500471

SOKOL

CHARLES

28/11/2004

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 500471

Né(e) le 28/11/2004

Nom SOKOL

Prénom (s) CHARLES

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/07

Numéro de table 007

Exercice n° 1

1) $E_{O_3} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ O_3 M + M O_3 = O_3\}$

Or, $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ O_3 M + M O_3 = O_3$.

donc : $\boxed{E_{O_3} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$E_{I_3} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ I_3 M + M I_3 = O_3\}$.

donc : $E_{I_3} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ 2M = O_3\}$.

donc : $E_{I_3} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ M = O_3\}$

d'où : $\boxed{E_{I_3} = \{O_3\}}$

2) $\forall C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \forall M \in E_C,\ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. donc : $\underline{E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

de plus, si $M = O_3$: $\forall C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ CM + MC = O_3 + O_3 = O_3$.

donc : $O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in E_C$, et donc : $\underline{E_C \neq \emptyset}$

Soit : $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\forall C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ M, N \in E_C$.

$\forall C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C(\lambda M + N) + (\lambda M + N)C = \lambda CM + CN + \lambda MC + NC$

$\forall C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ C(\lambda M + N) + (\lambda M + N)C = \lambda(CM + MC) + (CN + NC)$

$\forall C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ C(\lambda M + N) + (\lambda M + N)C = \lambda \times O_3 + O_3$

(car $M, N \in E_C$)

d'où :

$\forall C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ C(\lambda M + N) + (\lambda M + N)C = O_3$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

ainsi : pour tout $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, C est stable par combinaison linéaire.

d'où : pour tout $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

3) Comme $M \in E_A$, $AM + MA = 0_3$

donc : ${}^t(AM+MA) = {}^t0_3$

et donc : ${}^t(MA) + {}^t(AM) = 0_3$

donc : ${}^tA\,{}^tM + {}^tM\,{}^tA = 0_3$

Or, ${}^tA = A$ (A est symétrique)

donc : $A\,{}^tM + {}^tM\,A = 0_3$

d'où : ${}^tM \in E_A$.

4)a) d'après la question précédente, A est symétrique donc, d'après le cours, A est diagonalisable.

4)b) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

donc $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

donc : $A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$

donc : $A^3 = 9A$

et donc : $A^3 - 9A = 0_3$.

ainsi : $x^3 - 9x$ est un polynôme annulateur de A.

d'où : toute valeur propre λ de A est une racine de ce polynôme. (car les racines du polynômes sont toutes les valeurs propres possibles)

donc : si λ est valeur propre de A : $\boxed{\lambda^3 - 9\lambda = 0}$.

4)a) On résout : $x^3 - 9x = 0$

$\iff x(x^2-9) = 0$

$\iff x(x+3)(x-3) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = -3$ ou $x = 3$.

donc : $Sp(A) \subset \{0, -3, 3\}$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On résout d'abord :

$AX = 0$

$$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 & (L_1) \\ -2x + 2z = 0 & (L_2) \\ 2y - z = 0 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y & (L_1) \\ z = 2y & (L_3) \\ z = x & (L_2) \end{cases}$$

donc : $0 \in Sp(A)$,

et $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

de même, on résout : $AX = -3X$

$\iff (A+3I)X = 0$

$$\iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 & (L_1) \\ -2x + 3y + 2z = 0 & (L_2) \\ 2y + 2z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x & (L_1) \\ z = -y & (L_3) \\ 0 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x & (L_1) \\ z = -2x & (L_3) \\ 0 = 0 & (L_2) \end{cases}$$ donc : $-3 \in Sp(A)$ et : $E_{-3}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$

et de même : $AX = 3X$

$$\iff (A-3I)X = 0$$

$$\iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 & (L_1) \\ -2x - 3y + 2z = 0 & (L_2) \\ 2y - 4z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y & (L_1) \\ y = 2z & (L_3) \\ -2x - 3y + 2z = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2z & (L_3) \\ x = -2z & (L_1) \\ 0 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

donc : $3 \in Sp(A)$, et $E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.

et donc : $Sp(A) = \{-3, 0, 3\}$.

ainsi, comme A est diagonalisable,
il existe $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, et $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,
tel que $D = P^{-1}AP$.

et : $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$P^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Numéro d'inscription 500471

Né(e) le 28 / 11 / 2004

Signature

Nom SOKOL

Prénom (s) CHARLES

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 2 / 7

Numéro de table 007

donc : $\boxed{P^2 = 9I}$

ainsi : $P \times \frac{1}{9} P = I$

donc :

