501018

DUHOUX

ARTHUR

30/05/2005

Note de délibération : 18.48 / 20

Numéro d'inscription S0 1018

Né(e) le 30 / 05 / 2005

Signature

Nom DUHOUX

Prénom (s) ARTHUR

18.48 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 10

Numéro de table 050

Commencez à composer dès la première page

Exercice 1 :

1. a) La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge par le critère de Riemann ($2>1$) appliqué aux series à termes positifs

b) Passons la valeur absolue,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge comme nous l'avons vu précédemment

Ainsi

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument donc elle converge

c) Soit $n\geq 1$,

$$\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2n)^2}$$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2}$ converge par le critère de Riemann ($2>1$)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.48 / 20

Ainsi par critère de comparaison appliqué aux fonctions positives

$\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(2n+1)^2} > 0\right)$

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ également

2 . Calculons : $A - B$

Leur somme donne :

~~La suite des sommes partielles donne~~ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \\ -1 & \text{si } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

dès lors

$$\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum\right.}$$

$$\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

~~Cela~~ Cela vaut bien,

$$2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Ensuite, calculons $C+\frac{1}{4}A$

~~La suite de leurs sommes partielles~~

Leur somme donne,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

D'où le resultat demandé, car on a la somme de la serie A.

2a) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$,

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha)+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha)$$

$$=2\cos\alpha\cos\beta$$

D'où le resultat demandé.

3 b) Montrons par récurrence sur n,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \text{ `` } \forall t\in[0,\pi[, \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = -\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ ''}$$

<u>* n = 1</u>

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^k\cos kt = -\frac{1}{2}+(-1)\frac{\cos\left(\frac{3}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos t = -\frac{1}{2}-\frac{\cos\frac{3}{2}t}{2\cos\frac{t}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos t = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos\frac{3}{2}t}{\cos\frac{t}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos t = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos(\frac{t}{2}+t)}{\cos\frac{t}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos t = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos(\frac{t}{2})\cos t-\sin\frac{t}{2}\sin t}{\cos\frac{t}{2}}\right)$$

on a donc l'initialisation

* Soit $n\in\mathbb{N}^*$ supposons le resultat vrai au rang n

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\cos kt = (-1)^{n+1}\cos(n+1)t + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kt$$

$$= (-1)^{n+1}\cos(n+1)t + \left(-\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\cos\frac{t}{2}}\right)$$

par hypothèse de récurrence

Reprenons ce dernier resultat :

$$(-1)^{n+1}\cos(nt+t)-\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{n}t\right)}{\cos\frac{t}{2}}$$

Numéro d'inscription 501018

Né(e) le 30/08/2005

Signature

Nom DUHOUX

Prénom (s) ARTHUR

18.48 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 10

Numéro de table 050

Commencez à composer dès la première page.

$$= -(-1)^n(\cos nt \cos t - \sin nt \sin t) - \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\cos\frac{t}{2}}$$

$$= (-1)^n\left(\frac{\cos\frac{2n+1}{2}t}{\cos\frac{t}{2}} - \cos nt\cos t + \sin nt \sin t\right) - \frac{1}{2}$$

On admet le resultat

4a) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $a<b$,

~~Le~~ L'inégalité des accroissements finis confirme

qu'il existe un réel M tel que

$\forall t\in[a,b]$, $|f(t)|\leq M$, de plus $M=\max\limits_{t\in[a,b]}(f'(t))$

d'où également, $|f'(t)|\leq M$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.48 / 20

b) D'une part, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, (Ce n'est pas précisé dans l'énoncé)

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt \right| \leq \int_a^b \left| \frac{1}{\lambda} f'(t) \sin \lambda t \right| dt$$

$$= \int_a^b \left|\frac{1}{\lambda}\right| |\sin \lambda t| \, |f'(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^b \left|\frac{1}{\lambda}\right| |\sin \lambda t| \, M \,dt, \text{ par la question précédente}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b M\,dt, \text{ car } \forall t \in \mathbb{R}, \ |\sin t| \leq 1$$

Or $\frac{1}{\lambda} \int_a^b M\,dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, car l'intégrale est convergente (finie) et dépend pas de λ.

Ainsi par encadrement,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b \sin(\lambda t) f'(t)\,dt = 0$$

D'où le résultat souhaité

c) Posons des fonctions :

$$\begin{cases} u(t) = f(t) \\ u'(t) = f'(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(t) = \cos \lambda t \\ v(t) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t \end{cases}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

alors par intégration par parties,

$$\int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt = \left[\frac{1}{\lambda} \sin \lambda t \, f(t) \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{\lambda} f'(t) \sin \lambda t \, dt$$

or par la question précédente,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} - \int_a^b \frac{1}{\lambda} f'(t) \sin \lambda t = 0$$

et de plus $\left| \frac{1}{\lambda} \left(\sin(\lambda b) f(b) - \sin(\lambda a) f(a) \right) \right|$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \left(|\sin \lambda b \, f(b)| - |\sin \lambda a \, f(a)| \right)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} (M - M)$$

$$= 0 .$$

finalement on a bien,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt = 0$$

