# Copie anonyme - n°anonymat : 355262

W5-00037
355262
Mat Appro

**Code épreuve :** 297 **Nombre de pages :** 37 **Session :** 2025

**Épreuve de :** Maths Edhec

**Consignes**
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors,

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x) - \ln(x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

or ~~t ↦ ln t~~

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad -\ln t > 0$

$\iff \quad \ln t < 0$

$\iff \quad t < 1$

Ainsi :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | ‖ $-1$ | ↗ | $0$ | ↘ | $0$ |

Avec,

$g(1) = 0$ et $\frac{\ln x}{x} \underset{x \to 0}{\sim} -1$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ par croissances comparées

d'où les limites du tableau

(j'ai du faire une erreur)

b) Alors pour $k \geq 3$, la question précédente montre que.

$k+1 \geq k$,

$g(k+1) \leq g(k)$

$\Leftrightarrow$ $\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \frac{\ln k}{k}$, car $g$ est décroissante sur $[1, +\infty[$,

et alors $\left(\frac{\ln k}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante

Des lors, $2 > 1$, et $k \geq 4$,

$g(k) \leq g(2)$

$\Leftrightarrow$ $\frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln 2}{2}$ d'où les resultats

2a) On a $x \in ]n,+\infty[$, ainsi $x > 1$, car $n \geq 1$ et

$x - n > 0$.

Ce qui assure la définition de $\ln x$ et $\ln x - n$

Et alors aussi leur dérivabilité sur $]n,+\infty[$

Ainsi par combinaison linéaire de fonctions dérivables $f_n$ l'est

pour $x > n$.

Et,

$$\forall x \in ]n,+\infty[,\ f_n'(x) = \ln x + (x-n)\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\ln(x-n) + x\left(\frac{1}{x-n}\right)\right)$$

$$= \ln x + \frac{x-n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n}$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n}$$

b) ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, remontrons l'inégalité

Posons,

$g : t \mapsto \ln t - (t-1)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$,

g est dérivable et

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(t) = \frac{1}{t} - 1$$

Or $\frac{1}{t} - 1 < 0$

$\iff$ $t > 1$

D'où

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(t)$ | ‖ | ↗ | | ↘ | |

Avec $g(1) = 0$

Ainsi,

$\forall t > 0,\ g(t) \leq 0$

$\Leftrightarrow \ln(t) \leq t - 1$

d'où le resultat

Ainsi, en reprenant la forme trouvée pour $f_n'$,

et comme $\frac{x-n}{x} \leq 1$ pour $x > n$,

Si on pose $t = \frac{x}{x-n}$

$\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{x}{x-n} + \frac{x-n}{x}$

$\leq \ln t - (t-1) \leq 0$

D'où,

$\forall t > 0,\ f_n'(t) < 0$

et $f_n$ est strictement décroissante

c) Pour $x \in [n+1, n+2]$, $f_n$ est strictement monotone (décroissante) et continue, elle est bijective par le théorème de la bijection de $[n+1, n+2]$ dans $[0, f_n(n+1)]$ et comme $0 \in [0, f_n(n+1)]$,

# Copie anonyme - n°anonymat : 355262

Emplacement QR Code

**Code épreuve :** 297 | **Nombre de pages :** 37 | **Session :** 2025

**Épreuve de :** Maths Edhec

**Consignes**
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Alors on a bien $f_n(x)=0$ qui admet une unique solution notée $x_n$.

3. On admet

4a) On sait que $f_n(x_n)=0$

Donc,

$\forall n \geq 2, \quad (x_n - n)\ln(x_n) - x_n \ln(x_n - n) = 0$

$\iff \quad x_n \ln(x_n - n) = (x_n - n)\ln x_n$

$\iff \quad \ln(x_n - n) = (x_n - n)\dfrac{\ln x_n}{x_n} \quad (*)$

b) Or $\dfrac{\ln x_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Alors, en passant $(*)$ à la limite,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(x_n - n) = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - n = 1$ en composant par exp.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5 a) On pose,

$\forall n \geq 2, \ u_n = x_n - n - 1.$

On sait que $x_n - n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Dès lors $\ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$

et $\ln(1 + n + u_n) = \ln(x_n)$

et comme

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n - n = 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln x_n = \ln(n+1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$

D'où finalement,

$\ln(1 + n + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$

b) Alors grace à 4a),

$\lim\limits_{n \to +\infty} x - n = 1$ et $\ln(1 + n + u_n) = \ln(x_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$

et $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ par 3

Ainsi en passant à la limite comme $\ln(x_n - n) = \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

on a bien :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \times \frac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$$

6. Déterminons la nature de ces séries.

Avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$ et $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$

$n \geq 2$ donc toutes les fonctions en question sont positives

Ainsi,

comme ~~$\ln n^2 \; n^{1/2}$~~ $\frac{n^{3/2} \ln^2 n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

~~$u_n^2 \sim \frac{\ln n^2}{n^2}$~~ $u_n^2 = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et la règle de comparaison appliquée aux fonctions

positives confirme que comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann $2>1$)

Alors $\sum_{n\geq 2} u_n^2$ également.

