Copie anonyme - n°anonymat : 578902

G8-00035
578902
Mat Appro

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 16 | **Session :** 2025

Épreuve de : Maths

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I

1/ $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$
Alors $\dim(\mathrm{Ker}(\ell)) = p-1$ et $rg(\ell) = 1$
Soit $a \in E$, $\mathrm{Im}(\ell) = \mathrm{Vect}(a)$
Alors par théorème spectrale,

$\exists (\alpha_2 \dots \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$, $(a, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ soit une base orthonormée de E
Alors $\forall i \in [\![2, p]\!]$, $a \perp \alpha_i$ donc $\alpha_i \in \mathrm{Ker}(\ell)$
Donc $\mathrm{Ker}(\ell) = \mathrm{Vect}(\alpha_2, \dots, \alpha_p)$

Alors $\forall x \in \mathrm{Ker}(\ell)$, $\langle a, x \rangle_E = 0 = \ell(x)$

Et $\forall x \in \mathrm{Im}(\ell), \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $x = \lambda a$
Donc $\langle a, x \rangle = \lambda \|a\|^2$
Comme $0_E \in \mathrm{Ker}(\ell)$, nous l'avons déjà traité,
~~Soit $\lambda \neq 0$, on choisit~~

2) $\forall x \in E, u(x) \in F$, soit $y \in F$
Et $(x \mapsto \langle x, y \rangle_F) \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$
par propriété du produit scalaire
Alors par composition ~~de en~~ d'applications linéaires,

$$\underline{(x \mapsto \langle u(x), y \rangle_F) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$$

Donc d'après 1

$$\boxed{\forall y \in F, \exists! z_y \in E, \forall x \in E, \langle u(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E}$$

3) • $\underline{u^* \in \mathcal{F}(F, E)}$
• Soit $(a, b) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
$u^*(\lambda a + b) \in E$, ~~soit $x \in \mathbb{R}$~~
Donc $\langle u^*(\lambda a+b), x \rangle_E = \langle u(x), \lambda a + b \rangle_F$ où $x \in E$
Donc par linéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \langle u^*(\lambda a+b), x \rangle_E &= \lambda \langle u(x), a \rangle_F + \langle u(x), b \rangle_F \\ &= \lambda \langle u^*(a), x \rangle_E + \langle u^*(b), x \rangle_F \\ &= \langle \lambda u^*(a) + u^*(b), x \rangle \end{aligned}$$

Alors $\forall x \in E, (u^*(\lambda a+b) - \lambda u^*(a) - u^*(b)) \perp x$
Donc $\underline{u^*(\lambda a + b) = \lambda u^*(a) + u^*(b)}$
Donc $\boxed{u \in \mathcal{L}(F, E)}$

4) $\forall (x,y) \in E \times F, \langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E$

Alors $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ {}^t(AX)Y = {}^tXBY$
où $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*)$

Donc $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX({}^tA - B)Y = 0_{\mathbb{R}}$

Donc ${}^tA - B = \cancel{0_{n,p}}\ 0_{p,n}$ donc $B = {}^tA$

Donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*) = {}^tA}$

Donc $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A) = \boxed{\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^*)}$

Et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}((u^*)^*) = {}^t(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*)) = {}^t({}^tA) = A$

Donc $\boxed{(u^*)^* = u}$

5) $\cancel{y \in \mathrm{Im}(u^*) \Leftrightarrow \exists z \in F, y = u^*(z) \neq 0_E \text{ si } y \neq 0_F}$

$\cancel{\Leftrightarrow \exists z \in F, \forall x \in E, \langle y, x \rangle_E = \langle u^*(z), x \rangle_E = \langle u(x), z \rangle_F \neq 0_{\mathbb{R}}}$

$\cancel{\Leftrightarrow \neg(\exists z \in F, \forall x \in E, \langle u(x), z \rangle_F \neq 0_{\mathbb{R}}}$

$\cancel{\Leftrightarrow \forall z \in \exists x \in E, \forall z \in F, \langle u(x), z \rangle = 0}$

$\cancel{x \in \mathrm{Ker}(u)^\perp \Leftrightarrow u(x) = 0_F \Leftrightarrow \forall y \in F, \langle u(x), y \rangle = 0}$

$\cancel{x \in \mathrm{Ker}(u)^\perp \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{Ker}(u), x \perp x}$
$\cancel{\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{Ker}(u), \langle x, x \rangle = 0}$

$\cancel{y \in \mathrm{Im}(u^*) \Leftrightarrow \exists z \in F, y = u^*(z) \neq 0_E}$
$\cancel{y \neq 0_E}$

