

Copie anonyme - n°anonymat : 224734



D2-00069
224734
Mat Appro

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 26

Session : 2025

Épreuve de : Maths 1 HEC ESSE

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I

1) Soit $l \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ - Soit $x \in E$.

Supposons $\exists a_0 \in E \quad l(x) = \langle a_0, x \rangle_E$.

et $\exists a_1 \in E \quad l(x) = \langle a_1, x \rangle_E$

donc $\langle a_0, x \rangle_E = \langle a_1, x \rangle_E$

donc $\langle a_0 - a_1, x \rangle_E = 0$ par linéarité à gauche de $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$.

donc $(a_0 - a_1) \in E^\perp = \{0_E\}$

donc $a_0 = a_1$

(Q: $\exists! a_0 \in E \quad l(x) = \langle a_0, x \rangle_E$

2) Soit $y \in F$ et on a $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $x \in E$

$l': x \mapsto \langle u(x), y \rangle_F$ est une application de E dans \mathbb{R}

avec 1) $\exists! z_y \in E \quad l'(x) = \langle z_y, x \rangle$

donc $\exists! z_y \in E \quad \langle u(x), y \rangle = \langle z_y, x \rangle$

3) Soit $(y_1, y_2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u^*(\lambda y_1 + y_2) = z_{\lambda y_1 + y_2}$$

$$\text{or } \lambda u^*(y_1) + u^*(y_2) = \lambda z_{y_1} + z_{y_2}.$$

or $z_{\lambda y_1 + y_2}$ est l'unique vecteur de E tel que :

$$\forall n \in E \quad \langle u(n), \lambda y_1 + y_2 \rangle_F = \langle z_{\lambda y_1 + y_2}, n \rangle_E \quad (*)$$

par linéarité à droite de $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$

$$\langle u(n), \lambda y_1 + y_2 \rangle_F = \lambda \langle u(n), y_1 \rangle_F + \langle u(n), y_2 \rangle_F$$

$$\langle u(n), \lambda y_1 + y_2 \rangle = \lambda \langle z_{y_1}, n \rangle + \langle z_{y_2}, n \rangle_E \quad (**)$$

avec (2)

finalment: avec (*) et (**) on a:

$$\langle z_{\lambda y_1 + y_2}, n \rangle_E = \lambda \langle z_{y_1}, n \rangle_E + \langle z_{y_2}, n \rangle_E$$

donc par linéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$.

$$\langle u^*(\lambda y_1 + y_2) - \lambda u^*(y_1) - u^*(y_2), n \rangle = 0$$

$$\text{donc } u^*(\lambda y_1 + y_2) - \lambda u^*(y_1) - u^*(y_2) \in E^\perp = \{0\}$$

$$\text{donc } \underline{u^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda u^*(y_1) + u^*(y_2)}$$

Au final, u^* est linéaire

4) On a avec 3):

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E$$

$$\text{On a donc } \text{Mat}_{B_E, B_F}(u^*) = {}^t A.$$

Or A et ${}^t A$ ont même rang (ours).

$$\text{donc } \text{rg}(\text{Mat}_{B_F, B_E}(u)) = \text{rg}(\text{Mat}_{B_E, B_F}(u^*))$$

$$\text{ce qui assure finalement que: } \underline{\text{rg}(u) = \text{rg}(u^*)}$$

Matriciellement, on a : ${}^t({}^t A) = A$

$$\text{donc } \underline{\text{Mat}_{B_F, B_E}(u) = \text{Mat}_{B_F, B_E}((u^*)^*)}$$
 avec ce qui

$$\text{précède car } {}^t A = \text{Mat}_{B_E, B_F}(u^*)$$

$$\text{donc } {}^t({}^t A) = \text{Mat}_{B_F, B_E}((u^*)^*) = \text{Mat}_{B_F, B_E}(u) = A$$

$$\underline{\text{Au final, } (u^*)^* = u}$$

5) On a $\ker(u) \oplus \ker(u)^\perp = E$ avec $u \in \mathcal{L}(E, F)$

ainsi $\dim \ker(u) + \dim \ker(u)^\perp = \dim E = p$

or $\operatorname{rg}(u^*) = \operatorname{rg}(u)$ avec 4) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie.

