Copie anonyme - n°anonymat : 191073

Partie 1 :

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \mathbb{N}^*, X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

$V(X_i) = 1$ car $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
et d'après koenig - Huygens, $V(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i)$
i.e $1 = E(X_i^2) - 0$
Donc X_i admet un moment d'ordre 2 avec $E(X_i^2) = 1$.
Ainsi par linéarité de l'espérance, sachant que X_i admet un moment d'ordre 2, $\forall i \in [\![1,n]\!]$,
$\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = E(S_n)$
et $\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n$

$\boxed{\text{Donc } S_n \text{ admet une espérance avec } E(S_n) = n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*}$

1) b)
```
def simul(n):
    a = 0
    for k in range(1, n+1):
        a = a + (rd.normal(0, 1, 1))**2
    return a
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1)c) La réalisation de $f(n,N)$ nous donne $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_n^2 - n^2$

et avec le graphique on remarque que avec un N très grand,
$f(n,N) = 2n$
or d'après la 1)a), $E(S_n) = n$ donc $E^2(S_n) = n^2$
et d'après la loi faible des grands nombre, S_n^2 admettant une espérance, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_n^2 \xrightarrow{P} E^2(S_n)$

Donc avec un N très grand qui permet donc d'avoir une valeur moyenne de S_n^2,
on a que $E(S_n^2) - E^2(S_n) = 2n$
or d'après koenigs-Huygens, $E(S_n^2) - E^2(S_n) = V(S_n)$
Donc on conjecture que $V(S_n) = 2n$

2)a) $W_1 = \frac{1}{2}S_1$ avec $S_1 = X_1^2$ avec $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\underbrace{P(W_1 \leq x)}_{F_{W_1}(x)} = P(\frac{1}{2}S_1 \leq x)$
$= P(S_1 \leq 2x)$
$= P(X_1^2 \leq 2x)$
$= P(-\sqrt{2x} \leq X_1 \leq \sqrt{2x})$
$= \phi(\sqrt{2x}) - \phi(-\sqrt{2x})$ car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
$= \phi(\sqrt{2x}) - (1 - \phi(\sqrt{2x}))$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$
$= 2\phi(\sqrt{2x}) - 1$

$\sqrt{\ }$ étant continue et C^1 sur $]0,+\infty[$ et à valeur dans $]0;+\infty[$ et ϕ étant continue et C^1 sur $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction repartition d'une variable aléatoire à densité, normale, F_{W_1} est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$

$\forall x \in \mathbb{R}^-$, $P(W_1 \leq x) = P(X_1^2 \leq 2x) = 0$
Donc F_{W_1} est continue et C^1 sur $\mathbb{R}^-$
or, $\lim_{x \to 0^+} (\phi(\sqrt{2x})) = \phi(0) = \frac{1}{2}$

Donc $\lim_{x \to 0^+} F_{W_1}(x) = \frac{2}{2} - 1 = 0$

Donc F_{W_1} est continue sur $\mathbb{R}$ et $C^1(\mathbb{R}^+)$
Donc W_1 est une variable aléatoire à densité

on note f_{W_1} une densité de W_1 : $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $F_{W_1}(x) = 0$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $f_{W_1}(x) = 0$
F_{W_1} étant $C^1(\mathbb{R}_+^*)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_{W_1}(x) = F_{W_1}'(x)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} \phi'(\sqrt{2x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} \varphi(\sqrt{2x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x}$$

Donc $f_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x\pi}} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2) b) $\forall x > 0$, $I(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$

Donc $I\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} \, dt$

$$= \int_0^{+\infty} 2\sqrt{\pi} \, f_{W_1}(t) \, dt$$

$$= 2\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} f_{W_1}(t) \, dt$$

Or f_{W_1} étant une densité, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{W_1}(t) \, dt = 1$

et sachant que $\int_{-\infty}^{0} f_{W_1}(t) \, dt = 0$

Par Chasles, $\int_0^{+\infty} f_{W_1}(t) \, dt = 1$

Donc $I\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}$

$n\in\mathbb{N}^*$

2) c) Les (X_i) étant mutuellement indépendantes, on remarque que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, les X_i^2 sont de même loi ($k\in\mathbb{N}^+$)

et sachant que $S_1 = X_1^2$

alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} S_1$