$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{9} P}$

6)a) $N \in E_D \iff DN + ND = O_3$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = O_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -6a = 0 \\ -3b = 0 \\ -3d = 0 \\ 3f = 0 \\ 3h = 0 \\ 6i = 0 \end{cases} \iff a = b = d = f = h = i = 0.$$

$$\iff \boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

6)b) d'après 6/a),

$\forall N \in E_D, \exists (c, e, g) \in \mathbb{R}^3, N = c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + g\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

donc $\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de de E_D.

de plus, soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, on résout :

$\lambda_1\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = 0_3$

$\iff \begin{pmatrix}0&0&\lambda_1\\0&\lambda_2&0\\\lambda_3&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\lambda_1 = 0\\\lambda_2 = 0\\\lambda_3 = 0\end{cases}$

donc, cette famille est libre.

d'où : $\boxed{\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_D.}$

donc : $\dim(E_D) = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$

d'où : $\boxed{\dim(E_D) = 3}$

7)a) d'après 4)c) : $D = P^{-1}AP$, et $N = P^{-1}MP$

donc : $A = PDP^{-1}$, et $M = PNP^{-1}$.

de plus : $M \in E_A \iff AM + MA$

$$\iff (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{I}NP^{-1}) + (PN\underbrace{P^{-1})(P}_{I}DP^{-1}) = 0_3$$

$$\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0_3$$

on multiplie par P^{-1} à gauche :

$$\iff DNP^{-1} + NDP^{-1} = 0_3$$

on multiplie par P à droite :

$$\iff DN + ND = 0_3$$

ainsi : $\boxed{M \in E_A \iff N \in E_D}$.

7)b) $\forall M \in E_A$, il existe $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

tel que : $M = PNP^{-1}$.

Comme $N \in E_D$ (7/a) :

$$\exists!(c,e,g) \in \mathbb{R}^3, M = cP\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1} + eP\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1} + gP\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

$$\boxed{\text{d'où : } \mathcal{B}' = \left(P\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}P^{-1}\right) \text{ est une base de } E_A.}$$

8) On pose : $(a,b,c,d,e,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^3$,

tel que : $M = \begin{pmatrix} a&b&c\\ d&e&f\\ g&h&i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5&-2&-4\\ -2&8&-2\\ -4&-2&5 \end{pmatrix} \quad (\text{cf } 4/b).$$

et : $M^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} (a^2+bd+cg) & (ab+be+ch) & (ac+bf+ci) \\ (da+ed+fg) & (bd+e^2+fh) & (dc+fe+fi) \\ (ag+dh+ig) & (bg+he+ih) & (cg+fh+i^2) \end{pmatrix}$$

$$(A+M)^2 = \begin{pmatrix} 1+a & -2+b & c \\ -2+d & e & 2+f \\ g & 2+h & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & (-2+b) & c \\ -2+d & e & 2+f \\ g & 2+h & -1+i \end{pmatrix}$$

On résoudrait ensuite par un système :
$(A+M)^2 = A^2 + M^2$.

9) $E_A = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) ;\ \varphi(M) = O_3 \}$
donc : $E_A = \ker(\varphi)$

or d'après 7)b), le cardinal de la base de E_A obtenue étant égal à 3 $\dim(E_A) = 3$.
et donc : $\dim(\ker(\varphi)) = 3$.

or, d'après le théorème du rang :
$$\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{K})) = \dim(\ker(\varphi)) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(\varphi))}_{rg(\varphi)}$$

donc : $rg(\varphi) = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{K})) - \dim(\ker(\varphi))$
$rg(\varphi) = 9 - 3$
$\boxed{rg(\varphi) = 6}$

Numéro d'inscription 500471

Né(e) le 28 / 11 / 2004

Signature

Nom SOKOL

Prénom (s) CHARLES

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 3 / 7

Numéro de table 007

Exercice n°2

1)a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de $t \mapsto t^n$ (fonction polynomiale) et $t \mapsto e^{-t}$ (inverse de la fonction exponentielle).

de plus, par croissance comparée :
$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{t \to +\infty} t^{n+2} e^{-t} = 0$.

donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t^n e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge comme intégrale de Riemann (car $2>1$).

donc, par critère de négligeabilité des intégrales à fonctions positives :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

de plus comme $[0,1] \subset \mathbb{R}_+$,
$t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

d'où : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n e^{-t} dt$ converge.

ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ converge}}$.