Par le théorème du rang on a :

$$\operatorname{rg}(u) + \dim \ker(u) = \dim E = p$$

$$\text{d'où } \operatorname{rg}(u^*) + \dim \ker(u) = p$$

$$\text{d'où } \operatorname{rg}(u^*) = \dim \ker(u)^\perp = p - \dim \ker(u)$$

$$\text{d'où } \dim \operatorname{Im}(u^*) = \dim (\ker(u))^\perp \quad (1)$$

Soit $x \in \operatorname{Im}(u^*)$ donc $\exists t \in F$ $x = u^*(t)$

Soit $y \in \ker(u)$

$$\langle x, y \rangle_F = \langle u^*(t), y \rangle_F = \langle u(y), t \rangle_E = 0$$

car $y \in \ker(u)$

$$\text{d'où } \operatorname{Im}(u^*) \subset \ker(u)^\perp \quad (2)$$

(1) et (2) assure que : $\operatorname{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$

6) Soit $x \in \ker(u)$

$$u(x) = 0_E$$

d'où par linéarité de u^* :

$$\text{d'où } u^*(u(x)) = 0_F \quad \text{car } u^* \in \mathcal{L}(F, E)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 26	Session : 2025
	Épreuve de : Maths 1 HEC ESSEC		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

donc $\ker(n) \subset \ker(n^* \circ n)$

Travaillons Matriciellement pour la dernière inclusion.

Soit $X \in \ker({}^tAA)$

$$\text{donc } {}^tAA X = 0_{m,n}$$

$$\text{donc } {}^tX {}^tAA X = 0$$

$$\text{donc } \|AX\|^2 = 0$$

$$\text{donc } AX = 0_{p,n}$$

$$X \in \ker(A)$$

$$\text{donc } \ker({}^tAA) \subset \ker(A)$$

fonctionnellement, on a bien : $\ker(n^* \circ n) \subset \ker(n)$

Par double inclusion, $\ker(n^* \circ n) = \ker(n)$

$n \in \mathcal{L}(E, F)$ et $n^* \circ n \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie.

Le théorème du rang assure que: (appliqué 2 fois)

$$\dim \ker(u) + \operatorname{rg}(u) = \dim E = p$$

$$\text{et } \dim \ker(u^* \circ u) + \operatorname{rg}(u^* \circ u) = \dim E = p$$

$$\text{donc } \underline{\dim \operatorname{Im}(u) = \dim \operatorname{Im}(u^* \circ u) = p - \dim \ker(u)} \\ (= p - \dim \ker(u^* \circ u))$$

$$\text{car } \ker(u^* \circ u) = \ker(u) \\ \text{d'après ce qui précède.}$$

$$\text{donc } \underline{\dim \operatorname{Im}(u) = \dim \operatorname{Im}(u^* \circ u) = \dim \operatorname{Im}(u^*)} \\ \text{car } \operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u^*) \text{ avec } u$$

Par ailleurs, soit $x \in \operatorname{Im}(u^* \circ u)$

$$\exists t \in E \quad x = u^*(u(t))$$

donc en posant $z = u(t) \in F$

$$x = u^*(z) \text{ et } \underline{\operatorname{Im}(u^* \circ u) \subset \operatorname{Im}(u^*)}$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} \operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u^*) = \operatorname{rg}(u^* \circ u) \\ \operatorname{Im}(u^* \circ u) \subset \operatorname{Im}(u^*) \end{cases}$$

$$\underline{\text{donc } \operatorname{Im}(u^* \circ u) = \operatorname{Im}(u^*)}$$

$$f) w = u^* \circ u |_{\operatorname{Im}(u^*)}$$

or $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et u^* est aussi un endomorphisme de F dans E d'après 3).

donc $u^* \circ u \in \mathcal{L}(E)$

La restriction de $u^* \circ u$ à $\text{Im}(u^*)$ est de fait aussi un linéaire.