et donc $W_n = \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} S_1 = \sum_{i=1}^{n} W_1 = n W_1$ avec $W_1 \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$

et par stabilité de la loi gamma, $nW_1 \hookrightarrow \gamma(n\times\frac{1}{2})$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$

2) d) $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

Comme $W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$, $E(W_n) = V(W_n) = \frac{n}{2}$

et $S_n = 2W_n$ Donc $E(S_n) = 2E(W_n)$ linéarité espérance

$= n$

et $V(S_n) = 2^2 V(W_n)$

$= 2n$

Donc on retrouve bien $E(S_n) = n$ et $E(V_n) = 2n$

3) a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, $W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$

Le support d'une loi gamma est $\mathbb{R}_*^+$ et la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}_*^+$

Donc $E(\frac{1}{W_n})$ existe ssi (transfert) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\,dt$ est absolument convergente

avec égalité en cas de absolue convergence

$\forall t\in]0,+\infty[$, $\left|\frac{1}{t}f_{W_n}(t)\right| = \frac{1}{t}f_{W_n}(t)$ car f_{W_n} densité

$$\frac{1}{t}f_{W_n}(t) = \frac{1}{t}\frac{t^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{t^{\frac{n}{2}-2}e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{t^{(\frac{n}{2}-1)-1}e^{-t}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

et on remarque que $\int_0^{+\infty} t^{(\frac{n}{2}-1)-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(\frac{n}{2}-1)$

Donc $\int_0^{+\infty} t f_{W_n}(t)\,dt$ est absolument convergente, donc $E(\frac{1}{W_n})$ existe par théorème de transfert et $E(\frac{1}{W_n}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Copie anonyme - n°anonymat : 191073

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 20 | **Session :** 2025

Épreuve de : Maths 2

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

3)a) suite, $E\left(\frac{1}{W_n}\right) = E\left(\frac{1}{\frac{1}{2}S_n}\right) = E\left(\frac{2}{S_n}\right) = 2E(S_n)$ linéarité espérance

Donc $E(S_n) = \dfrac{E\left(\frac{1}{W_n}\right)}{2} = \dfrac{I\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2I\left(\frac{n}{2}\right)}$

or $I\left(\frac{n}{2}\right) = I\left(\frac{n}{2}-1+1\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right) I\left(\frac{n}{2}-1\right)$

Donc $E(S_n) = \dfrac{1}{2\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \dfrac{1}{n-2}$

3) b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, on pose $A_n = \frac{1}{\sqrt{S_n}}$ avec donc $A_n^2 = \frac{1}{S_n}$

D'après la 3) a), $E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ existe donc A_n admet un moment d'ordre 2. et par définition si A_n admet un moment d'ordre 2, il admet une espérance.
Donc $E(A_n)$ existe.
Donc $E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une espérance.

~~4) $\alpha \in]0,1[$ $\forall n \geq 1$, $T_n = \dfrac{Y}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}$~~

~~Soit $t_{n,\alpha} \in \mathbb{R}$, $P(|T_n| \leq t_{n,\alpha}) = P(-t_{n,\alpha} \leq T_n \leq t_{n,\alpha})$~~
~~on note F_{T_n} la fonction de répartition de T_n)~~
~~$= F_{T_n}(t_{n,\alpha}) - F(-t_{n,\alpha})$~~

4) $\alpha \in]0,1[$ $\forall n \geq 1$
Une densité f_{T_n} de T_n est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

positive sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé, donc F_{T_n} étant sa primitive,
F_{T_n} a une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et étant continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction répartition d'une variable aléatoire à densité,
Par le théorème de la bijection, F_{T_n} admet une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.
et donc $F_{|T_n|}$ admet une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $]0, 1[$
$\alpha \in]0, 1[$, donc $\exists ! \, t_{n,\alpha} \in \mathbb{R}^+$ tel que $F_{|T_n|}(t_{n,\alpha}) = 1 - \alpha$

Donc il existe un unique réel $t_{n,\alpha}$ tel que $P(|T_n| \leq t_{n,\alpha}) = 1 - \alpha$

5) a) $\forall n \geq 3$, $T_n = \dfrac{Y}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$
Sous réserve d'existence.