Quant à $\sum_{n\geq 2} u_n$, on a

$\ln n \geq 1$ pour $n \geq 3$

Et donc $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$, or $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n}$ diverge

Donc par minoration, $\sum_{n \geq 3} \frac{\ln n}{n}$ également

et par règle de l'équivalence,

$\sum_{n \geq 3} u_n$ diverge aussi

Exercice 2 :

1 a) Soit $x \in F$,

Alors $p(x) = x$ car $p$ est le projecteur orthogonal sur F

Ainsi $\|p(x)\| = \|x\|$

et comme F est un sous-espace vectoriel de E (sev)

$F \subset E$ et $x \in E$

d'où,

$x \in \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$

et on a bien

$F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.

b) Soit $x \in E$,

$\|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$

$= \langle x - p(x), x - p(x) \rangle + \|p(x)\|^2$

$= \langle x, x - p(x) \rangle - \langle p(x), x - p(x) \rangle + \|p(x)\|^2$

$= \langle x, x \rangle - \langle x, p(x) \rangle + \|p(x)\|^2$, car $p(x) \in F$, $x - p(x) \in F^{\perp}$
on admet



IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

# Copie anonyme - n°anonymat : 355262

| Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 37 | Session : 2025 |
| --- | --- | --- |

Épreuve de : Maths Edhec

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

c) Si $x \in \{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\}$.

Alors,

$\|x - p(x)\|^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x - p(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x = p(x)$

$\Rightarrow \quad x \in F$, car $p$ est sa projection orthogonale.

$\{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\} \subset F$

et par double inclusion

$F = \{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\}$

2. a) Soit $x \in F_1 \cap F_2$,

$x \in F_1$ donc $p_1(x) = x$ (1)

$x \in F_2$ donc $p_2(x) = x$ (2)

Et donc, $p_3(x) = p_1(p_2(x)) = p_1(x) = x$ par (1) et (2), $x \in F_3$

d'où $F_1 \cap F_2 \subset F_3$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

revenons à la 1c) désolé (oubli)

Si $x \in E$, $\exists ! (x_1, x_2) \in \ker p \times \operatorname{Im} p$

tel que $x = x_1 + x_2$

d'où, $p(x) = p(x_1 + x_2) = p(x_2) = x_2 \leq x_1 + x_2 = x$

Ainsi $p(x) \leq x$ et $\|p(x)\| \leq \|x\|$

d'où le resultat

2b) Soit $x \in F_3$.

alors $\|p_3(x)\| = \|x\|$

$\Leftrightarrow \|p_1 \circ p_2(x)\| = \|x\|$

$\Leftrightarrow \|p_1(p_2(x))\| = \|x\|$

or d'après 1c) $\|p(x)\| \leq \|x\|$

donc $\|p_1(p_2(x))\| \leq \|p_2(x)\|$, $p_1$ un projecteur orthogonal

dès lors on a :

$\|x\| \leq \|p_2(x)\|$

De plus si $x \in E$,

$\|p_2(x)\| \leq \|x\|$ donc $\|p_2(x)\| = \|x\|$

Soit $x \in F_2$ par 1c)

Puis comme $\|p_1 \circ p_2(x)\| = \|x\|$

et que $\|p_2(x)\| = \|x\|$

$\|p_1(x)\| = \|x\|$

Ce qui confirme que $x \in F_1$

c) On a montré que $F_1 \cap F_2 \subset F_3$

puis si $x \in F_3$, $x \in F_1$ et $x \in F_2$

Soit $x \in F_1 \cap F_2$

Ainsi par double inclusion

$$F_3 = F_1 \cap F_2$$

d) On sait que $p_3$ est un projecteur orthogonal, donc c'est un endomorphisme symétrique.

de sorte que.