En effet, soit $(x, y) \in \text{Im}(u^*) \times \text{Im}(u^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$w(\lambda x + y) = u^* \circ u(\lambda x + y)$$

$$w(\lambda x + y) = u^*(\lambda u(x) + u(y)) \quad \text{car } u \text{ est linéaire.}$$

$$w(\lambda x + y) = \lambda u^*(u(x)) + u^*(u(y)) \quad \text{car } u^* \text{ est}$$

$$\underline{w(\lambda x + y) = \lambda w(x) + w(y)} \quad \text{linéaire}$$

Donc w est linéaire.

Soit $n \in \ker(w)$

$$\text{donc } w(n) = 0_{\text{Im}(u^*)}$$

$$\text{donc } u^*(u(n)) = 0_{\text{Im}(u^*)}$$

donc $n \in \ker(u^* \circ u) = \ker(u)$ d'après 6).

$$\text{donc } u(n) = 0_{\text{Im}(u^*)}$$

$$\text{or } (\ker(u))^\perp = \text{Im}(u^*)$$

$$\underline{\text{donc } \ker(u) = (\text{Im}(u^*))^\perp}$$

dans $\ker(w) \subset \{0_{\text{Im}(u^*)}\}$

or $\ker(w)$ est un sev de $\text{Im}(u^*)$

$$\underline{\text{dus } \ker(w) = \{0_{\text{Im}(u^*)}\}}$$

w est injective, or w est une application linéaire de $\text{Im}(u^*)$ dans $\text{Im}(u^*)$ et $\text{Im}(u^*)$ est un sev de E qui est de dimension finie.

dus w injective $\Leftrightarrow w$ bijective

w est un isomorphisme. Au titre d'isomorphisme, la

matrice de w dans une base de $\text{Im}(u^*)$ est de le fait
inversible

$$8) a) Q = \text{Mat}_{BF}(\pi)$$

$$A \in M_{n,p}(\mathbb{N}) \text{ dus } {}^tA \in M_{p,n}(\mathbb{N})$$

$$\text{Soit } X \in M_{n,n}(\mathbb{N})$$

$${}^tA Q X = {}^tA {}^tQ X$$

car Q est symétrique, en effet, π est le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(u)$ dus π est un endomorphisme symétrique.

Par ailleurs $Q = \text{Mat}_{BF}(\pi)$ et BF est une base orthonnée

de F dus Q est une matrice symétrique dus ${}^tQ = Q$

Au titre de matrice d'un projecteur, on a aussi: $Q^2 = Q$

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 26

Session : 2025

Épreuve de :

Maths 1 HEC ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Am final, $Q^2 = Q = {}^tQ$

~~donc ${}^tA Q X = {}^tA {}^tQ X = {}^t(QA) X = \langle \pi(u), n \rangle$~~

Mieux plutôt $QA = A$ (i.e. ${}^tQA = A$)

car ${}^tQ = Q$

Soit $X \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

$AX \in \text{Im}(A)$

donc fonctionnant $u(n) \in \text{Im}(u)$

or π est la projection orthogonale sur $\text{Im}(u)$.

donc $\text{Im}(\pi) = \text{Im}(u)$.

or $\pi(u(n)) = u(n)$ (*) car $u(n) \in \text{Im}(u) = \text{Im}(\pi)$

et $\forall y \in \text{Im} \pi \quad \pi(y) = y$

(*) Matriciellement cela nous donne :

$\forall X \in M_{p,n}(\mathbb{R}) \quad QAX = AX$ donc $QA = {}^tQA = A$

dans si ${}^tQA = QA = A$.

en transposant dans l'égalité il vient :

$$\underline{{}^t({}^tQA) = {}^tA \quad \text{id est : } {}^tAQ = {}^tA}$$

b) Q est une matrice symétrique au titre de matrice représentative d'un projecteur orthogonal (qui est donc symétrique) dans une b.o.n.