1)b) $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

$t \mapsto e^{-t}$ est une densité d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

donc : $\boxed{I_0 = 1}$

$I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$

On reconnait l'espérance de la variable aléatoire X.

et $E(X) = \frac{1}{1} = 1$.

donc :

$\boxed{I_1 = 1}$

2) pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto \frac{1}{1+xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme inverse de fonction affine.

et $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme inverse de la fonction exponentielle.

donc, par produit : pour tout $x \geqslant 0$,

$t \longmapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

et donc sur $[0,1]$, donc : pour tout $x \geqslant 0$ $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ converge or, $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t} = 0$ (par croissance comparée)

et $\forall x \geq 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{1+tx} = \begin{cases} 1, \text{ si } x = 0 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

donc, par produit :
$\forall x \geq 0, \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+tx} = 0$

donc : $\forall x \geq 0, \quad \frac{e^{-t}}{1+tx} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge comme intégrale de Riemann $(2>1)$.

Par critère de négligeabilité des intégrales à fonctions positives : pour tout $x \geq 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$ converge

d'où : $\boxed{\text{pour tout } x \geq 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt \text{ converge}}$.

3) $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$
$F(0) = I_0$
$\boxed{F(0) = 1}$ (d'après 1)b)

4) $\forall t \geq 0$, $tx \leq ty$
donc : $\forall t \geq 0$, $0 < 1 + tx \leq 1 + ty$
et donc : $\forall t \geq 0 \quad \frac{1}{1+tx} \geq \frac{1}{1+ty}$

et donc : $\forall t \geq 0, \quad \frac{e^{-t}}{1+tx} \geq \frac{e^{-t}}{1+ty} \quad (e^{-t} > 0)$.

or comme $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt} dt$ convergent (d'après 2)), Par croissance de l'intégration :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt}\,dt$$

d'où : $F(x) \geq F(y)$.

Par définition de la monotonie d'une fonction, on peut en déduire que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

5)a) Soit $x=0$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+0\times t}\,dt = \int_0^1 1\,dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = [t]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = 1$$

Soit $x>0$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = [\ln(1+xt)]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \ln(1+x) - \ln(1)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \ln(1+x)$$

5)b) $\forall t \in [0,1],\ -t \leq 0$

donc : $\forall t \in [0,1],\ 0 \leq e^{-t} \leq 1$ ($e^0=1$, par bijection croissante de la fonction exponentielle).

Numéro d'inscription 500471

Né(e) le 28/11/2004

Nom SOKOL

Prénom (s) CHARLES

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet □1 ou □2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 4/7

Numéro de table 007

or, $\forall t \in [0,1], \forall x \geq 0 \ \frac{1}{1+xt} > 0$.

donc : $\forall t \in [0,1], \forall x \geq 0, 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$.

Comme $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$ et $t \longmapsto \frac{1}{1+xt}$ sont continues sur $[0,1]$, pour tout $x \geq 0$,

Par croissance de l'intégration :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt}$$

5)c) $\forall x > 0, \forall t \geq 1, \quad xt \geq x$

$\forall x > 0, \forall t \geq 1, \quad 1+xt \geq x > 0$

donc : $\forall x > 0, \forall t \geq 1 \ 0 \leq \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$.

et donc : $\forall x > 0, \forall t \geq 1, \ 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{x}$.

or, pour tout $x > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt - \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$

Converge (d'après 2)).

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

et $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt = F(0) - \int_0^1 \frac{1}{x+t}dt$ converge.

donc par croissance (et linéarité) de l'intégration :
$\forall x>0$

$$\boxed{0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}dt}$$

5)d) d'après 5)b) et 5)c, on a :

$$\forall x>0,\quad 0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}dt + \int_0^1 \frac{1}{1+xt}dt$$

$$\forall x>0,\quad 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}dt + \int_0^1 \frac{1}{x}dt$$

($\forall t\in[0,1]$, $\forall x>0$,
$1+xt \geq x$
$\frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$.
par croissance de l'intégrale)

et de plus : $\alpha\int_0^1 e^{-t}dt$
donc, par relation de Chasles :
$\int_1^{+\infty} e^{-t}dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$.
ie. $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt \leq I_0$
≤ 1 (1b)

et donc :

$$\forall x>0,\quad 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 1 . dt$$

d'où :

$$\forall x>0 \quad 0 \leq F(x) \leq \frac{2}{x}.$$

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$

donc, par théorème d'encadrement F admet une limite en $+\infty$, et : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0}$

