Copie anonyme - n°anonymat : 727910

E3-00115
727910
Mat Appro

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 17

Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES APPROFONDIES I

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I :

① Supposons $x \neq 0$ et qu'il existe $b_0 \in \mathbb{R}$ tq $\ell(x) = \langle b_0, x\rangle_E$

alors $\langle a_0, x\rangle_E = \langle b_0, x\rangle_E$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i = \sum_{j=1}^{n} b_0 x_j$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_0 - b_0) \underbrace{x_i}_{\neq 0} = 0$

$\Leftrightarrow a_0 = b_0$

donc $\exists !\, a_0 \in \mathbb{R}$ tq $\ell(x) = \langle a_0, x\rangle_E$

② La fonction $x \mapsto \langle u(x), y\rangle_F$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors on a vu en ① que pour une fonction définie de E dans $\mathbb{R}$ $\exists !\, z_y$ tq $\forall y \in F$ tq :

$x : \langle u(x), y\rangle \mapsto \langle z_y, x\rangle_E$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(3) Soit $(y,w) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u^*(y+\lambda w) = z_y + \lambda z_w = u^*(y) + \lambda u^*(w)$$

donc u^* est linéaire.

(4) On a que $\forall x \in E$, $\forall y \in F$,

$$\langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle$$

On ${}^tX\,{}^tAY = \langle AX, Y \rangle$

et ${}^tX\,{}^tAY = \langle X, {}^tAY \rangle$

donc nécessairement $Mat_{B_E, B_F}(u^*) = {}^tA$.

Comme $rg(A) = rg({}^tA)$

et que A est ~~l'endomorphisme~~ la matrice représentative d'un endomorphisme dans une base orthonormée donnée, alors $rg(u) = rg(u^*)$.

De même ${}^t({}^tA) = A$

Donc selon le même raisonnement

$(u^*)^* = u$.

5 Soit $(x,y) \in \mathrm{Im}(u^*) \times \ker(u)$
$\exists z \in F$ tq $u^*(z) = x$

$\langle x, y \rangle = \langle u^*(z), y \rangle$

$= \langle z, u(y) \rangle = 0$

donc $\mathrm{Im}(u^*) \subset \ker(u)^\perp$

De plus en vertu de la question précédente et du théorème du rang.

$\dim(E) = \dim \ker(u) + \dim(\ker(u))^\perp$

et $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim \ker(u)$

$= \mathrm{rg}(u^*) + \dim(\ker(u))$

donc $\mathrm{rg}(u^*) = \dim(E) - \dim(\ker(u))$
$= \dim(\ker(u)) + \dim \ker(u)^\perp - \dim \ker(u)$
$= \dim \ker(u)^\perp$

par inclusion et égalité des dimensions

$\ker(u)^\perp = \mathrm{Im}(u^*)$.

D'une part :

6 $\ker(u) \subset \ker(u^* \circ u)$

D'autre part $\forall \cancel{x} \in \ker(u^* \circ u)$

~~[illegible]~~ $\Leftrightarrow \forall X \in \ker({}^tAA)$

${}^tAAX = 0$

$\Leftrightarrow {}^tX\,{}^tAAX = 0$
$\Leftrightarrow \|AX\|^2 = 0 \Rightarrow AX = 0$ donc $X \in \ker(A)$

donc $\ker(u) \supset \ker(u^* \circ u)$

donc $\ker(u) = \ker(u^* \circ u)$

donc comme $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^* \circ u)$

et par inclusion et égalité des dimensions

car $\dim(\ker(u^* \circ u)) + \mathrm{rg}(u^* \circ u) = \dim(E)$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{\dim(\ker(u))}$ $+ \mathrm{rg}(u^* \circ u) = \dim(E)$

$\dim(E) - \mathrm{rg}(u)$

donc $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^* \circ u)$.

donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^* \circ u)$.

(7) Soit $(x, y) \in \mathrm{Im}(u^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} w(x + \lambda y) &= u^* \circ u(x + \lambda y) \\ &= u^* \circ (u(x) + \lambda u(y)) \end{aligned}\right\} \text{car } u \text{ est linéaire}$$

$$= u^* \circ u(x) + \lambda u^* \circ u(y)$$

$$= w(x) + \lambda w(y)$$

Donc w est linéaire.

Copie anonyme - n°anonymat : 727910

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 17 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies 1

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

De plus : soit $x \in \ker(w)$

$\Leftrightarrow w(x) = 0$

$\Leftrightarrow u^* \circ u(x) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \ker(u^* \circ u)$ et $x \in \mathrm{Im}(u^* \circ u)$

$\Leftrightarrow x \in \ker(u)$ et $x \in \mathrm{Im}(u^*)$

$\Leftrightarrow x \in \ker(u)$ et $x \in \ker(u)^\perp$

donc $x = 0$.