De fait Q est diagonalisable dans une b.o.n. de vecteurs propres de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de Q associés aux valeurs propres $(0, 1)$.

En notant P la matrice de passage de BF à la b.o.n. de vecteurs propres, P est orthogonale au titre de matrice de passage entre deux b.o.n.

$$\text{et } Q = P \Delta P \quad \text{où } \Delta = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{\dim E_1(\pi) \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$$

En effet, π est un projecteur orthogonal donc un projecteur et états un projecteur sur $\text{Im}(\pi)$

$$\underline{\text{on a } \text{Im}(\pi) = \text{Im}(\pi)}$$

$$\underline{\text{et comme } \pi^2 = \pi, \text{ on a } \text{Sp}(\pi) \in \{0, 1\}}$$

$$\text{or } E_1(\pi) = \text{Im}(\pi) = \text{Im}(\pi)$$

donc Δ est une matrice diagonale constituée de 1 et de 0 où le nombre de 1 est la dimension du sous-espace propre associé à la valeur 1 (i.e. $\dim E_{\pi}(1) = \dim \text{Im}(\pi) = \dim \text{Im}(u) = \text{rg}(u)$)

car π projection orthogonal sur $\text{Im}(u)$

et où le nombre de 0 est représenté $n - \dim E_{\pi}(1) = \dim E_0(\pi)$

car $E = E_1(\pi) \oplus E_0(\pi) = \text{Im}(\pi) \oplus \ker(\pi) = \text{Im}(u) \oplus (\text{Im}(u))^{\perp}$

donc Q et Δ sont semblables car représentent le même endomorphisme π dans deux bases différents.

$$\text{On a } \text{tr}(Q) = \text{tr}(\Delta) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \swarrow & & \\ & 1 & \\ \searrow & & \end{matrix}}_{\substack{\dim E_1(\pi) \\ \text{fois} = \text{rg}(u)}} & & \\ & & \begin{matrix} (0) \\ & \searrow & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \right) = \text{rg}(u)$$

Au final, $\text{tr}(Q) = \text{rg}(u)$

9) Supposons $\text{rg}(A) = p$.

$$\text{or } \text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A) = p.$$

$$\text{or avec 6) } \text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im}(u^*) \Leftrightarrow \text{Im}({}^t A A) = \text{Im}({}^t A)$$

$$\text{donc } \text{rg}({}^t A A) = \text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A) = p$$

$$\text{or } A \in M_{m,p}(\mathbb{R}) \text{ et } {}^t A \in M_{p,m}(\mathbb{R})$$

$$\text{donc } {}^t A A \in M_p(\mathbb{R}) \text{ et } \text{rg}({}^t A A) = p$$

donc ${}^t A A = M$ est inversible

Supposons M est inversible

$$\text{donc } \text{rg}({}^tAA) = p$$

$$\text{or } \text{rg}({}^tAA) = \text{rg}({}^tA) = p \text{ d'après 6)}$$

or A et tA ont même rang donc

$$\underline{\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A) = p}$$

donc A est de rang p

Matrice inversible si $\text{rg}(A) = p$

10a) $\text{rg}(A) = p$ donc avec ce qui précède M est inversible

$$\text{On a } {}^tAQ = {}^tA$$

$$\text{donc } {}^t({}^tAQ) = A$$

$$\text{donc } {}^tQA = QA = A \quad \text{car } Q \in Sp(\mathbb{R})$$

$$\text{On a } QA = A$$

1b) def Calculer $Q(A)$:

if al. matrix_rank(A) != p:
print('message d'erreur')

else:

$$Q = (A \cdot \text{dot}(\text{al. inv}(\text{np.dot}(\text{np.transpose}(A), A)))) \cdot \text{dot}({}^t$$

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 26

Session : 2025

Épreuve de : Maths 1 MECI ESSEL

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(*) (mp. transposée (A))
return (Q(A))