$\cancel{\Leftrightarrow \exists z \in F, \forall x \in E, \langle y, x \rangle_E = \langle u^*(z), x \rangle_F \neq 0}$
$\cancel{\Leftrightarrow \exists z \in F, \forall x \in E, \langle z, u(x) \rangle_F \neq 0}$
$\cancel{\Leftrightarrow \exists z \in F, \forall x \in \mathrm{Ker}(u), \langle z, u(x) \rangle \neq 0}$

5)

6) $x \in Ker(u^* o u) \Leftrightarrow u^* o u (x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall y \in E, \langle u^* o u(x), y \rangle_E = 0$

$\Leftrightarrow \forall y \in E ; \langle u(x), u(y) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow u(x) \perp Im(u)$

$\Rightarrow u(x) = 0$

$\Rightarrow x \in Ker(u)$

Donc $\underline{Ker(u^* o u) \subset Ker(u)}$

De plus $x \in Ker(u) \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow u^* o u(x) = 0$

Donc $\underline{Ker(u) \subset Ker(u^* o u)}$

Donc par double inclusion,

$\boxed{Ker(u^* o u) = Ker(u)}$

Copie anonyme - n°anonymat : 578902

Emplacement QR Code	**Code épreuve :** 282	**Nombre de pages :**	**Session :** 2025
	Épreuve de : Maths		
	Consignes	• *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer* • *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir* • *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)* • *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)* • *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*	

6| Alors $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)^\perp = \mathrm{Ker}(u)^\perp = \mathrm{Im}(u^*)$
$(u^* \circ u) \in \mathcal{L}(E)$
Or ${}^t\mathrm{Mat}_{B_E}(u^* \circ u) = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = \mathrm{Mat}_{B_E}(u^* \circ u)$
Donc $u^* \circ u$ est un endomorphisme symétrique,

Alors $\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u)^\perp$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(u^*)}$

7| $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(u^*)$ ~~= Ker~~
Or $w \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(u^*))$ comme composée ~~de~~ d'applications linéaires,

Donc w est ~~bije~~ surjectif et donc bijectif,

Donc $\boxed{w \text{ est un isomorphisme}}$

$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathrm{Im}(u^*)}(w) \text{ est donc inversible}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8) a) ~~$\forall y \in F$, u^*~~ D'après 5, $Im(u) = Ker(u^*)^\perp$

Donc $\pi = Id - p_{Ker(u^*)} = p_{Ker(u^*)^\perp}$

Donc $u^* \circ \pi = u^* - u^* \circ p_{Ker(u^*)} = u^*$

Donc en matrice, $\boxed{{}^tAQ = {}^tA}$

b) ~~$Tr(AI$~~ $A{}^tAQ = A{}^tA$

Donc $Tr(A{}^tAQ) = Tr(A{}^tA)$

9) Π inversible $\Leftrightarrow$ ${}^tAA$ inversible

$\Leftrightarrow rg({}^tAA) = \dim(E) = p$

Or $Im(u^* \circ u) = Im(u^*)$

Donc $rg({}^tAA) = p \Leftrightarrow rg({}^tA) = p \Leftrightarrow rg(A) = p$

Donc $\boxed{\Pi \text{ inversible} \Leftrightarrow rg(A) = p}$

10) a) $rg(A) = p$ donc ${}^tAA$ est inversible et $A{}^tA$ aussi

~~Or $A{}^tAQ$ $A{}^tA$ donc $Q = (A{}^tA)^{-1}A{}^tA$~~

$A(\Pi)^{-1}{}^tA = A({}^tAA)^{-1}{}^tA = I_n = (A{}^tA)^{-1}A{}^tA$

Or ${}^tAQ = {}^tA$ donc $A{}^tAQ = A{}^tA$ et donc $Q = (A{}^tA)^{-1}A{}^tA$

Donc $\boxed{Q = A(\Pi)^{-1}{}^tA}$

10) ⓑ

```
def Calcule_Q(A):
    if al.matrix_rank(A) != p :
        return erreur: M non inversible
    else:
        TA = np.transpose(A)
        M = np.dot(TA, A)
        AM = np.dot(A, al.inv(M))
        return np.dot(AM, TA)
```

11) $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX M X = {}^tX\,{}^tA A X = {}^t(AX)AX$

Or $(AX) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Donc $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX M X = \|AX\|^2 \geqslant 0}$

Partie II

12) On ~~assim~~ confond $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^p$

Alors on reconnait que $J_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$

Et que $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ J_0(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k,i}x_k - y_i\right)^2$

Donc J_0 est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$ comme polynome,