$\forall (x,y) \in E^2$,

$$\langle p_3(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle$$

Et $\langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle = \langle x, p_1 \circ p_2(y) \rangle$

On admet ce dernier resultat

e) On a alors,

$\forall (x,y) \in E^2$,

$$\langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle = \langle p_2 \circ p_1(x), y \rangle$$

$\Leftrightarrow \langle p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x), y \rangle = 0$ par linéarité du produit scalaire

Or $y$ est quelconque, donc si $y = p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x)$

Il vient,

$$\| p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x) \| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 \circ p_2(x) = p_2 \circ p_1(x)$$

d'où le resultat

Comme $x$ est quelconque

$$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$$

3a) Calculons

$\forall x \in E$,

$$p^2(x) = (p_1 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_2)(x)$$

$$= p_1 \circ (p_2 \circ p_1) \circ p_2(x)$$

$$= p_1 \circ p_1 \circ p_2 \circ p_2(x)$$

$$= p_1^2 \circ p_2^2(x)$$

$$= p_1 \circ p_2(x)$$

$$= p(x)$$



IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

$x$ étant quelconque

$$p^2 = p$$

et $p$ est un projecteur de $E$

b) Montrons que $p$ est un endomorphisme symétrique.

$\forall (x,y) \in E^2$,

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle$$

$$= \langle p_1(p_2(x)), y \rangle$$

$$= \langle p_2(x), p_1(y) \rangle$$ car $p_1$ et $p_2$ sont des endomorphismes symétriques

$$= \langle x, p_2 \circ p_1(y) \rangle$$

$$= \langle x, p_1 \circ p_2(y) \rangle$$

$$= \langle x, p(y) \rangle$$

$p$ est un endomorphisme symétrique de $E$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) Alors on a montré que $p$ est un projecteur de $E$

et $p$ est un endomorphisme symétrique de $E$.

Comme $p_1 \circ p_2 = p$, alors $p_1 \circ p_2$ est un projecteur orthogonal

de $E$

4. * Dans 2. on a montré que si on a trois sev de $E$ munis

chacun d'un projecteur orthogonal tel que l'un est composition

des deux autres, alors ces deux derniers commuttent.

* Dans 3 on a complété en montrant que la composition des

deux projections orthogonales des sev $F_1$ et $F_2$ formait une projection

sur $E$.

Exercice 3

Partie 1 :

1. Verifions que $f$ est une densité.

* $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

* $f$ est positive (car nulle si $x>0$ et $-2xe^{-x^2}$ si $x \leq 0$)

* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{A}^{0} -2xe^{-x^2}dx$

Soit $A < 0$,

$$\int_A^0 -2xe^{-x^2}\,dx = \left[e^{-x^2}\right]_A^0 = 1 - e^{-A^2}$$

$$\underset{A \to -\infty}{\longrightarrow} 1 \text{, car } -(A^2) \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

et f est bien une densité

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

* Si $x \leq 0$,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} -2te^{-t^2}\,dt$$

Soit $B < x$,

$$\int_B^x -2te^{-t^2}\,dt = \left[e^{-t^2}\right]_B^x = e^{-x^2} - e^{-B^2}$$

$$\underset{B \to -\infty}{\longrightarrow} e^{-x^2}.$$

d'où $\mathbb{P}(X \leq x) = e^{-x^2}$

* Si $x > 0$

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$$

$$= 1.$$

Ainsi

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

3. une densité d'une variable aléatoire suivant une $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$

vaut,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\mathcal{N}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

4. X admet une espérance ssi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt \text{ converge}$$

Avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} t(-2te^{-t^2})\,dt$.

Copie anonyme - n°anonymat : 355262

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 37 | Session : 2025

Épreuve de : Maths Edhec

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or $\forall t<0, -2t^2e^{-t^2} \times t^2 = -2t^4e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc
$$-2t^2e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et par théorème de comparaison appliqué aux fonctions positives,

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (Riemann $2>1$).

$G(x)$ existe.