(n) Soit $X \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

$${}^t M = {}^t ({}^t A X) = {}^t A X {}^t ({}^t A) = {}^t A A = M$$

M est symétrique donc diagonalisable dans une b.o.n de vecteurs propres de $M_{p,n}(\mathbb{R})$ associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ non nécessairement deux à deux distincts.

$$\text{et } \exists P \in O_p(\mathbb{R}) \quad M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) {}^t P$$

Soit $\lambda \in Sp(M)$

$$\exists X \in M_{p,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{p,n}\} \quad M X = \lambda X$$

$$\text{dnc} \quad {}^t X M X = \lambda {}^t X X = \lambda \|X\|^2$$

$$\text{dnc} \quad {}^t X {}^t A A X = \lambda \|X\|^2$$

$$\text{dnc} \quad \frac{\|A X\|^2}{\|X\|^2} = \lambda \quad \text{car } X \neq 0_{p,n} \text{ dnc } \|X\|^2 > 0$$

$$\text{dnc} \quad \lambda \geq 0 \text{ et } Sp(M) \subset \mathbb{R}^+$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{pp} \end{pmatrix} \in M_{p,p}(\mathbb{R})$$

$${}^t X M X = {}^t X P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P X \quad \text{d'après ce qui précède.}$$

$${}^t X M X = {}^t Y \Delta Y \quad \text{avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = {}^t P X \in M_{p,p}(\mathbb{R})$$

et $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$

$${}^t X M X = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p y_i y_j \Delta_{ij}$$

$$\text{or } \forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 \quad \Delta_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{donc } {}^t X M X = \sum_{i=1}^p y_i^2 \lambda_i$$

$$\text{or } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad y_i^2 \lambda_i \geq 0 \quad \text{car } y_i^2 \geq 0 \text{ et } \lambda_i \geq 0$$

car $S_p(M) \subset \mathbb{R}^+$

$$\text{Par somme finie, } {}^t X M X = \sum_{i=1}^p y_i^2 \lambda_i \geq 0$$

$$\underline{\forall X \in M_{p,p}(\mathbb{R}) \quad {}^t X M X \geq 0}$$

Partie II

$$(2) \text{ Soit } X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ et Soit } H \in M_{p,2}(\mathbb{R}^2)$$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2} \|A(X+H) - Y\|^2 - \frac{1}{2} \|AX - Y\|^2$$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2} \left(\|A(X+H)\|^2 - 2 \langle A(X+H), Y \rangle + \|Y\|^2 \right)$$

$$- \frac{1}{2} \left(\|AX\|^2 - 2 \langle AX, Y \rangle + \|Y\|^2 \right) \quad (\text{avec les identités de polarisation})$$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2} \left(\|AX + AH\|^2 - 2 \langle AX + AH, Y \rangle + \|Y\|^2 \right)$$

$$- \frac{1}{2} \left(\|AX\|^2 - 2 \langle AX, Y \rangle + \|Y\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \|AX\|^2 + \langle AX, AH \rangle + \frac{1}{2} \|AH\|^2 - \langle AX, Y \rangle - \langle AH, Y \rangle + \frac{1}{2} \|Y\|^2 - \frac{1}{2} \|AX\|^2 + \langle AX, Y \rangle - \frac{1}{2} \|Y\|^2$$

$$= \langle AX, AH \rangle - \langle AH, Y \rangle + \frac{1}{2} {}^t(AH)AH$$

$$= \langle AX, AH \rangle - \langle Y, AH \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH$$

$$\text{or } D(X) = MX - {}^tAY = {}^tAA X - {}^tAY$$

$$\text{or } \underline{\langle AX, AH \rangle} = {}^t(AX)AH = {}^tXMH = {}^t(XM)H = \underline{\langle MX, H \rangle} \quad \text{car } {}^tM = M$$

et de même on montre que: ...

