501226

ARRAD

ILAN

17/02/2005

Note de délibération : 18.77 / 20

Numéro d'inscription 501226

Né(e) le 17/02/2005

Signature

Nom ARRAD

Prénom (s) ILAN

18.77 / 20

Écricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 1/8

Numéro de table 006

Problème :

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

1.a) $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$

1.b) $t \to t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$

en 0 : $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$

or, d'après le critère de Riemann (Intégrales de fonctions Positives) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}$ converge si et seulement si $1-x < 1$

soit $x > 0$

d'où, Par critère de comparaison Par équivalence,

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ converge si et seulement si $x > 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

1.c) $t \to 1-t$ est de classe C^1 et est bijective sur $[0, \frac{1}{2}]$ (, le changement de variable est de toute manière licite car affine.

$s = 1-t \qquad t = 1-s$

$ds = -dt$

donc $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{1} s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,ds$

sont de même nature (et égales en cas de convergence)

1.d) de même qu'en q. 1.a)

$s^{y-1}(1-s)^{x-1} \underset{s \to 0}{\sim} \frac{1}{s^{1-y}}$ ....

Riemann

ssi $1-y < 1$ ie $y > 0$

Ccl : $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ converge si et seulement si x et $y > 0$

~~Ainsi~~ 2. Soit $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, On pose $u = 1-t$ (affine

$du = -dt$

$t = 1-u$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\,du$$

$$= \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,dt \quad \left(\begin{matrix}\text{indice}\\ \text{muet}\end{matrix}\right)$$

donc $B(x,y) = B(y,x)$

3) Soit $x > 0$, $B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{1-1}\,dt$

$$= \int_0^1 t^{x-1}\,dt$$

$$= \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

4.a) $\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2$, (linéarité de l'intégrale

$$B(x+1,y) + B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x}(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^{y}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(t + (1-t))$$

$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} = B(x,y)$$

4.b) $\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2$,

$B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y}\ldots$ Par intégration par partie.

$$= \left[\frac{t^x}{x}(1-t)^y\right]_0^1 + \frac{y}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x} B(x+1,y)$$

d'où, $xB(x,y+1) = yB(x+1,y)$ $\left(\begin{matrix}x \neq 0\\ x,y > 0\end{matrix}\right)$

4. c) $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2$,

$B(x+1, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, dt$

$= \int$

t^{x+y-1}

Numéro d'inscription 50126

Né(e) le 17/02/2005

Nom ARRAD

Prénom (s) ILAN

18.77 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 2 /

Numéro de table 006

Partie 2.

6.a) Soit $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma(m+1) = m\,\Gamma(m) = m!$ (Récurrence immédiate)

6.b) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\, dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$

$u = \sqrt{2t}$ $\qquad u^2 = 2t$

$du = \frac{2}{2\sqrt{2t}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2t}}\, dt$ $\qquad \sqrt{t} = \frac{u}{\sqrt{2}}$ $\qquad t = \frac{u^2}{2}$ $\qquad dt = u\, du$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{u} \sqrt{2}\; u\, du$

$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{2}\, du$

la fonction en Présence étant Paire,

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\, du\right)}_{=1} \sqrt{\pi}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

on or sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = 1$ (densité d'une loi normale centrée réduite)

d'où $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(7-a)

7.a) $\int_{-\infty}^{0} f_{(a,b)}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt = 0$

$t \to t^{a-1} e^{-bt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

en 0 : $t^{a-1}e^{-bt} \sim \frac{1}{t^{1-a}}$

donc l'intégrale converge si et seulement si $a > 0$, c'est le cas, donc

Soit $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^{\varepsilon} f_{a,b}(t)\, dt = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\varepsilon} t^{a-1} e^{-bt}\, dt$$

On pose $u = bt$ (affine) $du = b\, dt$ $t = \frac{u}{b}$

et $\int_0^{\varepsilon} t^{a-1} e^{-bt}\, dt = \int_0^{\varepsilon} \left(\frac{u}{b}\right)^{a-1} e^{-u} \frac{du}{b}$

$= \frac{1}{b^a} \int_0^{\varepsilon} u^{a-1} e^{-u}$

Or $\lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_0^{\varepsilon} u^{a-1} e^{-u} = \Gamma(a)$

d'où $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{b^a} = 1$

de plus, $t \mapsto \frac{t^{a-1} e^{-bt} b^a}{\Gamma(a)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en 0 et est positive,

donc $f_{a,b}$ est une densité de Probabilité.