Par linéarité de l'espérance,
$$E(T_n) = \sqrt{n}\, E\left(\frac{Y}{\sqrt{S_n}}\right)$$
De plus Y est indépendante des $(X_k)_{k \geq 1}$
Donc par le lemme des coalitions, Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes
$$\text{Donc } E(T_n) = \sqrt{n}\, E(Y)\, E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$$

or d'après la 3) b), $E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe et par définition $E(Y)$ existe
Donc $E(T_n)$ existe

De plus $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ donc $E(Y) = 0$
Donc $E(T_n) = 0$

5) b) $\forall n \geq 3$, par le lemme des coalitions, Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes,
$$\text{Donc } V\left(\frac{Y}{\sqrt{S_n}}\right) = V(Y)\, V\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$$

et par Koenig-Huygens, $V\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = \underbrace{E\left(\frac{1}{S_n}\right) - E^2\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)}_{\text{existent}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet variance

Donc $V\left(\frac{Y}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}\right) = n\, V(Y)\, V\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = \boxed{V(T_n) \text{ existe}}$

Par Koenig Huygens, $V(T_n) = E(T_n^2) - E^2(T_n)$
$= E\left(\frac{Y^2}{\frac{S_n}{n}}\right) - 0$

Par le lemme des coalitions $\frac{S_n}{n}$ et Y^2 sont indépendantes
Donc $E\left(\frac{Y^2}{\frac{S_n}{n}}\right) = E(Y^2)\,E\left(\frac{1}{\frac{S_n}{n}}\right) \overset{\text{lin}}{=} E(Y^2) \times n\, E\left(\frac{1}{S_n}\right)$
$= \frac{n}{n-2} E(Y^2)$

et $V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$ par Koenig-Huygens
donc $E(Y^2) = 1$.

$$\boxed{\text{Donc } V(T_n) = \frac{n}{n-2},\ \forall n \geq 3}$$

5) c) $\forall n \geq 3$,
$E((T_n - Y)^2) = E(T_n^2 - 2T_n Y + Y^2)$
$= E(T_n^2) - 2E\left(\frac{Y^2}{\sqrt{S_n/n}}\right) + E(Y^2)$ linéarité espérance

$E(T_n^2) = V(T_n) - E^2(T_n)$ par Koenig-Huygens
$= \frac{n}{n-2}$ d'après 5)a) et 5)b)

$E(Y^2) = 1$
Par le lemme des coalitions, Y^2 et $\frac{1}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}$ indépendants
Donc $2E\left(\frac{Y^2}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}\right) = 2\sqrt{n}\,E(Y^2)\,E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$

$= \sqrt{n} \times \sqrt{2} \times E\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{S_n}{2}}}\right)$

$= \sqrt{2n}\; E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Donc } \forall n \geq 3,\ E((T_n - Y)^2) &= \frac{n}{n-2} + 1 - \sqrt{2n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) \\ &= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)\end{aligned}}$$

6) a) $\forall n \geq 2 \quad , \quad u_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 = S_n + \underbrace{X_{n+1}^2}_{\geq 0}$$

Donc $S_{n+1} \geq S_n \geq 0$

Donc $W_{n+1} \geq W_n \geq 0$ car $W_n = \frac{1}{2} S_n$

Donc $\sqrt{W_{n+1}} \geq \sqrt{W_n} \geq 0$ car $\sqrt{\ }$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc $0 \leq \frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{W_n}}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$

Donc $0 \leq E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) \leq E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ par croissance de l'espérance sur $\mathbb{R}$.