$$\langle AH, Y \rangle = {}^tH {}^tAY \quad \text{or } {}^tH \in M_{1,p}(\mathbb{R}) \quad {}^tA \in M_{p,m}(\mathbb{R})$$

$$\text{et } Y \in M_{m,1}(\mathbb{R})$$

$$\underline{\text{d'ac } {}^tH {}^tAY \in \mathbb{R}}$$

$$\text{or } \underline{{}^tH {}^tAY} = {}^t({}^tH {}^tAY) = {}^t({}^tAY)H = \langle {}^tAY, H \rangle$$

car un réel a et sa transposée sont égales

Fondent:

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle MX, H \rangle - \langle {}^t A Y, H \rangle + \frac{1}{2} {}^t H M H$$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle MX - {}^t A Y, H \rangle + \frac{1}{2} {}^t H M H$$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2} {}^t H M H$$

partie à gauche de <., >

$$(3) \text{ Supposons } D(X) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Soit } H \in M_{p \times n}(\mathbb{R}) \\ \text{Soit } X \in M_{p \times n}(\mathbb{R}) \end{array} \right.$$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2} {}^t H M H \text{ avec (2)}$$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2} {}^t H M H \geq 0$$

d'après 1)

donc $\forall X \in M_{p \times n}(\mathbb{R}) \mid D(X) = 0$

$$J_0(X+H) \geq J_0(X)$$

donc J_0 possède un minimum global en $X \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$

Supposons que J_0 possède un minimum global en $X \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$

$$\text{donc } J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2} {}^t H M H \geq 0$$

Montrons : $\forall H \in M_{p \times n}(\mathbb{R}) \quad \langle D(X), H \rangle = 0$

de ce fait, $D(X) \in [M_{p \times n}(\mathbb{R})]^\perp$

Adm

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 26

Session : 2025

Épreuve de : Maths 1 HEC/ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

14)

$$\text{Im}(A) = \text{Im}({}^t A)$$

donc $\exists Y_n \in M_n(\mathbb{C}) \quad Y_n = {}^t A Y_n$

donc pour

$$\text{on } M X_0 = {}^t A X_0 \quad \text{donc } D(X_0) = 0$$

donc $X_0 \in S_0$

$$\text{donc } \{X_0\} \subset S_0 \cap (\text{ker } A)^\perp = S_0 \cap \text{Im}({}^t A)$$

Soit $X \in S_0 \cap (\text{ker } A)^\perp$

- $X \in S_0$ donc $M X - {}^t A Y = 0$
donc $D(X) = 0$

- et $X \in (\text{ker } A)^\perp = \text{Im}({}^t A)$

donc \square

(5a) Soit $X \in S_0$

$$\text{donc } D(X) = 0$$

$$\text{donc } MX - {}^tAY = 0$$

$$\text{donc } \underline{{}^tAY = MX}$$

$$\text{or } QY = A(M)^{-1} {}^tAY = A(M)^{-1} MX = AX$$

$$\text{car } \underline{M^{-1}M = I_p}$$

$$\text{donc } \underline{AX = QY}$$

or)

$$A(X - X_0) = AX - AX_0 = QY - AX_0$$

$$\text{or } X_0 \in S_0 \cap (\ker A)^\perp \text{ donc } \underline{X_0 \in S_0}$$

$$\text{donc } D(X_0) = 0 \text{ et } MX_0 - {}^tAY = 0$$

donc d'après le même raisonnement qu'en (5a).

$$AX_0 = QY.$$

$$\text{donc } A(X - X_0) = QY - QY = 0$$

$$\text{et } \underline{X - X_0 \in \ker(A)}$$

Supposons $X \neq X_0$. et $X \in S_0$ et $X_0 \in S_0$.

Adevin

c) Supposons $\text{rg}(A) = p$ et $X \in S_0$.

donc d'après (9) M est inversible :

~~$$M^{-1}MX = M^{-1}AX = 0$$~~
~~$$\{X \in S_0\}$$~~

donc on a déjà $\{X\} \subset S_0$.

Soit $X \in S_0$

$$MX - AX = 0$$

donc $MX = AX$

donc $X = M^{-1}AX$. car M est inversible.