8. a) $f_{a,1} = \begin{cases} \frac{1^a t^{a-1} e^{-t}}{\Gamma(a)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{t^{a-1} e^{-t}}{\Gamma(a)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$

On reconnaît une densité d'une variable aléatoire suivant la loi ~~[illegible]~~ $\gamma(a)$ (gamma de Paramètre (a)

Soit $X \hookrightarrow \gamma(a)$, $E(X) = V(X) = a$

8. b) $f_{1,b} = \begin{cases} b\, e^{-bt} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$

Si X admet $f_{1,b}$ comme densité, alors

$X \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$ et $E(X) = \dfrac{1}{b}$

X admet une variance si et seulement si

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{1,b}(t)\, t^2\, dt$ converge

alors revient à étudier la convergence de

$b \int_0^{+\infty} t^2 e^{-bt}\, dt$ qui est de même nature et égale en cas de convergence que

$u = bt \qquad t = \dfrac{u}{b}$

$du = b\,dt$

$b \int_0^{+\infty} \dfrac{u^2}{b^2} e^{-u} \dfrac{du}{b}$

$= \dfrac{1}{b^2} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u}\, du = \dfrac{\Gamma(3)}{b^2} = \dfrac{2}{b^2}$

et d'après Koenig Huygens,

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{2}{b^2} - \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{b^2}$

Numéro d'inscription 501226

Né(e) le 17/02/2005

Signature

Nom ARRAD

Prénom (s) ILAN

18.77 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 3 /

Numéro de table 006

9) a. $Y = bX$, $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$$P(Y \leq x) = P(bX \leq x)$$
$$= P\left(X \leq \frac{x}{b}\right) \quad (b > 0)$$
$$= F_X\left(\frac{x}{b}\right)$$

$x \to \frac{x}{b}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$x \to F_X(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Ainsi, on obtient une densité de Y en dérivant $F_X\left(\frac{x}{b}\right)$ là où elle est dérivable

donc, par composition $F_X\left(\frac{x}{b}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^0$

$$f_{bX}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{t^{a-1}}{b^{a-1}} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

← valeur arbitraire.

$$\boxed{f_{bX}(t) = \begin{cases} \frac{t^{a-1} e^{-t}}{\Gamma(a)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}}$$

On reconnaît une densité de $\Gamma(a)$ $E(X) = a$
$V(X) = a$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

5.1)

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p-q-1} B(p-1,q)$$

$$= \frac{(p-1)}{p-q-1} \frac{(p-2)}{(p-q-2)} \cdots \frac{\overbrace{B(1,1)}^{=1}}{(p-\cancel{q}p-q)}$$

$$\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad B(p,q) = \boxed{\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p-q-1)!}}$$

on multiplie en bas et en haut par $(q-1)!$

~~Peut~~

Peut être qu'une récurrence aurait été plus rigoureuse...

(bluff ?)

10) X_1 et X_2 sont indépendants à densité, et X_1 est bornée

le théorème de convolution assure que X_1+X_2 est à densité et une densité est donnée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1,b}(t)\, f_{a_2,b}(x-t)\, dt = f_{X_1+X_2}(x)$$

$$= \int_0^x \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} t^{a_1-1} e^{-bt} \frac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)} (x-t)^{a_2-1} e^{-b(x-t)}\, dt$$

$$= \frac{b^{a_1+a_2} e^{-bx}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^x t^{a_1-1} (x-t)^{a_2-1}\, dt$$

→ Ch. de var C^1 bijectif ... $x>0$

On pose $u = \frac{t}{x}$ $\quad du = \frac{1}{x}dt \quad t = ux$

$$\int_0^x t^{a_1-1}(x-t)^{a_2-1}\, dt = \int_0^1 u^{a_1-1} x^{a_1-1} x^{a_2-1} (1-u)^{a_2-1} x\, du$$

$$= B(a_1,a_2)\, x^{a_1+a_2-1}$$

Cela suffit pour conclure : X_1+X_2 admet pour densité la fonction : $x \to \begin{cases} \dfrac{b^{a_1+a_2} B(a_1,a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

10.b)

10.c) $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}^2}{1} = \pi$

Numéro d'inscription 501226

Né(e) le 17/02/2005

Nom ARRAD

Prénom (s) ILAN

18.77 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 4 /

Numéro de table 006

Partie 3

11. a)