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad , \forall n \geq 2$

Donc $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante

$u_2 = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right)$ $\rightarrow$ on conjecture que $u_2 = 2$

6) b) on montre par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N} / \{0, 1\}$ que $P(n)$: " $u_{n+1} \times u_n = \frac{2}{n-1}$ " est vraie

Initialisation $n = 2$

Copie anonyme - n°anonymat : 191073

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 20	Session : 2025

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths II

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6) c)

```
def suite_u(n):
    u = 2                         # conjecture de la 6)a)
    A = np.zeros(n-1)
    for k in range(2, n+1):
        if u == 0 :               # on vérifie que uk ≠ 0
            A[:, k-2] = 0
        else :
            A[:, k-2] = 2/((k-1)*u)
    return A
```

6) d) on fait un tableau des u_2 à u_{80} et un autre avec les entiers de 2 à 80 arrangés.
La commande V*U.*2 donne le tableau des ku_k^2 $(k \in [\![2,80]\!])$
on remarque alors que plus k est grand, plus ku_k^2 tend vers 2
on peut donc conjecturer que $ku_k^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 2$

Donc que $u_k^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{2}{k}$

Donc que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sqrt{\frac{2}{k}}$

On peut alors conjecturer que (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{\frac{2}{n}}$

6) e) d'après la 6) b), $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} u_n = \frac{2}{n+1}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\frac{2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

Donc à partir d'un certain rang, $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$

car $\sqrt{\ }$ admet une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et que d'après la 6) d) $u_n \geq 0$, $\forall n \geq 2$.

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$

7) on veut montrer que $\forall n \geq 2$ $\forall \varepsilon > 0$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - \gamma| \geq \varepsilon) = 0$

La variable aléatoire $(T_n - \gamma)$ admet un moment d'ordre 2 d'après la 5) c) donc on peut lui appliquer Bienaymé-Tchebychev.

Par Koenig Huygens, $V((T_n - Y)) = E((T_n - Y)^2) - E^2(T_n - Y)$

or $E(T_n - Y) \overset{\text{lin}}{=} E(T_n) - E(Y)$
$= 0$ d'après la 5) a)

Donc $V(T_n - Y) = E((T_n - Y^2)) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ 5)c)

Donc d'après Bienaymé - Tchebychev, $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|(T_n - Y) - E(T_n - Y)| \geq \varepsilon)$$
$$= P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n - Y)}{\varepsilon^2}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{2n-2}{\varepsilon^2(n-2)} - \frac{\sqrt{2n}}{\varepsilon^2} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

or d'après la 6) e), $\lim\limits_{n \to +\infty} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \sqrt{\frac{2}{n}}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{\varepsilon^2} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{2}{\varepsilon^2}$

et $\frac{2n-2}{n-2} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\frac{n}{n} = 2$

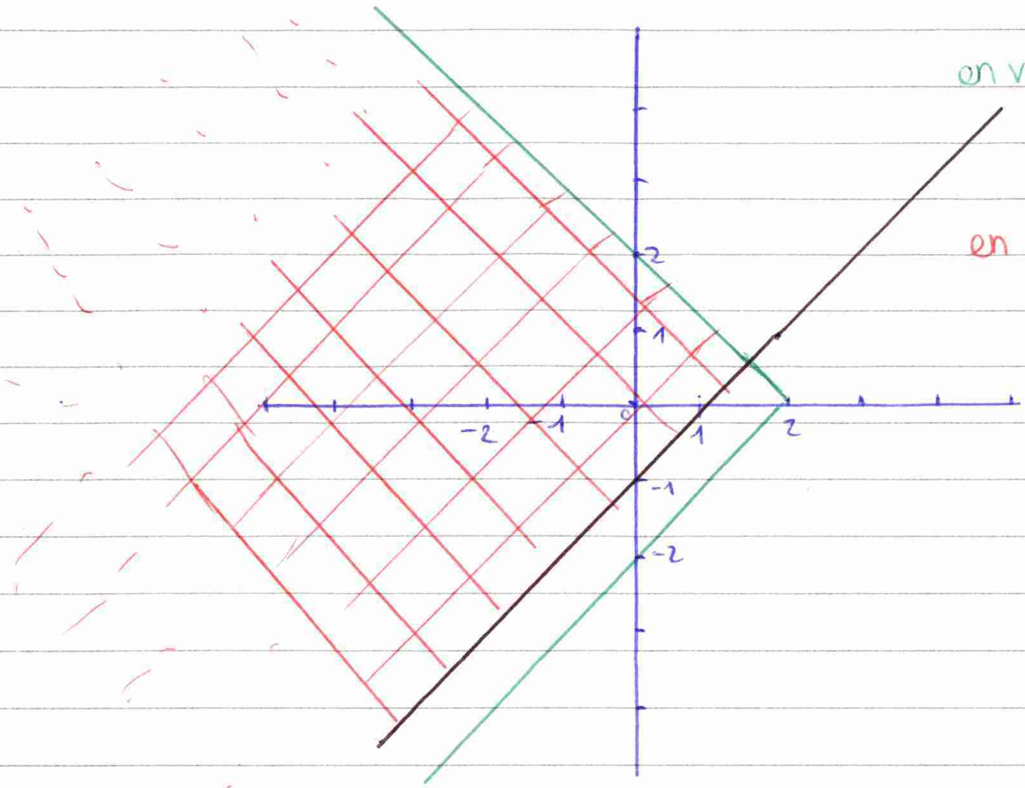
Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon^2} = 0$

Donc $\boxed{T_n \xrightarrow{P} Y}$

Deuxième partie

8) Soit $a = 2$ et $b = -1$ alors $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \leq 2 \text{ et } x - y \leq -1\}$

Voir au dos :



en vert : $x+y \leq 2$

en noir : $x-y \leq 1$

en rouge : A

9) a) $y \geq d$ avec $d = \frac{a-b}{2}$

Soit $(x,y) \in A$, alors $x+y \leq a$ et $x-y \leq b$

on sait que $y \geq \frac{a-b}{2} \iff 2y \geq a-b$

on résout :