En final, $S_0 = \{X\}$ et $X = M^{-1}AX$

16a) $T = \|A(X - U_0)\|^2 = \|AX - AU_0\|^2$

ou $AX = (AM^{-1} + A)Y = QY$ d'après 1a).

$$T = \|QY - AU_0\|^2$$

$$T = \|Q(AU_0 + Z) - AU_0\|^2 \quad \text{ou avec 8a)}$$

$$T = \|QZ + QA - AU_0\|^2 \quad \text{+QA = +A(=)AQ = A}$$

$$\text{donc } T = \|QZ\|^2$$

$$\text{or } \|QZ\|^2 = {}^t Z {}^t Q Q Z = {}^t Z Q^2 Z = {}^t Z Q Z$$

d'après ce qui a été fait précédemment

car Q est la matrice d'un projecteur orthogonal dans BF, qui est un b.o.m

$$\text{donc } Q^2 = Q \text{ (car } \underline{\text{TT projecteur}})$$

et ${}^t Q = Q$ (car TT endomorphisme symétrique)
↳ car projecteur orthogonal

$$\underline{\text{Au final : } T = \|QZ\|^2 = {}^t Z Q Z}$$

b) def simul $T(A, \text{sigma})$:
 $Z = \text{rd. normal}(0, \text{sigma}^{**2}, m)$

$$T = [\text{mp.transpose}(Z).dot(Q(A))] @ Z$$

print(T)

c) def esperance(A, sigma) :
 $m = 10000$ $N = 1000$
 $W = \text{mp.linspace}(T, [m, N])$
 $Y = \text{mp.sum}(T, 0)$
return (Y/m)

On mène un grand nombre de fois les VAT, et on s'intéresse à sa moyenne empirique pour avoir une valeur approchée de son espérance à l'aide de la

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 26	Session : 2025
	Épreuve de : Maths 1 HEC (ESSEC)		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

la faible des grands nombres.

$$d) - A_1 \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$- A_2 \in M_{4,3}(\mathbb{R})$$

$$- A_3 \in M_{6,5}(\mathbb{R})$$

En renvoyant une valeur approchée de $E(T)$ pour 3 matrices différentes, on peut conjecturer que $E(T) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

- En effet pour $A_1 \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ une valeur approchée est $1,99 \approx 2$.

- pour $A_2 \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ une valeur approchée est $3,01 \approx 3$

- pour $A_3 \in M_{6,5}(\mathbb{R})$ une valeur approchée est $4,97 \approx 5$

Ainsi on conjecture : pour $A \in M_{m+1,n}(\mathbb{R})$

une valeur approchée de $E(T)$ est m .

suite de
la question
page (23)

e) $z_1 \sim N(0, \sigma^2)$ donc z_1 admet une variance

Par Koenig-Hughens on a $E(z_1^2) = V(z_1) + E(z_1)^2 = \sigma^2$

Montrons que $E(z_1^4)$ existe.

$t \mapsto t^4$ est continue sur \mathbb{R} et $z_1(-1) \in \mathbb{R}^+$

Par théorème de transfert :

$E(z_1^4)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^4 f_{z_1}(t)| dt$ converge

si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$ converge.

car $\forall t \in \mathbb{R} \quad t^4 f_z(t) \geq 0$

si $\int_0^{+\infty} t^4 f_z(t) dt$ converge

car $t \mapsto t^4 f_z(t)$ est paire.

or $t \mapsto t^4 f_z(t)$ est continue sur \mathbb{R}^+

donc $\int_0^{+\infty} t^4 f_z(t) dt$ est convergente en $+\infty$.

or $t^2 \times t^4 f_z(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par croissance exponentielle.

donc $t^4 f_z(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 0 \left(\frac{1}{t^2} \right)$ or $\forall t \geq 1 \quad \frac{1}{t^2} \geq 0$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann).

donc par critères de comparaison par négligeabilité :

$$\int_1^{+\infty} t^4 f_2(t) dt \text{ converge.}$$

donc $\int_0^{+\infty} t^4 f_2(t) dt$ converge. donc $E(z_1^4)$ existe

Retour (d) (j n'avais pas eu la question...)
↳ j vous prie de m'excuser.