5 a) Soit φ définie sur $]0,\pi]$,

$\forall t \in]0,\pi]$, $\sin \frac{t}{2} \neq 0$. et $\sin$ y est $\mathcal{C}^1$, dénominateur non nul

Ainsi, comme $t \mapsto t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ elle l'est sur $]0,\pi]$

Ce qui assure par quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$

φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$

Alors,

$\forall t \in]0,\pi]$,

$$\varphi'(t) = \frac{(\sin \frac{t}{2}) - t(\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})}{(\sin \frac{t}{2})^2} = \frac{\sin\frac{t}{2} - \frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{(\sin\frac{t}{2})^2}$$

D'où le résultat demandé

b) Soit $t \in]0,\pi]$, $\frac{t}{(\sin \frac{t}{2})} = \frac{1}{\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}}$ (inutile)

Or le DL à l'ordre 1 de sin donne,

$$\sin\frac{t}{2} \underset{t\to 0}{=} \frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right)$$

Ainsi $\sin\frac{t}{2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2}$

et $$\frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{\frac{t}{2}} \underset{t\to 0}{\sim} 2$$

Alors $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} = 2$ et donc φ est prolongeable en 0.

Numéro d'inscription 501018

Né(e) le 30/05/2005

Nom DUHOUX

Prénom (s) ARTHUR

Signature

18.48 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/10

Numéro de table 050

c) On a : $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \in]0,\pi] \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

On a montré que, pour $t \in]0,\pi]$, φ était C^1

de plus nous l'avons prolongé par continuité en 0.

ie $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\sin\frac{t}{2}} = 2$

Ainsi φ est C^1 sur $[0,\pi]$

d) Soit f définie sur $[0.\pi[$ telle que

$\forall t \in [0.\pi[$, $f(t) = \varphi(\pi - t)$.

De sorte que :

$$\lim_{t \to \pi} f(t) = \lim_{t \to 0} \varphi(t) = 2.$$

Ainsi f admet une limite finie en π elle y est donc prolongeable

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.48 / 20

notons $\tilde{f}$ la fonction prolongée,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{\cos(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in [0, \pi[\\ 2 & \text{si } t = \pi \end{cases}$$

6 a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ On admet le resultat

b/ $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos kt \, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \underbrace{\int_0^{\pi} (\pi - t) \cos kt \, dt}_{= \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{k^2} \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}}$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2N+1} -\left(\frac{2}{k^2}\right)$$

$$= -2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}$$, car k est impair changement de variable $k = 2n+1$.

on a bien le resultat souhaité

7 a) D'après le resultat précédent

$\forall N \in \mathbb{N}^*$.

La somme partielle de C donne :
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t)(\cos kt)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (\pi - t) \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \cos kt \; dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (\pi - t)\left(-\frac{1}{2} + (-1)^{2N+1} \frac{\cos\left(\frac{2(2N+1)+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (\pi - t)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{4N+3}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{(\pi - t)}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi (\pi - t)\frac{\cos\left(\frac{4N+3}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}(\pi - t)^2\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi (\pi - t)\,\frac{\cos\frac{4N+3}{2}t}{\cos\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\int_0^\pi (\pi - t)\,\frac{\cos\frac{4N+3}{2}t}{\cos\frac{t}{2}}\,dt$$

Or on reconnait, que

$$\int_0^{\pi} (\pi - t) \frac{\cos \frac{4N+3}{2} t}{\cos \frac{t}{2}} dt$$

$$= \int_0^{\pi} f(t) \cos \frac{4N+3}{2} t \, dt$$

De la forme donc $\int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt$ (question 4c)

avec f $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b] = [0,\pi]$, car on l'a prolongée

et $\lambda = \frac{4N+3}{2}$

Ainsi le resultat de la 4c) s'applique bien

et

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)}{\cos \frac{t}{2}} \cos \frac{4N+3}{2} t \, dt = 0$$

D'où $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} = C = \frac{\pi^2}{8}$

On a bien $C = \frac{\pi^2}{8}$.

b) Reprenons alors les resultats de la question 2.

$$A - \frac{1}{4} A = A \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\pi^2}{6}$$

Numéro d'inscription S01018
Né(e) le 30 / 05 / 2005
Nom DUHOUX
Prénom (s) ARTHUR

18.48 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 10

Numéro de table 050

et

$$B = A - 2C = \frac{\pi^2}{6} - 2\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\pi^2}{12} - \frac{3\pi^2}{12}$$

$$= \frac{-\pi^2}{12}$$

D'où finalement,

$$A = \frac{\pi^2}{6} \quad B = \frac{-\pi^2}{12} \quad C = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 2

Partie 1

1 a) $M \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R})$, or $\#(I_3, M, M^2, M^3, M^4, M^5, M^6, M^7, M^8, M^9) = 10$

donc comme $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9 \leq 10$

Alors cette famille que l'on note $\mathcal{F}$ est liée.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.48 / 20

1b) F est liée donc elle contient un vecteur redondant.