On procède donc à un developpement limité

On remarque d'abord que

$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \partial_i J_0(X) = \sum_{k=0}^{n}(a_{k,i}a_{i,k}x_i - a_{i,k}y_k)$

et donc que $\nabla J_0(X) = {}^tAAX - {}^tAY = D(X)$

De plus $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \partial^2_{i,j}(X) = \cancel{\Sigma}\ a_{j,i}a_{i,j}$

Et donc $\nabla^2 J_0(X) = {}^tAA = M$

12) A l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 de J_0 en X on obtient ainsi

$$\boxed{\forall (X,H)\in(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2,\ J_0(X+H)=J_0(X)+\langle D(X),H\rangle+\frac{1}{2}{}^tH\Pi H}$$

13) J admet un minimum global en $X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow$

$\forall H\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ J(X+H)-J(X)\geqslant 0$

$\Leftrightarrow$

$\forall H\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ \langle D(X),H\rangle+\frac{1}{2}{}^tH\Pi H\geqslant 0$

$\Leftrightarrow$

$\left(\forall H\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ \langle D(X)+\frac{1}{2}\Pi H, H\rangle\geqslant 0\right)$

Si $D(X)=0$, $\forall H\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ J(X+H)-J(X)={}^tH\Pi H\geqslant 0$
donc $\underline{D(X)=0\Rightarrow X \text{ est un minimum global de } J}$

14) Soit $X\in S_0\cap\mathrm{Ker}(A)^\perp$
Alors $D(X)=0$ donc $\Pi X={}^tAY$
Ainsi $\forall Z\in\mathrm{Ker}(A),\ \langle X,Z\rangle=0$

On prouverais que $X=0_{p,1}$
et donc que $\underline{S_0\cap\mathrm{Ker}(A)^\perp=\{0_{p,1}\}}$

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

15) a) $D(X) = 0$ donc ${}^tAAX = {}^tAY$

Donc $A^tAAX = {}^tAY$

Or (A^tA) est inversible en $A(\Pi)^{-1}$ par la a

Donc $AX = A(\Pi)^{-1}\,{}^tAY = QY$

Donc $\boxed{AX = QY}$

b) $A(X - X_0) = AX - AX_0 = QY - AX_0$

Donc $X - X_0 \in \operatorname{Ker}(A)$

soit $X \neq X_0$

Or $X_0 \perp \operatorname{Ker}(A)$

Donc $\langle X_0, X - X_0 \rangle = 0$

ou $\langle X_0, X \rangle = \|X_0\|^2 \geq 0$

Donc par inégalité de Cauchy-Shartz,

$|\langle X_0, X \rangle| = \langle X_0 X \rangle \leq \|X_0\| \|X\|$

Or X et X_0 ne sont pas colinéaires car $X \notin \operatorname{Ker}(A)^\perp$ car X_0 est unique

Donc $\|X\| \|X_0\| > \|X_0\|^2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

15) b) X_0 est non-nul donc $\|X_0\| \neq 0$

Donc $\boxed{\|X\| > \|X_0\| \text{ si } X \neq X_0}$

15) c) $rg(A) = p$ donc $\dim(Ker(A)) = 0$
donc $\dim(Ker(A)^{\perp}) = p$

Alors $S_0 \cap Ker(A)^{\perp} = S_0 \ni X$

Et $S_0 \cap Ker(A)^{\perp} = \{X\}$

Donc $\boxed{S_0 = \{X\}}$

Et $D(\Pi^{-1}\,{}^tAY) = \Pi\Pi^{-1}\,{}^tAY - {}^tAY = 0_{p,1}$

Donc $\Pi^{-1}\,{}^tAY \in S_0$ et $\boxed{S_0 = \{\Pi^{-1}\,{}^tAY\}}$

16) a) $T = \|A(X - U_0)\|^2 = \|QY - AU_0\|^2$ par (3)

$= \|QAU_0 + QZ - AU_0\|^2 \cancel{= \|QZ + (Q - I_p)AU_0\|^2}$

Donc $\boxed{T = \|QZ\|^2}$ car $AU_0 \in Im(A)$

et $\|QZ\|^2 = {}^t(QZ)QZ = {}^tZ\,{}^tQQZ$

Or Q est une matrice symétrique ~~orthogonale~~ car π est un projecteur orthogonal donc ${}^tQ = Q$