12. a) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

$E(X^{a-1})\ \exists \iff \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx$ converge absolument,

d'après le théorème de transfert

On reconnait $\Gamma(a) = E(X^{a-1})$

Par Koenig Huygens, $V(X^{a-1}) = E((X^{a-1})^2) - (E(X^{a-1}))^2$

$= \Gamma(2a-1) - (\Gamma(a))^2$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

12.b) Mn est une fonction indépendante du Paramètre $\Gamma(a)$,
donc Mn est un estimateur.
de plus,

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k^{a-1})$$

(linéarité de l'espérance)

$$= \frac{1}{n} n \Gamma(a) = \Gamma(a)$$

Ccl : Mn est un estimateur ~~de~~ sans biais de $\Gamma(a)$

12.c) si $X \hookrightarrow U([0,1])$
alors $-\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

donc la fonction renvoie n réalisations d'une loi $\mathcal{E}(1)$

12.d)

11. b) def Simul(x,y) :
    U = rd.random()
    return (U ** (x-1)) * ((1-U) ** (y-1))

11. e) On illustre la Q. 10. c $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi \simeq 3,14$

11. c) D'après la loi faible des grands nombres,

(R_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même espérance $B(x,y)$,

donc $R_n \xrightarrow{P} B(x,y)$

11.) $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une espérance si et seulement si

$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ converge (d'après le théorème de transfert)

On reconnaît $B(x+1, y) = \dfrac{\Gamma(x+1)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} = E(U^{x-1}(1-U)^{y-1})$

14) d) def $\mathrm{Pn}(x, y, n)$

```
S = 0
for k in range(1, n+1)
    S = S + Simul
Print S/n
```

Numéro d'inscription 50126

Né(e) le 17/02/2005

Nom ARRAD

Prénom (s) ILAN

Signature

18.77 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 5 /

Numéro de table 006

Exercice 2

1.a) M est la matrice d'un end

. La famille $(I_3, \dots M^9)$ comporte 10 vecteurs, or

$\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9 < 10$

or, une surfamille est nécessairement liée

donc $(I_3, \dots M^9)$ est liée

1.b) $(I_3, \dots M^9)$ est liée, donc, $\exists (x_0, \dots x_9) \in \mathbb{R}^{10}$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{9} x_k M^k = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

on a donc bien $P(M) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$, avec $\deg M \leq 9$

donc il existe un polynome annulateur non nul de M de degré inférieur ou égal à 9.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

2. a)

al-matrix Power(3) !

```
def PolyAnn(M)
    A = np.dot(M,M)        # A = M^2
    a = np.dot(A,M)        # a = M^3
    b = (-4*A              # b = -4M^2
    c = (-12)*M            # c = -12M
    d = (-28)*np.eye(3)    # d = -28 I_3
    Pol = a + b + c + d    # on a construit le Polynome annulateur.
    if Pol == np.zeros(3) :
        Print "True"
    Elif :
        Print "False"
```

Un peu long...

2. b) Supposons M inversible,

$$M^3 - 4M^2 - 12M = 28I$$

en multipliant par M^{-1} à gauche et à droite,

$$M^2 - 4M - 12I = 28M^{-1}$$

d'où $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I)}$

(cela justifie l'existence de M^{-1})

3.a) D'après le cours, $Sp(M) \subset R$

avec R l'ensemble des racines d'un polynome annulateur,

~~Soit~~ Soit $\lambda \in Sp(M)$, $\exists X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tq $MX = \lambda X$

donc $M MX = \lambda MX$ $\quad M^2 X = \lambda^2 X$

$M^3 X = \lambda^3 X$

donc $P(\lambda)$

M n'est pas diagonalisable.

3.c) M admet au plus une valeur propre réelle

1er cas : M n'admet pas de valeur propre, $\Rightarrow$ M n'est pas diagonalisable

2e cas. M admet une unique valeur propre ~~~~ notée λ, donc si M était diagonalisable alors M serait semblable à λI_3 ce qui n'est pas le cas, donc M pas diago

4. ${}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tMM = S$

${}^tS = S$ donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.

5. Soit $\lambda \in Sp(S)$, $\exists X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ tq $SX = \lambda X$

${}^tMMX = \lambda X$, et en multipliant à gauche et à droite par ${}^tX$,

${}^tX\,{}^tMMX = \lambda\,{}^tXX$

Soit ${}^t(MX)MX = \lambda\,{}^tXX$ et en introduisant la norme associée au produit scalaire canonique, il vient,

$$\|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2$$

$$\text{Soit } \lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \leftarrow X \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ donc } \|X\| \neq 0$$

donc les valeurs propres de S sont positives car $\frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$

de plus comme M est inversible, $0 \notin Sp(M)$, donc $\|MX\|^2 \neq 0$

donc $\lambda > 0$

donc $\boxed{Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*}$

6.) S est symétrique, donc diagonalisable d'après le théorème spectral, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, D une matrice diagonale telle que

$$\boxed{S = PD\,{}^tP}$$

Numéro d'inscription 50126

Né(e) le 17/02/2005

Signature

Nom ARRAD

Prénom (s) ILAN

18.77 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 6 /

Numéro de table 006

7.a) On sait que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in Sp(S)$

or, d'après (S), $Sp(C) \subset \mathbb{R}_+^*$, On Pose

$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix}$ on a $\Delta^2 = D$

! on Peut Prendre la racine car $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$

Cette matrice est unique, cela résulte du fait que $x \rightarrow \sqrt{x}$ réalise une bijection sur $\mathbb{R}_+^*$. On Peut Supposer qu'il existe 2 Matrices vérifiant $\Delta_1^2 = D = \Delta_2^2$ et montrer que $\Delta_1 = \Delta_2$

7.b) Δ est triangulaire (Supérieure et inférieure et tous ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc Δ est inversible

8.) On Pose $R = P \Delta {}^tP$ car P est orthogonale (ie ${}^tPP = I_3$)

$R^2 = P\Delta {}^tP P \Delta {}^tP = P\Delta I_3 \Delta {}^tP = P \Delta^2 {}^tP$ (q. 7.a)

$= P D {}^tP = S$ (q 6)

car $\Delta^2 = D$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

9) Une matrice orthogonale est inversible (${}^tP = P^{-1}$)
Δ est inversible (question 7-b)
un Produit de matrices inversibles est inversible donc

$R = P\Delta {}^tP$ est inversible
et $R^{-1} = (P\Delta {}^tP)^{-1}$

$= ({}^tP)^{-1} \Delta^{-1} P^{-1}$

$R^{-1} = P \Delta^{-1} {}^tP$

10) ${}^tU = {}^t(MR^{-1}) = {}^t(R^{-1}) {}^tM$

donc ${}^tUU = {}^t(P\Delta^{-1} {}^tP) {}^tM M P\Delta^{-1} {}^tP$

$= P\Delta^{-1} {}^tP {}^tM M P \Delta^{-1} {}^tP$

Partie 3

11.) R est inversible donc $0 \notin Sp(R)$,
de plus, $R = P\Delta {}^tP$ R et Δ sont semblables donc $Sp(R) = Sp(\Delta)$
or $Sp(\Delta) \subset \mathbb{R}_+^*$ car les valeurs propres de Δ sont les coefficients diagonaux. donc $\boxed{Sp(R) \subset \mathbb{R}^+}$

12.) $M = VT$ donc $T = V^{-1}M = {}^tVM$ car $V \in O_3(\mathbb{R})$

donc $T^2 = {}^tVM\,{}^tVM$

$S = {}^tMM = {}^t(VT)VT = {}^tT\,{}^tVVT = TI_3T$
$= T^2$ car
$V \in O_3(\mathbb{R})$ ie ${}^tVV = I_3$ et car $T \in S_n(\mathbb{R})$ ie ${}^tT = T$

$\boxed{\text{donc } T^2 = S}$

$N^2 = {}^tPTP\,{}^tPTP = {}^tPT^2P = {}^tPSP = \Delta$ (9.6)

$\boxed{\text{donc } \Delta = N^2}$

14-a)

$$P\,E_i = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^e$$

$$P\,E_1 = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} C_1 \\ \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(P E_1)_{j,1} = \sum_{k=1}^{3} P_{jk}\, E_k = 0 \text{ sauf si } k = i$$
$$= P_{ji}$$