Et procédons par intégration par parties (IPP)

$$\begin{cases} u(t) = t & v'(t) = -2te^{-t^2} \\ u'(t) = 1 & v(t) = e^{-t^2} \end{cases}$$

$u$ et $v$ sont $C^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ donc soit $B<0$,

$$\int_B^0 t(-2te^{-t^2})\,dt = \left[te^{-t^2}\right]_B^0 - \int_B^0 e^{-t^2}\,dt = -Be^{-B^2} - \int_B^0 e^{-t^2}\,dt$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\xrightarrow[B\to-\infty]{} -\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

or par la question précédente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\,dt = 1 \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$ , densité d'une loi normale

et donc, $-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = -\sqrt{\pi}$

D'où $\mathbb{E}(X) = -\sqrt{\pi}$

Soit $\forall x > 0$,

$G(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x)$

$= \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{x})$ , $x \geq 0$

$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ , $x > 0$

$= 1 - e^{-\sqrt{x}^2}$

$= 1 - e^{-x}$

• Si $x \leq 0$,

$G(x) = 0$

Ainsi,

$$G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On reconnait la fonction de repartition d'une variable suivant une loi $\mathcal{E}(1)$ Ainsi $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

6. On sait que $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

donc $V(X^2) = 1$ et $E(X^2) = 1$

Ce qui prouve que $X$ admet un moment d'ordre 4.

$X$ admet une variance et,

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, par la formule de Koenig-Huyghens

$= 1 - (-\sqrt{\pi})^2$

$= 1 - \pi$

La variance est négative, j'ai du faire une erreur.

7.
```
def simulX(n):
    rl = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        rl[i] = np.sqrt(rd.exponential(n))
    return(rl)
```

```
def esperanceX(n):
    return(np.mean(simuleX(n)))
```

Partie 2 :

8. Montrons que h est une densité

* h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

* h est positive car $1 - x \geq 0$ sur $x \in [0, 1]$

* $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \int_{0}^{1} 2(1-t)\,dt = 2\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_0^1$

$= 2\left(-\frac{1}{2}(1-1)^2 + \frac{1}{2}\right)$

$= 1$

h est bien une densité

9. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$H(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$

* Si $x < 0$

$H(x) = 0$

* Si $x \in [0, 1]$,

$H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\,dt = \int_{0}^{x} 2(1-t)\,dt = \left[-(1-t)^2\right]_0^x = 1 - (1-x)^2$

* Si $x > 1$,

$H(x) = \int_{0}^{1} h(t)\,dt = 1$

# Copie anonyme - n°anonymat : 355262

| | | |
|---|---|---|
| Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 37 | Session : 2025 |

Épreuve de : Maths Edhec

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

D'où,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

H est la fonction de répartition d'une variable à densité car elle est continue sur $\mathbb{R}$, en effet,

$$\lim_{x \to 0^+} 1-(1-x)^2 = 0 = \lim_{x \to 0^-} H(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} 1-(1-x)^2 = 1 = \lim_{x \to 1^-} H(x)$$

d'où la continuité en 0 et 1

10. On a $M_n = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$ et $T_n = \sqrt{n}(M_n - a)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Cherchons les fonctions de répartition respectives,

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [Y_i \leq x]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i \leq x)$$

$= \mathbb{P}(Y_1 \leq x)^n$ , car les Yi suivent la même loi

et l'étape précédente par indépendance des $Y_i$

$= (F_{Y_1}(x))^n \; ( = (H(x))^n)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-(1-x)^2)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Puis,

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{P}(\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x)$

$= \mathbb{P}( M_n - 1 \leq \frac{x}{\sqrt{n}})$

$= \mathbb{P}( M_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1)$

$= (H(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1))^n$

on a bien le resultat attendu

11. $\forall y \in \mathbb{R}$, $(1 + \frac{y}{n})^n = e^{n \ln(1 + \frac{y}{n})}$

or $n \ln(1 + \frac{y}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} y$ car $\frac{y}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

D'où,

$\lim_{n \to +\infty} n \ln(1 + \frac{y}{n}) = y$

et par composition

$$\lim_{n \to +\infty} e^{n\ln(1+\frac{y}{n})} = e^{y}$$

et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{y}{n}\right)^{n} = e^{y}$$

12. On a d'une part,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \left(H\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } 1+\frac{x}{\sqrt{n}} < 0 \\ \left(1-\left(1-\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^{2}\right)^{n} & \text{si } 1+\frac{x}{\sqrt{n}} \in [0,1] \\ 1 & \text{si } 1+\frac{x}{\sqrt{n}} > 1 \end{cases}$$

Or

$$1+\frac{x}{\sqrt{n}} > 1 \iff x > 0$$

et $1+\frac{x}{\sqrt{n}} < 0 \iff x < -\sqrt{n}$

Or si $-\sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$

il existe un rang $n_0$ telque pour tout $n \geq n_0$,

$x > -\sqrt{n}$ et donc quand $n \to +\infty$

ce cas est impossible

Puis $1+\frac{x}{\sqrt{n}} \in [0,1] \iff x \in \mathbb{R}_-$ quand $n \to +\infty$.

finalement,

comme,

$$(1-(1-(1+\frac{x}{\sqrt{n}}))^2)^n$$

$$=(1-(-\frac{x}{\sqrt{n}})^2)^n$$

$$=(1-\frac{x^2}{n})^n$$

La question précédente donne pour $x^2=y$.