Avec le script et le graphique en sortie.

les valeurs approximées de l'espérance sont cohérentes en fonction de la tréille de la matrice, ce qui est bien cohérent avec ce qui a été conjecturé précédemment.

ainsi : avec ce qui précède.

$$E(z_3) \text{ existe et } E(z_3) = \int_{-s}^{+\infty} t^3 f_{z_1}(t) dt.$$

or $t \mapsto t^3 f_{z_1}(t)$ est impaire et
d'intégrale convergente.

$$\underline{\text{donc } E(z_3) = 0}$$

de plus en posant $z = z_1^2$

$$E(z_1^4) = E(z^2) \quad \text{or } z^2 \text{ admet une variance}$$

donc par Koenig Khaybars :

$$E(z_1^4) = E(z^2) = V(z) + E(z)^2 = V(z) + E(z_1^2)^2$$

$$E(z_1^4) = V(z) + \sigma^4$$

Admis pour la suite.

$$b) T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m z_i z_j Q_{ij}$$

$$T = \sum_{i=1}^m z_i^2 Q_{ii} + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m Q_{ij} z_i z_j \right)$$

$$T = T_1 + \sum_{i=1}^m \left(2 \times \sum_{j=i+1}^m Q_{ij} z_i z_j \right)$$

$$T = T_1 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m Q_{ij} z_i z_j$$

$$\underline{T = T_1 + 2T_2}$$

$$\text{car } \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m Q_{ij} z_i z_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m Q_{ij} z_i z_j$$

De fait, par linéarité de l'espérance :

$$E(T_1) \text{ existe et } E(T_1) = \sum_{i=1}^m q_{ii} E(z_i^2)$$

$$E(T_2) \text{ existe et } E(T_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m Q_{ij} E(z_i z_j)$$

car z_i et z_j sont indépendants car $i+1 \geq j$
donc $i > j$.

$$\text{d'où } E(T_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m Q_{ij} E(z_i) E(z_j)$$

Par linéarité de l'espérance, $E(T)$ existe et

$$E(T) = E(T_1) + 2E(T_2) = \sum_{i=1}^m Q_{ii} \sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m Q_{ij} \sigma^4$$

Copie anonyme - n°anonymat : 224734

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 28

Session : 2025

Emplacement
QR Code

Épreuve de : HEC Maths I

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

admis pour le reste.

$$h) T_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n q_{iii} z_i^2 \right)^2$$

$$E(T_1^2) = E \left(\left(\sum_{i=1}^n q_{iii} z_i^2 \right)^2 \right)$$

Admis.

(i) T admet une variance car $T_1 + 2T_2$ admet un rang d'ordre 2.

$$V(T) = \text{cov}(T_1 + 2T_2, T_1 + 2T_2)$$

$$= V(T_1) + 4V(T_2) + \text{cov}(T_1, 2T_2) + \text{cov}(2T_2, T_1)$$

$$= V(T_1) + 4V(T_2) + 2\text{cov}(T_1, 2T_2)$$

(ii) Admis.

Partie 3

2aa)

$$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle v, v \rangle}{\|u\|} \right)^2 =$$

$$\|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 - \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{2\langle u, v \rangle \|u\|^2 + \|v\|^2 \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle \|u\|^2 - \langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{\|v\|^2 \|u\|^2 - \langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$23a) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} \quad (\text{Soit } \lambda \in]0; +\infty[)$$

$$\text{or } \frac{\alpha_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} \leq \frac{1}{4\lambda} \quad (\text{identité remarquable})$$

$$\text{donc } \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} \leq \frac{1}{4\lambda} y_i^2$$

par somme finie :

$$-n + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} \leq -n + \frac{1}{4\lambda} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\text{donc } \forall \lambda > 0 \quad F(\lambda) \leq -n + \frac{1}{4\lambda} \sum_{i=1}^n y_i^2$$