Donc $\ker(w') = \{0\}_{\mathrm{Im}(u^*)}$

De plus comme $\mathrm{Im}(u^*) \subset E$

qui est de dimension fini

alors avec le théorème du ~~rang~~ rang, on

obtient que w est injectif et surjectif
donc bijectif.

Donc w est un isomorphisme.

matrice représentative de l'isomorphisme w.

Alors $^{t}AAX = \cancel{wx}$ $\forall X \in Im(^{t}A)$.

Alors selon le problème des moindres carrés, w est le projeté orthogonal de A sur Im(^{t}A).

8

$y = \pi$

(9b) π est le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Im}(u)$

donc Q sa matrice représentative est symétrique

dans une base orthonormée donnée de $\mathrm{Im}(u)$.

C'est-à-dire selon le théorème spectral

$\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, orthogonal et D diagonale

tels que :

$$Q = P D \, {}^tP.$$

on supposons $r = rg(u)$ ...

Alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_r, 0 \dots 0)$

où $\forall i \in [\![1, r]\!]$, e_i forment une base orthonormée.

Complétons cette base en une base de E $(e_1 \dots e_p)$

$$\text{Alors } D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_1 \\ | \\ e_r \\ e_{r+1} \\ | \\ e_p \end{array} \quad \text{avec } r < p$$

alors $rg(u) = rg(D) = r$

Mais comme $Tr(D) = \dots = rg(D) = r$

et que deux matrices semblables ont la même trace

alors $Tr(Q) = Tr(D) = rg(D) = r$

⑨ $M = {}^tAA$.

- Supposons M inversible alors $rg(M) = p$

$\Leftrightarrow rg({}^tAA) = p$

$\Leftrightarrow rg(A) = p = rg({}^tA)$

le produit est de rang p ssi les deux matrices sont de rang p.

~~- Supposons $rg(A) = p$.~~

~~donc $rg({}^tA) = p$.~~

donc M inversible $\Leftrightarrow rg(A) = p$

⑩ a) $rg(A) = p = Tr(Q)$ (⑧b)).

De plus M est inversible

et $M = {}^tAA = {}^tAQA$ (⑧a))

donc $M^{-1}M = M^{-1}\,{}^tAA = M^{-1}\,{}^tAQA$.

donc $I_m = M^{-1}\,{}^tAQA$

Copie anonyme - n°anonymat : 727910

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 17	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies 1

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(10) b)
```
def Python Calcule_Q(A):
    A = np.converse(n,p)
    if al.matrice_rank(A) == p :
        B = np.shape(A)
        ~~B = np.dot(np.tr A, np.transpose~~
        B = np.dot(A, al.inv(np.dot(np.transpose(A),A))
      return (np.dot(B, np.transpose(A))
  else :
      Error .
```

(11) $^tXMX = {}^tX\,{}^tAAX$

$= \|AX\|^2 \geqslant 0$

Partie II :

(12) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$f_0(X+H) - f_0(X) = \frac{1}{2}\|A(X+H) - Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2$

$= \frac{1}{2}\|AX - Y + AH.\quad\|^2 - \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(13) Supposons $\nabla J(x) = 0$

alors $J_0(x+H) - J_0(x) = \frac{1}{2}\, {}^tH A H \geq 0$

$\iff$ " $J_0(x+H) \geq J_0(x)$

$\iff$ " . J_0 admet un minimum global en x.

(14) ~~$x_0 \in \ker(A)^\perp \iff$~~

~~En vertu de la question (7) et des manches cermes $\exists x_0$ tq $\in \ker(A)^\perp$~~

~~tq ${}^tAAx_0 =$~~

~~$\ker(A)^\perp = \mathrm{Im}({}^tA) = \mathrm{Im}({}^tAA)$~~

~~donc $\forall x \in \ker(A)^\perp$, $x \in \mathrm{Im}({}^tAA)$~~

~~i.e ${}^tAAx =$~~

(15) a) Soit $x \in S_0$

donc $S(x) = 0$

donc $Mx = {}^tAY$

donc ${}^tAAx = {}^tAY$.