Or $Q^2 = Q$ car π est un projecteur

Donc $\boxed{T = \|QZ\|^2 = {}^tZQZ}$

16 b)

```python
def simuleT(A, sigma):
    Z = rd.normal(0, sigma, p)
    TZ = np.transpose(Z)
    QZ = np.dot(Calcule_Q(A), Z)
    return np.dot(TZ, QZ)
```

c)

```python
def esperance(A, sigma):
    T = np.zeros(1000)
    for i in range(1000):
        T[i] = simuleT(A, sigma)
    return np.sum(T)/1000
# On utilise la loi faible des grands nombres
pour approcher l'espérance de T
```

d) L'espérance de T semble correspondre au nombre de colones de A pour $\sigma = 1$

~~Pour une matrice à 2 colones, l'esperance~~

Pour la matrice A_1 à 2 colone, l'espérance de T semble approcher les $10 \times \sigma$

e) $E(Z_1^2) = V(Z_1) + E^2(Z_1) = V(Z_1) = \boxed{\sigma^2 = E(Z_1^2)}$

$x \mapsto x^3$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ donc par théorème de transfert,

$E(Z_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} dx$ on remarque l'intégrale converge par prépondérance de l'exponentielle et que l'intégrande est impaire

Donc $\boxed{E(Z_1^3) = 0}$

Pour $E(Z_1^4)$ on remarque la parité de l'intégrande et la convergence de l'intégrale pour les mêmes raisons.

Alors $E(Z_1^4) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} dx$

16| e) . $x \mapsto \frac{x^2}{2\sigma}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, y croît strictement et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$
Donc par le changement de variable $u = \frac{x^2}{2\sigma}$

$$E(Z_1^4) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\, x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} (\sqrt{2\sigma u})^3 e^{-u}\, du$$

$$= 4\sqrt{\frac{\sigma^3}{\pi}}\, \Gamma(4)$$

Donc $\boxed{E(Z_1^4) = 24\sqrt{\frac{\sigma^3}{\pi}}}$

f) $T = {}^tZQZ = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2 + 2\sum_{1\leq j<i\leq n} Q_{i,j} z_i z_j = T_1 + 2T_2$

Les $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ sont mutuellement indépendants et de même loi

Donc $E(T) = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} E(z_i^2) + 2 \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq n} Q_{i,j} E(z_i)E(z_j)}_{0}$

$\cancel{= E(z_1)^2 \sum_{j,i=1}^{n} Q_{i,j}}$

~~Donc $E(T) = \sigma^2$~~

Donc $E(T) = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} E(z_i^2) = \boxed{\sigma^2 Tr(Q) = E(T)}$

Je n'avais sans doute pas fait les bonnes conjectures...

g)

Copie anonyme - n°anonymat : 578902

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : | Session : 2025

Épreuve de : Maths

Partie 3

17) Soit $t \in \mathbb{R}^*$, ~~Par inégalité triangulaire~~,

$\cancel{0 \leq | \|u + tv\| - \|u\| | \leq}$

$$\|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t\langle u, v\rangle$$

Donc $(\|u+tv\| - \|u\|)(\|u+tv\| + \|u\|) = t^2\|v\|^2 + 2t\langle u, v\rangle$

Alors $\dfrac{\|u+tv\| - \|u\|}{t} = \dfrac{t\|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle}{(\|u+tv\| + \|u\|)}$

Or $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t\|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle}{\|u+tv\| + \|u\|} = \dfrac{2\langle u, v\rangle}{\|u\| + \|u\|} = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\|u+tv\| - \|u\|}{t} = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}}$

18) X_0 est le minimum global de J

~~Alors, comme~~ $J(X) = J_0(X) + \|BX\|$

Alors $\forall H \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $J(X+H) - J(X) = \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}{}^tHMH + \|BX + BH\| - \|BX\|$

10 ⓐ $\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle - \left(\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2\right)$

$$= \|v\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

Donc $\boxed{\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 = \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}}$

ⓑ Alors par inégalité de Cauchy-Shwartz,

$$\frac{\|v\|^2\|u\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} \geqslant 0$$

Donc $\|u+v\|^2 \geqslant \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2$

et par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\boxed{\|u+v\| - \|u\| \geqslant \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}}$$

23) d) i)

```
def FoncSom(alpha, Y, lda):
    U = (alpha* Y/(lda + alpla**2))**2
    return np.sum(U) - 1
```

ii)

```
def CalcBeta(alpha, Y, epsilon):
    a, b = 0, np.sum(Y**2)/4
    while np.abs(F(b)- F(a)) > epsilon:
        c = (a+b)/2        #On a noté FoncSom->F ici
        if FoncSum(c) > 0 :
            b = c      # car F décroît
        else :
            a = c
    if np.sum((Y/alpha)**2) <= 1 :
        return 0      # cas où p(Y) ≤ 1.
    else :
        return c
```

23| d) iii) def CalcSolution(alpha, Y, epsilon):
BV =