6)a) $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = I_0$ et $-x\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = -xI_1$ convergent.

donc : $\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\, dt$ converge.

on a donc :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt)\, dt$$

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\left(1 - (1-x^2t^2)\right)}{1+xt} dt$$

(identité remarquable, par passage au même dénominateur).

donc : $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 t^2}{1+xt}\, dt$.

d'où, par linéarité de l'intégration :

$$\boxed{F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = x^2\int_0^{+\infty} \frac{x^2t^2}{1+xt}\, dt}$$

6)b) $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt$
$= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt + x\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$
$= F(x) - I_0 + xI_1$.

de plus $\forall t \geq 0,\ xt \geq 0$
$\forall t \geq 0,\ xt + 1 \geq 1 > 0$
$\forall t \geq 0,\ 0 < \frac{1}{xt+1} \leq 1$.

donc : $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leq \dfrac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq t^2 e^{-t}$

($\forall t \geqslant 0$, $t^2 \geqslant 0$
$e^{-t} > 0$
donc : $\forall t \geqslant 0$, $t^2 e^{-t} \geqslant 0$)

et donc, comme $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2 e^{-t}}{1+xt}$ converge

et $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt = I_2$ converge,

par croissance de l'intégrale.

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq I_2$$

donc, comme $x^2 \geqslant 0$: $0 \leq x^2 \int_0^{+\infty} \dfrac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq x^2 I_2$

d'où : $\boxed{0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2}$.
d'après 6)a

7)a) Comme $I_0 = I_1 = 1$ (1)Q), d'après 6)Q :
$\forall x \in [0,1[$ $1 - x \leq F(x) \leq x^2 + 1 - x$

donc : $\forall x \in [0,1[$ $1 \leq \dfrac{F(x)}{1-x} \leq \dfrac{x^2}{1-x} + 1$.

$$\text{or, } \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-x} = \frac{0}{1-0} = 0$$

$$\text{donc, } \lim_{x \to 0} 1 + \frac{x^2}{1-x} = 1$$

d'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{1-x} = 1$$

$$\text{donc : } F(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1 - x.$$

$$\text{d'où : } F(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)$$

Numéro d'inscription 500471

Né(e) le 28/11/2004

Signature

Nom SOKOL

Prénom (s) CHARLES

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 5 / 7

Numéro de table 007

7)b) $F(0) = 1$ (d'après 3)

donc :

$$F(x) - F(0) \underset{x \to 0}{=} -x + o(x)$$

et donc :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{=} -1 + o(x).$$

ainsi : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = -1 \in \mathbb{R}$

d'où F est dérivable en 0, et : $\boxed{F'(0) = -1.}$

8)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Exercice n°3

I)1) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est bien définie sur $\mathbb{R}$.

de plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty, 1[$ comme fonction constante,
et $x \mapsto \frac{i}{x^{i+1}}$ sur $]1, +\infty[$ comme inverse

de fonction polynomiale.
donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall x \geq 1, \frac{i}{x^{i+1}} \geq 0$

$\forall x \geq 1, 0 \geq 0.$

donc : $\forall i \in [\![1, n]\!], f_i(x) \geq 0$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
$\int_{-\infty}^{1} f_i(x)dx$ converge et vaut 0.

Soit $A \geq 1$.

$$\int_1^A f_i(x)dx = \int_1^A \frac{i}{x^{i+1}} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x^i} \right]_1^A$$

$$= 1 - \frac{1}{A^i}$$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$

or, $\lim_{A \to +\infty} 1 - \frac{1}{A^i} = 1 - 0 = 1$

donc : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\int_1^{+\infty} f_i(x)\,dx$ converge et vaut 1.

d'où : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx$ converge et vaut 1.

ainsi : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f_i est une densité de probabilité.

I)2a) pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$E(X_i)$ existe $\Longleftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\,dx$ converge

$\Longleftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} x f_i(x)\,dx$ converge

($\int_{-\infty}^{1} x f_i(x)\,dx$ converge et vaut 0)

~~Soit $A > 1$. $\int_1^A x f_i(x)\,dx = \int_1^A \frac{i}{x^i}\,dx$~~

~~$= [\ \ i$~~

$\forall i \in [\![1,n]\!]$,

or, $x \frac{i}{x^{i+1}} = \frac{i}{x^i}$.

et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^i}$ converge comme intégrale de Riemann si et seulement si $i > 1$, donc $i \geq 2$.

et donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i}\,dx$ converge si et seulement si $i \geqslant 2$.

d'où : $E(X_i)$ existe si et seulement si $i \geqslant 2$.