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{x^2}{n})^n = e^{-x^2}$$

D'où pour conclure,

$\forall x\in\mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} = F(x)$$

D'où $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Problème

Partie 1 :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $B_n=\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$

Or $\prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{4k} = \frac{1}{4^n}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+n}{k}\right) = \frac{1}{4^n}\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+n)}{\prod_{k=1}^{n}k}$

$$= \frac{1}{4^n} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (k+n)$$

Or $\prod_{k=1}^{n} k+n = \frac{(2n)!}{n!}$, car on commence à $n+1$ puis on multiplie $n+2 \dots 2n$

D'où, $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k} = \frac{1}{4^n} \frac{(2n)!}{n!\,n!}$

$$= \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

$$= B_n$$

d'où le resultat

```
def B(n):
    p = (n+1)/4
    for k in range(2, n+1):
        p = p*(k+n)/4*k
    return p
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 2

2. $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^0 \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$

$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \, dt = \left[ -\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos(0)$

$= 1.$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) - \sin^n(t) \, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(\sin(t) - 1) \, dt$

or $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin^n(t) \geq 0$

et $\sin(t) - 1 \leq 0$

D'où, $\sin^n(t)(\sin(t) - 1) \leq 0$

et

$\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} - W_n \leq 0$

$(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante

4. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\sin(t)\,dt$$

Procédons par IPP,

$$\begin{cases} u'(t) = \sin(t) & v(t) = \sin^{n+1}(t) \\ u(t) = -\cos(t) & v'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^{n}(t) \end{cases}$$

$u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc,

$$W_{n+2} = \left[ \cos t \sin^{n+1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^2(t)\sin^{n}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(1-\sin^2(t))\sin^{n}(t)\,dt$$

$$= (n+1)W_n - W_{n+2}(n+1)$$

D'où,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n$

$\iff (W_{n+2})(n+2) = (n+1)W_n$

$\iff W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$, d'où le resultat

5. Montrons par récurrence sur n que,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$ et $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$

* $n = 0$

$W_0 = \frac{\pi}{2} B_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \frac{1}{B_0} = 1$ par convention

L'initialisation est vérifiée

* Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose le résultat vrai au rang n.

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{2n+2}{2n+2} \frac{\pi}{2} B_n$$

$$= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!} \frac{\pi}{2}$$

$$= B_{n+1} \frac{\pi}{2}$$

et

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{1}{(2n+1)B_n}$$

$$= \frac{2n+2}{2n+3} \frac{1}{(2n+1)} \frac{1}{4^n} \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

on admet celle-ci

L'hérédité est vérifiée

* Par principe de récurrence,

le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

# Copie anonyme - n°anonymat : 355262

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 37 | Session : 2028

Épreuve de : Maths Edhec

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1) B_{n-1}}$ par la question précédente

$$= \frac{1}{2n-1} \frac{1}{4^{n-1}} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)^2}{(2n)^2} \frac{1}{2n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)^2 (2n-2)!}{(2n-1)\, n!\, n!\, 4^n}$$

On admet

7. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante,

de sorte que,

$$W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(2n+1) B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2n B_n}$$

d'où le resultat

Puis $\frac{2}{\pi(2n+1)B_n} \leq B_n \leq \frac{2}{\pi(2n B_n)}$

on admet que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

8. On a par inégalité précédente,
$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n\sqrt{\pi}\sqrt{n} \leq 1$$

or $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$

donc, $\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

et par passage à la limite, le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}} = 1$$

D'où $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$

Partie 3

1a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$

Donc $Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$

Avec $\mathbb{P}(Y_k = 0) = \mathbb{P}(X_n = -1)$

et $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1)$

D'où $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(X_n = 1))$

et comme les $X_k$ sont des variables aléatoires,

$\mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_k = -1) = 1$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$

Ainsi,

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{V}(Y_k) = \frac{1}{4}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\underline{T_n} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$= \underline{\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k + 1}{2}}$$

$$= \underline{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$$