b) $\cancel{A(x - x_0) = Ax - Ax_0}$

Soit $x \in S_0$

$x = \underbrace{x - x_0}_{\in \ker(A)} + \underbrace{x_0}_{\in \ker(A)^\perp}$ (en décomposant x dans $\ker(A)$ et $\ker(A)^\perp$)

donc $\|x\|^2 = \|x - x_0 + x_0\|^2$

pythagore $= \|x - x_0\|^2 + \|x_0\|^2 \geq 0$

donc $\|x\|^2 \geq \|x_0\|^2$ donc $\|x\| \geq \|x_0\|$

(10) a) $T = \| A(X - U_0)\|^2$

$$= \| AX - AU_0\|^2 = \| QY - AU_0\|^2$$

$$= \| Q(AU_0 + Z) - AU_0\|^2$$

$$= \| AU_0 \underbrace{(Q - I)}_{=0} + QZ\|^2$$

$$= \boxed{\| QZ\|^2}$$

$$= \langle QZ, QZ \rangle = {}^tZ \underbrace{{}^tQ\, Q}_{Q} Z$$

$$= \boxed{{}^tZ Q Z.}$$

b)

```python
def PythonCalculeT(A, signal):
    Z = np.transpose(np.linspace(1, n))
    U = np.dot(np.transpose(Z), PythonCalculeQ(A))
return(np.dot(U, Z)).
```

Copie anonyme - n°anonymat : 727910

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 17

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies I

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

e) $\mathbb{E}[z_i^2] = \mathbb{V}[z_i^2] + \mathbb{E}[z_i]^2$

$= \sigma^2.$

f) ~~$T_1 + 2T_2 = \sum_{i=1}^{m} Q_{ii} z_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} Q_{ij} z_i z_j$~~

~~$= \langle \mathrm{Diag}(Q)z, z\rangle + \langle$~~

$T = \langle z, Q z\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} z_i z_j Q_{ij}$

$= \sum_{i=1}^{m} z_i^2 Q_{ii} + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} z_i z_j Q_{ij}$

$= T_1 + 2T_2.$

donc $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[T_1] + 2\mathbb{E}[T_2]$

$=$

c) $V[T] = Cov(T, T)$

$= Cov(T_1 + 2T_2, T_1 + 2T_2)$

$= Cov(T_1) + 4Cov(T_1, T_2) + 4Cov(T_2)$

$= V[T_1] + 4V[T_2] + 4\left(\underbrace{\mathbb{E}[T_1]\mathbb{E}[T_2] - \mathbb{E}[T_1 T_2]}_{=0}\right)$

$= V[T_1] + 4V[T_2] + 4$ [illegible] $\cdot \mathbb{E}[T_1]\mathbb{E}[T_2]$

Admettons $V[T] = 2p\sigma^4$.

A l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebitchev on a :

~~$\mathbb{E}[T]=0$~~

~~$\mathbb{P}(T \geq$~~

$$\mathbb{P}(T - \mathbb{E}[T] \geq (1+\alpha)p\sigma^2) \leq \frac{V[T]}{(1+\alpha)^2 p^2 \sigma^4}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(T > (1+\alpha)p\sigma^2) \leq \frac{2}{(1+\alpha)^2 p} \leq \frac{2}{\alpha^2 p}$$

Partie IV :

(17) Soit $(u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

$$\frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t} = \frac{\sqrt{\langle u+tv, u+tv\rangle} - \sqrt{\langle u,u\rangle}}{t}$$

$$= \frac{\langle u+tv, u+tv\rangle - \langle u,u\rangle}{t\left(\sqrt{\langle u+tv, u+tv\rangle} + \sqrt{\langle u,u\rangle}\right)}$$

~~13 a) $\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:~~

~~X_0 est le minimum global de J~~

~~donc $J_0(X+H) - J_0(X) \geq 0$~~

~~$\iff J_0(X+H)$~~

b) En posant $H = X_0$

Comme $X_0 \in \ker(B)$

et que $0 \leq \langle D(X_0), X_0 \rangle \leq \|BX_0\| = 0$

par encadrement $\langle D(X_0), X_0 \rangle = 0$

donc $D(X_0) \in \ker(B)^{\perp}$.

c) alors $D(X_0) \in \operatorname{Im}({}^tB)$ selon (5)

donc $\exists W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq

$$D(X_0) = {}^tBW.$$

d) Comme $D(X_0) \in \operatorname{Im}({}^tB) = \operatorname{Im}({}^tBB)$ (6).

alors $\exists V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tq

$${}^tBBV = D(X_0)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 727910

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 17 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies I

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

e) $\|BV\| \leq \|B\| \|V\|$ (inégalité de Cauchy Schwartz)

donc $\leq \|B\| \times 1$

~~Alors $B(x_0) = {}^tBW = {}^tBBV$~~

~~$= B(x_0) = -{}^tBW = -{}^tBBV$.~~

~~Or a $\|B\| \leq 1$.~~

~~et $\|Bx_0\|V$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751