$\forall i \in [\![2, n]\!], \ E(X_i) = \int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i} dx$.

Soit $A \geq 1$.

$\forall i \in [\![2, n]\!], \int_1^A \frac{i}{x^i} dx = \left[-\frac{i}{(i-1)x^{i-1}} \right]_1^A$

$= \frac{i}{i-1} - \frac{i}{(i-1)A^{i-1}}$.

or, $\forall i \in [\![2, n]\!], \ \lim_{A \to +\infty} \frac{i}{i-1} - \frac{i}{(i-1)A^{i-1}} = \frac{i}{i-1}$

donc : $\forall i \in [\![2, n]\!], \ \int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i} dx = \frac{i}{i-1}$.

d'où : $\boxed{\forall i \in [\![2, n]\!], \ E(X_i) = \frac{i}{i-1}}$

2)b) $\forall i \in [\![2, n]\!], \ E(X_{i+1}) - E(X_i) = \frac{i+1}{i} - \frac{i}{i-1}$

$\forall i \in [\![2, n]\!], \ E(X_{i+1}) - E(X_i) = \frac{i^2 - 1 - i^2}{i(i-1)}$

$\forall i \in [\![2, n]\!] \ E(X_{i+1}) - E(X_i) = -\frac{1}{i(i-1)}$

$\forall i \in [\![2, n-1]\!], \ E(X_{i+1}) - E(X_i) \leq 0$

$E(X_n) \leq E(X_{n-1}) \leq \dots \leq E(X_2)$.

donc, comme pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $E(X_i)$ correspond au revenu mensuel moyen au sein de la catégorie i, on peut classer les catégories du revenu le moins élevé au plus élevé :

$\boxed{\text{catégorie } n, \text{ catégorie } n-1, \dots, \text{catégorie } 2.}$

Numéro d'inscription 500471

Né(e) le 28/11/2004

Nom SOKOL

Prénom (s) CHARLES

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 6 / 7

Numéro de table 007

Commencez à composer dès la première page

I)3) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![1,n]\!]$.

<u>Si $x < 1$</u> : $F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \, dt$

$F_i(x) = 0$

<u>Si $x \geq 1$</u> : $F_i(x) = \int_{-\infty}^{1} 0 \, dt + \int_1^x \frac{i}{t^{i+1}} \, dt$

$F_i(x) = \left[-\frac{1}{t^i} \right]_1^x$

$F_i(x) = 1 - \frac{1}{x^i}$.

d'où : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i}, & \text{si } x \geq 1 \\ 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

I)4)a) $U(\Omega) =]0,1[$

donc : $U^{\frac{1}{i}}(\Omega) =]0,1[$.

et donc : $V_i = \frac{1}{U^{\frac{1}{i}}}(\Omega) =]1,+\infty[$.

(bijection décroissante de $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{1}{i}}}$ de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Notons F_{V_i} la fonction de répartition de V_i.
(et F_U celle de U)

$\forall x < 1, \quad F_{V_i}(x) = 0$

$\forall x \geq 1, \quad F_{V_i}(x) = P\left(\frac{1}{U^{\frac{1}{i}}} \leq x\right)$

$\forall x \geq 1, \quad F_{V_i}(x) = P\left(xU^{\frac{1}{i}} \geq 1\right) \quad \left(U^{\frac{1}{i}}(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*\right)$

$\forall x \geq 1, \quad F_{V_i}(x) = P\left(U^{\frac{1}{i}} \geq \frac{1}{x}\right) \quad (x > 0)$

$\forall x \geq 1, \quad F_{V_i}(x) = P\left(U \geq \frac{1}{x^i}\right)$ (par bijection croissante de $t \mapsto t^i$)

$\forall x \geq 1, \quad F_{V_i}(x) = 1 - F_U\left(\frac{1}{x^i}\right)$ (car U est à densité)

$\forall x \geq 1, \quad F_{V_i}(x) = 1 - \frac{1}{x^i} \quad \left(\text{car } \frac{1}{x^i} \in]0,1[\right)$

Or $F_{V_i}(1) = 0 = 1 - \frac{1}{1^i}$

donc : $\forall x \geq 1, \ F_{V_i}(x) = 1 - \frac{1}{x^i}$.

d'où : $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{V_i}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i}, & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{V_i}(x) = F_i(x)$.

Comme la fonction de répartition d'une variable à densité caractérise sa loi, V_i suit la même loi que X_i.