Or les <u>$X_k$ sont indépendantes</u>, donc par les coalitions

les <u>$Y_k$ aussi</u>. Alors par stabilité des lois de Bernoulli

$T_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

Alors $S_n$ peut au minimum valoir $-n$ et au maximum $n$.

Selon le nombre de fois où les $X_k$ valent $-1$.

Or pour obtenir $j$, il faut avoir eu 2 fois plus de $X_k = 1$

que de $X_k = -1$ car ils se compensent mutuellement

Ainsi, on peut noter $S_n(\Omega) = \{ 2j - n, j \in [\![0, n]\!]\}$ où on

part d'un déficit de $-n$ puis les succès sont comptés deux par deux.

Alors,

$\forall k \in S_n(\Omega)$,

$\mathbb{P}(S_n = k) =$

on admet

10 a) $R_n(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$ est égal au nombre d'entiers $k$ tels

que $S_k(\omega) = 0$, pour $k \in [\![1, 2n]\!]$, or lorsque $k$ est impair

il est impossible d'avoir $S_k(\omega) = 0$ car il faut le même nombre

de $-1$ et $1$. Ainsi, $k$ doit être pair et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$R_n = \text{card}(\{k \in [\![1, n]\!], S_{2k} = 0\})$

# Copie anonyme - n°anonymat : 355262





c) Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k = (S_{2k} = 0)$

Alors

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$

Car ainsi par ~~indépendance~~ incompatibilité des $\mathbb{1}_{A_k}$.

$\forall i \in R_n(\Omega)$

$\mathbb{P}(R_n = i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_k})$ qui vaut 1 si $A_k$ est réalisé et 0 sinon, soit un décompte du nombre de fois où $A_k$ est réalisé pour $k \in [\![1, n]\!]$

d) Puisque les $\mathbb{1}_{A_k}$ suivent des Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(S_{2k} = 0)$

~~$R_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \mathbb{P}($~~

$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_k})$

$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_{2k} = 0)$

$= \sum_{k=1}^{n} B_k$ par 10 b)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 4 :

13 a) On a montré que,

$$B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

Or $B_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$

Ainsi :

$$\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

et

$$\frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi}\sqrt{n}$$

Puis

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{4^n}$$

On a le resultat

b) Alors pour $x \in [0,4[$,

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n\sqrt{n}\sqrt{\pi}}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{4}\right)^n\sqrt{n}\sqrt{\pi}$$

et comme $0 \leq x < 4$, $0 \leq \frac{x}{4} \leq 1$

De plus, pour $n \geq 1$ $n \geq \sqrt{n}$.

Ainsi,

$\forall x \in [0,4[$, $\sqrt{n}\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \sqrt{\pi}\, n\left(\frac{x}{4}\right)^n = \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4}\, n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}$

Or $\sum_{n \geq 1} \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4}\, n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}$ est convergente en tant

que serie geométrique dérivée.

Ainsi par critère de comparaison appliqué aux

fonctions positives

$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{x}{4}\right)^n \sqrt{\pi}\sqrt{n}$ converge

et par equivalence

$\forall x \in [0,4[$, $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ également

14. Soit $(x,y) \in [0,4[^2$, tels que

$x \leq y$

Alors,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \frac{y^n}{\binom{2n}{n}}$

et, comme on a montré que la serie convergeait

nous pouvons sommer et passer à la limite,

Alors par somme de termes positifs,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{\binom{2n}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y)$$

Et $f$ est croissante sur $[0,4]$

15 a) On admet

b) Le terme central de l'inégalité précédente converge 13 b)

ensuite $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ également pour $x \in [0,4[$, serie géométrique.

enfin $\sum_{n\geq 1} \sqrt{\pi}\,(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n$ converge aussi en tant que

serie geometrique derivée décalée. Alors passons la serie :

$\forall x \in [0,4[$, $n \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\pi}\,(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

**Code épreuve :** 297 **Nombre de pages :** 37 **Session :** 2025

**Épreuve de :** Maths Edhec

Emplacement QR Code

**Consignes**
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$\Leftrightarrow \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n \leq f(x) \leq \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\pi} \left( \frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x}{4}} \right) \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left( \frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x}{4}} + \frac{x}{4} \times \frac{1}{\left(1-\frac{x}{4}\right)^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\pi}\, \frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left( \frac{x}{4-x} + \frac{x}{4} \frac{1}{\left(1-\frac{x}{4}\right)^2} \right)$$

D'où l'inégalité souhaitée

Dès lors,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{4-x} = 0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{4}$$

Ainsi par encadrement,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

Et $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$ on admet (manque de temps)

En 0 c'est la fonction nulle

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE