{k-(l+1)} R_{k,l+1}(x)$

de plus $\deg(R_{k,l}(x)) \leq l$

donc $\underline{\deg((k-l)2x R_{k,l}(x)) \leq l+1}$

et $\deg(R'_{k,l}(x)) \leq l-1$

$\underline{\text{donc } \deg((x^2-1)R'_{k,l}(x)) \leq l-1+2 = l+1}$

$\underline{\text{donc } \deg(R_{k,l+1}(x)) \leq l+1}$

la propriété est vérifiée au rang $l+1$ ($l \in [\![0;k-1]\!]$)

<u>Conclusion :</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall l \in [\![0;k-1]\!]$

$P_k^{(l)}(x) = (x^2-1)^{k-l} R_{k,l}(x)$ avec $\deg(R_{k,l}(x)) \leq l$

(iii) Soit $l \in [\![0;k-1]\!]$ avec (ii)

$P_k^{(l)}(-1) = ((-1)^2-1)^{k-l} R_{k,l}(-1) = 0$

$P_k^{l}(1) = (1^2-1)^{k-l} R_{k,l}(1) = 0$

$\underline{\text{donc } P_k^{(l)}(-1) = P_k^{(l)}(1) = 0}$

de même, $L_n = \frac{n!}{(2n)!} Q_n$

donc $\|L_n\|^2 = \left|\frac{n!}{(2n)!}\right|^2 \|Q_n\|^2$

$$= \left(\frac{n!}{(2n)!}\right)^2 \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

$$= \left(\frac{n!\,n!}{(2n)!}\right)^2 \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2^{2n} \times 2}{2n+1} \times \frac{1}{\binom{2n}{n}^2}$$

donc $\|L_n\| = 2^n \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \times \frac{1}{\left|\binom{2n}{n}\right|} = 2^n \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \binom{2n}{n}^{-1}$

car $\binom{2n}{n} > 0$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 40

Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 2

Partie I

1) - $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$

- f est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

- On s'intéresse à $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est impropre en $+\infty$ et en $-\infty$.

Soit $A > 0 > B$.

$$\int_B^A f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\Big[\arctan(t)\Big]_B^A = \frac{1}{\pi}\Big[\arctan(A) - \arctan(B)\Big)$$

or $\operatorname{Arctan}(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$

et $\operatorname{Arctan}(B) \xrightarrow[B \to -\infty]{} -\dfrac{\pi}{2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\lim\limits_{\substack{A \to +\infty \\ B \to -\infty}} \int_B^A f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1

f est densité de probabilité

2) $t \mapsto t^2$ est continue sur $\mathbb{R} = X(\Omega)$

Par théorème de transfert :

X admet un moment d'ordre 2 ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f(t)|\,dt$ converge

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge

car $\forall t \in \mathbb{R}\ t^2 f(t) \geq 0$

ssi $\int_{0}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge

car $t \mapsto t^2 f(t)$ est paire.

Or $t \mapsto t^2 f(t)$ est continue sur $[0; +\infty[$

donc $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ est impropre en $+\infty$.

$t^2 f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{t^0}$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^0}\,dt$ diverge (Riemann $0 \leq 1$)

or $\forall t \geq 1 \quad \frac{1}{\pi t^0} \geq 0$

Par critère de comparaison par equivalence,

$\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ diverge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ diverge

donc X n'admet pas de moment d'ordre 2.

De même :

E(X) existe ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)|\,dt$ converge

ssi $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ cvge.

car $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t)\, t \geq 0$
et $t \mapsto t f(t)\,dt$ paire.

or $t \mapsto t f(t)$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc

$\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ est impropre en $+\infty$.

or $t f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est une intégrale de Riemann divergente

donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t}\,dt$ dvge or $\forall t \geq 1 \quad \frac{1}{\pi t} \geq 0$ donc par critère de comparaison par équivalence,

$\int_1^{+\infty} t f(t)\, dt$ diverge.

Donc $E(X)$ n'existe pas.

X n'admet ni moment d'ordre 2 ni d'espérance

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \lim_{B \to -\infty} \int_B^x \frac{1}{\pi(1+t^2)}\, dt$$

$$F(x) = \lim_{B \to -\infty} \frac{1}{\pi} \left[\arctan(t) \right]_B^x$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) - \frac{1}{\pi} \lim_{B \to -\infty} \arctan(B)$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$$

arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} > 0$

donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. F est continue sur $\mathbb{R}$

et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

et $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$

donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$

Soit $y \in]0,1[$.

$$y = F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{\pi}\arctan(x) = y - \frac{1}{2} \iff \arctan(x) = \pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

or $\forall y \in]0,1[\quad \pi\left(y - \frac{1}{2}\right) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

or $\tan$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

donc $\tan(\arctan(x)) = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)$

donc $x = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)$

$\forall y \in]0,1[\quad F^{-1}(y) = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)$

4a) Soit $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$

F^{-1} est bijection de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ au titre de bijection réciproque de F.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $Y(\Omega) = F^{-1}(U)(\Omega) \subset \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_Y(x) = p(F^{-1}(U) \leq x) = p(U \leq F(x))$

car F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$
or $x \in \mathbb{R}$ donc $F(x) \in]0,1[$

$F_Y(x) = F(x)$ car $U \hookrightarrow U(]0,1[)$ et $F(x) \in]0,1[$

donc Y et X suivent la même loi

b) def cauchy():
    U = rd.random()
    Y = np.tan(np.pi(U - 1/2))
  return(Y)

5) $|X|(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

donc $Z(\Omega) = \sqrt{|X|}(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

Soit $x \in \mathbb{R}$

si $x < 0$ $\quad p(Z \leq x) = 0 = F_Z(x)$

si $x \geq 0$ $\quad F_Z(x) = p(\sqrt{|X|} \leq x) = p(|X| \leq x^2)$

car $t \mapsto t^2$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$

$F_Z(x) = F(x^2) - F(-x^2)$ car X est à densité

$$F_Z(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x^2) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi}\arctan(-x^2) + \frac{1}{2}\right)$$

$$F_Z(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x^2) - \frac{1}{\pi}\arctan(-x^2)$$

$$F_Z(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x^2) - \arctan(-x^2)\right)$$

Au final : $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{\pi}(\arctan(x^2) - \arctan(-x^2)) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

ou $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ F(x^2) - F(-x^2) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

or F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car f est continue sur $\mathbb{R}$.

En effet : Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = F(0) + \int_0^x f(t)\,dt$$

or f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $G : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Donc G est C^1 sur $\mathbb{R}$. <u>Donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$.</u>

donc $x \mapsto F(x^2) - F(-x^2)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$

car F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -x^2$ sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

Au final, <u>F_Z est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0</u>

f_Z est déjà continue sur $\mathbb{R}^*$.

Montrons que F_Z est continue en 0 :

- $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Z(x) = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Z(x) = F(0) - F(0) = 0$ par continuité de F en 0

et $F_Z(0) = 0$

donc F_Z est continue en 0. F_Z est continue sur $\mathbb{R}$.

Z est donc une VA à densité.

Une densité est donnée par :

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f_Z(x) = F_Z'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2xF'(x^2) + 2xF'(-x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{4x}{\pi(x^4+1)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

posons $f_Z(0) = 0 \geq 0$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{4x}{\pi(x^4+1)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

6) Z admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f_Z(t)| dt$ converge

ssi $\int_0^{+\infty} t f_Z(t) dt$ converge

car f_Z est nulle sur $\mathbb{R}^-$
et $\forall t \geq 0$ $t f_Z(t) \geq 0$

32/

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 40 | Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

or $t \mapsto t f_Z(t) = \dfrac{4t^2}{\pi(t^4+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

donc $\int_0^{+\infty} t f_Z(t)\,dt$ est impropre en $+\infty$.

or $t f_Z(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{\pi} \times \dfrac{1}{t^2}$

or $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\,dt$ converge ($2>1$ avec Riemann).

donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{4}{\pi} \times \dfrac{1}{t^2}\,dt$ converge.

or $\forall t \geq 1 \quad \dfrac{4}{\pi} \dfrac{1}{t^2} \geq 0$ donc par critère de comparaison par équivalence :

$\int_1^{+\infty} t f_Z(t)\,dt$ converge.

Donc $\int_0^{+\infty} t f_Z(t)\,dt$ converge. Donc $E(Z)$ existe

De manière analogue 2).

$t \mapsto t^2$ est continue sur $\mathbb{R}^+ = Z(\Omega)$

Par théorème de transfert :

Z admet un moment d'ordre 2 ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f_Z(t)|\, dt$ conv

ssi $\int_0^{+\infty} t^2 f_Z(t)\, dt$ conv

car $\forall t \geq 0 \quad t^2 f_Z(t) \geq 0$
et f_Z est nulle sur $\mathbb{R}^-$

or $t \mapsto t^2 f_Z(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

donc $\int_0^{+\infty} t^2 f_Z(t)\, dt$ est impropre en $+\infty$.

or $t^2 f_Z(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi t}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ diverge (Riemann)

donc $\int_1^{+\infty} \frac{4}{\pi t}\, dt$ diverge.

or $\forall t \geq 1 \quad \frac{4}{\pi t} \geq 0$. Donc par critère de comparaison

par équivalence $\int_1^{+\infty} t^2 f_Z(t)\, dt$ diverge.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f_Z(t)|\, dt$ diverge et Z n'admet pas de moment d'ordre 2 donc pas de variance.

7a)

Soit $x \geq 0$

$$\frac{\alpha x}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\beta x}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{\alpha x(x^2+\sqrt{2}x+1)+\beta x(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$= \frac{\alpha x^3+\alpha\sqrt{2}x^2+\alpha x+\beta x^3-\beta\sqrt{2}x^2+\beta x}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$= \frac{x^3(\alpha+\beta)+x^2(\alpha\sqrt{2}-\beta\sqrt{2})+x(\alpha+\beta)}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

avec ce que l'on vise : on a le système :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha\sqrt{2}-\beta\sqrt{2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha\sqrt{2}+\alpha\sqrt{2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ 2\sqrt{2}\alpha=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \beta=\frac{-1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

Les réels sont $\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

b) $x \mapsto \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ sont

continues sur $[0;+\infty[$. Donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx$ et

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$ sont impropres en $+\infty$.

or $\dfrac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2} \left(\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right)$

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ cvge (Riemann $2>1$)

or $\forall x \geqslant 1$ $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$ donc par critère de comparaison par équivalence.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$ cvgent.

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$ cvgent.

On a : $x^2+\sqrt{2}x+1 = \left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1$

$x^2+\sqrt{2}x+1 = \left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 1$

$x^2+\sqrt{2}x+1 = \left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$

Posons : $u = x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\varphi : \left]\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; +\infty\right[\to \mathbb{R}$
$u \mapsto u - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est C^1 sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; +\infty\right[$ et réalise une bijection strictement monotone de $]0;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 40	Session : 2025

Épreuve de : Maths Appro EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Par théorème de changement de variable

1 donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$ et $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{u^2+\frac{1}{2}}\,du$ ont même nature or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$ converge

donc on a l'égalité

et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{v^2+\frac{1}{2}}\,du$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{2u^2+1}\,du.$$

$$= 2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}u)^2+1}\,du$$

de même en posant encore $s=\sqrt{2}u$
(même justification par le changement de variable.

On a : $2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}v)^2+1}\,du = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_1^{+\infty} \frac{1}{s^2+1}\,ds$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{A\to+\infty} \left(\arctan(A) - \arctan(1)\right)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

car $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

c) /

8)

Partie II

9) $1\!\!1_A \hookrightarrow B(p(A))$

on a $E(1\!\!1_A) = p(A)$

$V(1\!\!1_A) = p(A)(1-p(A))$

10a) Soit $\omega \in \Omega$

supposons $\omega \in (X > s)$

donc $X(\omega) > s$

donc $\chi_{]s;+\infty[}(X(\omega)) = 1$ car $X(\omega) \in]s;+\infty[$

donc $1\!\!1_{(X>s)}(\omega) \subset \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega))$

Soit $\omega \in \chi_{]s,+\infty[}(X)$

donc $\chi_{]s;+\infty}(X(\omega)) = \begin{cases} 1 \text{ si } X(\omega) > s \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

donc $\omega \in \mathbb{1}_{(X>s)}(\omega)$

donc $\chi_{]s;+\infty[}(X(\omega)) \subset \mathbb{1}_{(X>s)}(\omega)$

Par double inclusion, $\forall \omega \in \Omega$

$$\mathbb{1}_{(X>s)}(\omega) = \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega))$$

11) Soit $\{(|X_k| \leq M), (|X_k| > M)\}$ un système complet d'événement.

Par la formule des probabilités totales :

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$p(X_k \leq x) = p((X_k \leq x) \cap (|X_k| > M)) + p((X_k \leq x) \cap (|X_k| > M))$$

?

12)

18) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\varepsilon}{3}\right) = ?$

on a avec 18) $0 \leq p(|\overline{X_n}| > t) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon}$

par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} p(|\overline{X_n}| > t) = 0$

20) On a $\forall t > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} p(|\bar{X}_n| > t) = 0$$

donc $\bar{X}_n$ converge en probabilité vers la VA certaine égale à 0.