I) 4)2)

```
import numpy.random as rd
def SimulX(i):
        U = rd.random()
        A = U**(1/i)
        return 1/A
```

II) 5)

```
def SimulY(n, p):
    j = 0
    for k in range(0,n):
            a = rd.random()
            if a > p:
                j = j+1
    return j+1
```

II) 6)

```
def loiY(n,p):
    N = 10000
    loi = [0]*n
    for k in range(0, n):
        y = simulY(n, p)
        loi[k] = y
    return loi
```

II) 7) def traceY(n, p) :
```
    x = np.linspace(0, 10000, 10000)
    y = loiY(n, p)
    plt.bar(x, y)
    plt.show()
```

II) 8) a) Dans une base de données, une clé primaire doit donner un attribut différent à chaque enregistrement (ligne).
(2 enregistrements ne peuvent pas avoir un même attribut)

II) 8) b) individu : i_insee
departement : d_numero
profession : p_pcs

II) 8) c) individu = ((i_nom = "TEXT"), (i_prenom = "TEXT"), (#i_departement = "INTEGER"), (i_insee = "INTEGER"), (#i_code_profession = "INTEGER"))

departement = ((d_numero = "INTEGER"), (d_nom = "TEXT"), (d_population = "INTEGER"))

professions = ((p_pcs = "INTEGER"), (p_categorie = "INTEGER"), (p_intitule = "TEXT"))

On a souligné les clés primaires, et ajouté "#" devant les clés étrangères.

Numéro d'inscription 500471

Né(e) le 28/11/2004

Signature

Nom SOKOL

Prénom (s) CHARLES

20 / 20

écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 7 / 7

Numéro de table 007

i_code_profession est une clé étrangère dans individu associée à la table profession

i_departement est une clé étrangère de la table individu associée à la table departement.

II) 8)d)

```
SELECT DISTINCT p_pcs
FROM profession
```

II) 8)e)

```
SELECT i_insee
FROM individu
AND p_categorie
FROM profession
WHERE p_pcs = i_code_profession
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

III) 9) $Z_n(\Omega) = [1, +\infty[$.

(car $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [1, +\infty[$)

donc : $\boxed{\forall x < 1,\ G_n(x) = 0}$

III) 10) a) Sachant que l'individu choisi au hasard est i, on a donc $Y = i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ alors $Z_n \leq x$ si et seulement si le revenu de l'individu i (X_i) est inférieur ou égal à x, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

d'où : $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_{(Y=i)}(Z_n \leq x) = P(X_i \leq x) = F_i(x)}$

10) b) $((Y = i)_{i \in [\![1, n]\!]})$ est un système complet d'événements.

car $(Y-1)(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ ($Y - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, p)$)

donc : $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$

Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$G_n(x) = P(Z_n \leq x)$

$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P([Y = k] \cap [Z_n \leq x])$

$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(Y = k)\, P_{(Y=k)}(Z_n \leq x)$

$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(Y - 1 = k - 1)\, F_k(x)$ (cf. 10/a).

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}$$

par changement d'indice : $j = k-1$.

$$\boxed{G_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} F_{j+1}(x) \binom{n-1}{j} p^{j}(1-p)^{n-1-j}}$$

~~III) 10) i) $G_n(x) =$~~

III) 11) On admet 10)c, G_n est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ comme fonctions polynomiales quotient

et sur $]-\infty, 1[$ comme fonction constante.

et : $G_n(1) = 1 - \dfrac{(p+(1-p))^{n-1}}{1^n}$

$= 1 - 1 = 0$

donc : $\lim_{x\to 1^+} G_n(x) = \lim_{x \to 1^-} G_n(x) = G_n(1)$

G_n est continue en 1.

donc : G_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

d'où : Z_n est une variable aléatoire à densité.

III) 13) b) $\forall x \geq 1, \quad \left(1-\frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{x-1}{nx}\right)}$

$\forall x \geq 1 \quad \frac{x-1}{nx} \longrightarrow 0$

$\forall x \geq 1, \quad \ln\left(1-\frac{x-1}{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x-1}{nx}$

$\forall x \geq 1, \quad (n-1)\ln\left(1-\frac{x-1}{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x-1}{x}.$

par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{x-1}{x}$ pour $x \geq 1$,

$\forall x \geq 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} e^{-\frac{x-1}{x}}.$

ainsi $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} e^{-\frac{x-1}{x}}, & \text{si } x \geq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$