144.b) Les colonnes de P sont les vecteurs Propres de S car on a diagonalisé S

15) $N^2 = D$

$(N_{i,j})^2 = D_{i,j}$

donc $N_{i,j} = \sqrt{D_{i,j}}$ et comme

Numéro d'inscription 5 0 1 2 2 6

Né(e) le 1 7 / 0 2 / 2 0 0 5

Nom A R R A D

Prénom (s) I L A N

Signature

18.77 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 7 /

Numéro de table 0 0 6

Commencez à composer dès la première page

Exercice 1

1.a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$

1.b) $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ et d'après 1.a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge

1.c) $\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (1.a) donc

$\frac{1}{4} \sum \frac{1}{n^2}$ converge (combinaison linéaire d'une série convergente),

comme $\frac{1}{n^2} \geq 0$, d'après le critère de comparaison par équivalence des

séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

2) Les séries en présence étant convergentes, on peut manipuler leur somme.

$$A - B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2}$$

On remarque que lorsque n est paire $\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$

lorsque n est impaire $\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{2}{n^2}$, donc il reste uniquement les termes impaires dans la somme.

donc $A - B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

donc $\boxed{A - B = 2C}$

3.a) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad (L_1)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad (L_2)$$

d'où (L_1+L_2) donne $\boxed{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)}$

3.b) Pour $n=1$, Soit $t \in [0,\pi]$ $\sum_{k=1}^{1} (-1)^k \cos(kt) = -\cos(t)$

et $\dfrac{-\frac{1}{2} + (-1)^1 \cos\left(\frac{2+1}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = \dfrac{-\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{3t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$

4.a) f est une fonction continue sur un segment, donc f est bornée, ie : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M$

(Le théorème assure aussi que les bornes sont atteintes).

de même f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc f' est continue sur $[a,b]$

donc $\exists M \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leq M$

4.b) $t \mapsto f'(t) \sin(\lambda t)$ est continue sur $[a,b]$,

$|f'(t) \sin(\lambda t)| \leq M$ (d'après 4.a et comme $|\sin(t)| < 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$,

d'où par croissance de l'intégrale (fonction continue et bornes dans le bon sens.

$$\int_a^b |f'(t) \sin(\lambda t)| \, dt \leq M(b-a)$$

d'où d'après l'inégalité triangulaire et en divisant par $\frac{1}{\lambda}$

($\lambda \neq 0$ car on va faire tendre λ vers $+\infty$.

$$0 \leq \left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) \, dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(t) \sin(\lambda t)| \leq \frac{1}{\lambda} M(b-a)$$

or $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{M(b-a)}{\lambda} = 0$

donc, par encadrement, $\lim \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) \, dt = 0$

Numéro d'inscription 50122G

Né(e) le 17/02/2005

Nom ARRAD

Prénom (s) ILAN

Signature

18.77 / 20

Écricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 8 /

Numéro de table

Commencez à composer dès la première page.

4.c)

$A = \left| \int_a^b f(t) \cos(\lambda t)\, dt \right|$ ~~$\int_a f(t) \cos(\lambda t)\, dt$~~

$A = \left| \left[f(t) \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t)\, dt \right|$

$A \leq \frac{1}{\lambda} | f(b) \sin(\lambda b) - f(a) \sin(\lambda a) | + \left| \frac{1}{\lambda} \right| \left| \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t)\, dt \right|$

Or, d'après 4.b, $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t)\, dt = 0$

d'où $\lim A = 0$ par encadrement,

Cl : $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t)\, dt = 0$

5.a) $t \mapsto \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas sur $]0, \pi]$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

$\forall t \in]0, \pi]$, f est dérivable et $f'(t) =$

$$f'(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t}{\frac{t}{2}} \sim 2$$

donc $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 2$

donc f est Prolongeable Par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$

5. c) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$,

réalisons un développement limité au numérateur.

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{8 \times 6} + o(t^3) - \frac{t}{2}\left(1 - \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right)$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)$$

$$= \frac{t^3}{16} - \frac{t^3}{48} + o(t^3)$$

d'où $f'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)}{\dfrac{x^2}{4}}$

7. b) $\begin{cases} A - B = \dfrac{\pi}{4} \\ A = \dfrac{4}{3}\,\dfrac{\pi}{8} \end{cases}$ $\quad \boxed{A = \dfrac{\pi}{6}}$ $\quad B = A - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi - 6\pi}{24} = \dfrac{-2\pi}{24} = \boxed{\dfrac{-\pi}{12}}$

d'après 2 et 7-a.