$$\begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \\ 2y \geq a-b \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-(x-y) \leq a-b \\ x-y \leq b \\ 2y \geq a-b \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\iff \begin{cases} 2y \leq a-b \\ 2y \geq a-b \\ x-y \leq b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = a-b \\ x-a-b \leq b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = a-b \\ x \leq a+2b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = a-b \\ x \leq \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \\ 2y \geq a-b \end{cases} \iff \begin{cases} 2y \leq a-b \\ x+y \leq a \\ 2y \geq a-b \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2y = a-b \\ x \leq a-y \end{cases}$$

Donc $(x,y) \in A \Rightarrow x \in]-\infty, a-y[$

Copie anonyme - n°anonymat : 191073

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 20 | **Session :** 2015

Épreuve de : Maths II

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

9) a) suite

Soit $x \in]-\infty, a-y[$, i.e $x \leq a-y$
avec aussi $y \geq d$ i.e $y \geq \frac{a-b}{2}$ va

$x \leq a-y \Rightarrow x+y \leq a$
et on sait que $\frac{a-b}{2} \leq y$ donc par $\searrow$ de $x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}$
on a $-y \leq \frac{b-a}{2}$

Donc $x-y \leq a-2y = a+(b-a) = b$

Donc on a $\begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \end{cases}$

Donc $x \in]-\infty, a-y] \Rightarrow (x,y) \in A$

Donc $(x,y) \in A \Leftrightarrow x \in]-\infty, a-y]$

9) b) $1_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a-y} \varphi(x)\,dx$ d'après 9)a)

$= \Phi(a-y)$

Donc on a bien $\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\varphi(x)\,dx = \Phi(x-y)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

10) $\forall y \leq d$, on veut montrer que $(x,y) \in A \iff x \in]-\infty, b+y]$

Soit $(x,y) \in A$,

$$\begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \\ 2y \leq a-b \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq b+y & L_1 \leftarrow L_2 \\ x+y-(x-y) \leq a-b & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 2y \leq a-b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq b+y \\ 2y \leq a-b \end{cases}$$

Donc $x \in]-\infty, b+y]$

Soit $x \in]-\infty, b+y]$,

Donc $x - y \leq b$ trivialement

on sait que $y \leq \frac{a-b}{2}$ et que $x \leq b+y$

donc $x+y \leq b+2y$

donc $x+y \leq b+(a-b$

donc $x+y \leq a$

Donc $(x,y) \in A$

Donc $(x,y) \in A \iff x \in]-\infty, b+y]$

Ainsi par raisonnement analogue à la 9) b),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b+y} \varphi(x)\,dx = \phi(b+y)$$

11) a) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixés

Par définition $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y \leq a\}$ est une partie fermée

et $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x-y \leq b\}$ est une partie fermée

et l'intersection de parties fermées est une partie fermée

et comme $A = A_1 \cap A_2$

alors A est une partie fermée

14 /20

11) b) $P((X,Y)\in A) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\, f(x)\,dx\right) g(y)\,dy$

X et Y $\hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t) = g(t) = \varphi(t)$

$((y \geq d), (y \leq d))$ forme un SCE,

donc d'après la 9) b) et la 10),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\, f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx$$
$$= \phi(a-y) + \phi(b+y)$$

Ainsi $P(((X,Y)\in A) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\phi(a-y)+\phi(b-y))\,\varphi(y)\,dy$

on admet

12) D'après la 11), $P(((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\phi(c-z)\,dz$

$$\phi(c-z) = \int_{-\infty}^{c-z}\varphi(x)\,dx$$

On pose le changement de variable $x = t - z$ avec $dx = dt$
qui est $C^1(\mathbb{R})$ et bijectif croissant de $]-\infty, c-z]$ dans $]-\infty, c]$

Ainsi $\int_{-\infty}^{c-z}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c}\varphi(t-z)\,dt$

Donc $P(((X,Y)\in A) = \int_0\left((\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\int_{-\infty}^{c}\varphi(t-z)\,dt\right)dz$

linéarité intégrale $= \int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{c}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,dt\right)dz$

13) $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2/2\right)\exp\left(-\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2/2\right)$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-(u^2+2v+v^2+u^2-2v+v^2)/4\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-2(u^2+v^2)/4\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-(u^2+v^2)/2\right)$$

et $\varphi(u)\varphi(v) = \frac{1}{2\pi}\exp(-u^2/2)\exp(-v^2/2)$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-(u^2+v^2)/2\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)$$

Donc $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(u)\varphi(v) = \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{2}\right)$

14) $P((X,Y)\in A) = \int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,dz\right)dt$

$$= \int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\left(\varphi(d+z)\varphi(t-z)+\varphi(d-z)\varphi(t-z)\right)dz\right)dt$$

question 13 $\rightarrow$ $= \int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\left(\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{d+2z-t}{\sqrt{2}}\right)+\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right)\right)dz\right)dt$

(1) $= \int_{-\infty}^{c}\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)\left(\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+2z-t}{\sqrt{2}}\right)dz\right)dt + \int_{-\infty}^{c}\varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right)\left(\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right)dz\right)dt$

par parité de φ, $\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+2z-t}{\sqrt{2}}\right)dz = \int_{-\infty}^{0}\varphi\left(\frac{d+2z-t}{\sqrt{2}}\right)dz$

on pose $x = \frac{d+2z-t}{\sqrt{2}}$ avec $dx = \sqrt{2}\,dz$ changement de variable $C^1(\mathbb{R})$, bijectif croissant sur $\mathbb{R}$

et donc $\int_{-\infty}^{0}\varphi\left(\frac{d+2z-t}{\sqrt{2}}\right)dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\frac{t-d}{\sqrt{2}}}\varphi(x)\,dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi\left(\frac{t-d}{2}\right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 191073

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 20 | **Session :** 2025

Épreuve de : Maths 2

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

14) suite) et par raisonnement analogue sur $\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right) dz$ avec $x = \frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}$

changement de variable $C^1(\mathbb{R})$ bijectif décroissant sur $\mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right) dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{t+d}{\sqrt{2}}} \varphi(x)\, dx = \phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P((X,Y)\in A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{c} \left(\varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\right) dt}$$

15) On admet

16) $W = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $Z = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$

$c+d = a$ et $c-d = b$

On admet

Partie 3

17) a) $(a_1, \dots, a_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

Donc avec $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k$

Donc $\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k = x - \langle x, a_1 \rangle a_1$
$= x - \sum_{k=1}^{n} x_k \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times a_1$

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, \dots, 1)$

Donc $\sum_{k=1}^{n} x_k \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times a_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k \times \frac{1}{n} (1, \dots, 1)$

et $\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$ Donc $\sum_{k=1}^{n} x_k \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times a_1 = (\bar{x}, \dots, \bar{x})$

Donc $x - \sum_{k=1}^{n} x_k \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times a_1 = (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})$

Donc $\boxed{\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k = (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})}$

17) b) $\left\| \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k \right\|^2 = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle^2 \|a_k\|^2$ par Pythagore car $(a_1, \dots, a_n)$ orthonormée

$= \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle^2$ car a_k normé

Soit $y = (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})$

$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ par définition et $\|y\|^2 = \left\| \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k \right\|^2$ d'après 17)a)

Donc $\boxed{\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

18) a) X_1 et X_2 mutuellement indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

on se place dans $\mathbb{R}^2$, avec $X=(X_1, X_2)$ et $\overline{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$
d'après la 17)a),

$$\langle X, a_2 \rangle a_2 = \left(X_1 - \frac{X_1+X_2}{2}, X_2 - \frac{X_1+X_2}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \langle X, a_2 \rangle a_2 = \left(\frac{X_1+X_2}{2}, \frac{X_2-X_1}{2} \right)$$

et $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$

$$\text{Donc } \langle X, a_2 \rangle = \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} + \frac{X_2-X_1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle X, a_1 \rangle = \frac{X_1}{\sqrt{2}} + \frac{X_2}{\sqrt{2}} = \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$$

$\langle X, a_2 \rangle =$

Admis

18) b) $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$
Soit $R_1 = X_1 + X_2$ et $R_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ indépendantes
alors par définition $\operatorname{cov}(R_1, R_2) = 0$

Soit $\operatorname{cov}(R_1, R_2) = 0$
~~donc~~ $\cancel{\operatorname{cov}(X_1+X_2, \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2) = 0}$
~~donc~~ $\cancel{\beta_1 V(X_1) + \beta_2 V(X_2) + 2\beta_1\beta_2 \operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0}$
$V(R_1+R_2) = V(R_1) + V(R_2) + 2\operatorname{cov}(R_1, R_2)$
$= V(R_1) + V(R_2)$
Donc R_1 et R_2 indépendantes

Donc R_1 et R_2 indépendantes ssi $\operatorname{cov}(R_1, R_2) = 0$

19) a) $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et les $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi
Donc par stabilité de la loi normale,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,n)$$

$$\text{et } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Donc $\overline{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

19) b) D'après la 17) b), $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$

avec $U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, en appliquant la 17) b),

$$U = \sum_{k=2}^{n} \langle X, a_k\rangle = \sum_{k=2}^{n} Y_k$$

Donc $U = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} Y_k$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \langle X, \frac{1}{\sqrt{n}} a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\langle X, a_1\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1$$

Donc $\overline{X} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} Y_1$

18) c) D'après le théorème de Cochran $\forall k \in [\![2,n]\!]$, Y_k et Y_1 sont indépendantes
Donc par le lemme des coalitions, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} Y_k$ et Y_1 sont indépendantes
Donc $\overline{X} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} Y_1$ et $U = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} X_k$ sont indépendantes

Par changement d'indice $U \hookrightarrow \chi^2(n-1)$

~~sont~~