Alors (supposons que ce vecteur est M choisi arbitrairement, cela ne change rien au raisonnement)

$\exists (\alpha_1, \dots \alpha_q) \in \mathbb{R}^q$,

$$M = \sum_{k=2}^{q} \alpha_k M^k + \alpha_1 I_3$$

Ainsi

$$M - \sum_{k=2}^{q} \alpha_k M^k - \alpha_1 I_3 = 0$$

et

$$X - \sum_{k=2}^{q} \alpha_k X^k - \alpha_1$$ est un polynome annulateur de M

de degré inférieur ou égal à q (car les α_i peuvent être nuls)

2a)
```
def PolyAnn(M):
    if np.dot(M, np.dot(M,M)) - 4*np.dot(M,M) - 12*M - 28 == 0:
        print "True"
    else:
        print "False"
```

b) Si $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est annulateur de M
alors les valeurs propres de M sont incluses dans
les racines de φ.

Or $\varphi(0) = -28 \neq 0$

Ainsi $0 \notin sp(M)$

et M est inversible

De plus,

$$\cancel{M^3 - 4M^2 - 12M - 28 = 0}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{1}{12}(M^3 - 4M^2 - 28I_3) = M}$$

$$M^3 - 4M^2 - 12M - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow M(M^2 - 4M - 12I_3) = 28 I_3$$

$$\Leftrightarrow M\left(\frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_3)\right) = I_3$$

Et donc $M^{-1} = \frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_3)$.

3 a) Soit $X \in E_\lambda(M)$ (ie un vecteur propre associé à λ, $X \neq 0$)

tel que $MX = \lambda X$. et $f(x) = \lambda x$, si on note f

l'endomorphisme associé à M. ($x \in (\mathbb{R})^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

Alors, λ $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$

$\forall x \in (\mathbb{R}^*)^3,\ \varphi(f(x)) = 0$

$\Rightarrow \varphi(\lambda x) = 0$

$\Rightarrow x\,\varphi(\lambda) = 0$

$\Rightarrow \varphi(\lambda) = 0$, car $x \neq (0,0,0)$

D'où si $\lambda \in sp(M)$, $\varphi(\lambda) = 0$

3.b) φ est dérivable car polynomiale, donc

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = 3x^2 - 8x - 12$

Cherchons son signe, soit Δ son discriminant :

$\Delta = (-8)^2 - 4(3)(-12)$

$= 64 - 12(-12)$

$= 64 + 144$

$= 208 > 0$,

φ' admet deux racines x_1 et x_2.

$x_1 = \dfrac{8 - \sqrt{208}}{2\times 3}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{8 + \sqrt{208}}{2\times 3}$

$= \dfrac{4 - 2\sqrt{13}}{3} < 0$ $\qquad$ $= \dfrac{4 + 2\sqrt{13}}{3} > 0$

Numéro d'inscription S01018

Né(e) le 30 / 05 / 2005

Signature

Nom DUHOUX

Prénom (s) ARTHUR

18.48 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 10

Numéro de table 050

on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_1)$	$\searrow$	$\varphi(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec, $\varphi(x_1) < 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

Dès lors, $\varphi(x_2) < 0$,

Comme φ est strictement monotone sur $]-\infty, x_1]$, $]x_1, x_2[$, $[x_2, +\infty[$, et continue,

le théorème de la bijection assure que φ réalise une bijection de $[x_2, +\infty[$ dans $[\varphi(x_2), +\infty[$

(on s'intéresse à celui ci car $0 \notin]-\infty, x_1]$ et $0 \notin]x_1, x_2[$)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.48 / 20

Ainsi, pour $x \in [x_2, +\infty[$, $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution (λ)

et comme φ est croissante sur cet intervalle fermé,

$\lambda \geq x_2$ puis $-32-\sqrt{13} \geq -4$

$\Leftrightarrow$ $4 \leq x_2$

et finalement,

M admet une unique valeur propre réelle

et $\lambda \geq 4$.

c) Si M était diagonalisable (sachant que $sp(M) = \{\lambda\}$) par l'absurde

Alors $tr(M) = \dim E_\lambda(M) \times \lambda = 3\lambda$, car il faudrait que la dimension du seul sous espace propre soit égal à la taille de M, Ainsi comme $tr(M) = 4$ et $\lambda \geq 4$, $3\lambda > 4$

et $tr(M) \neq 3\lambda$, on a une contradiction

M n'est pas diagonalisable

Partie 2 :

4. Soit $S = {}^tMM$ de sorte que ${}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM = S$

$S \in S_n(\mathbb{R})$

5. Soit $X \in E_\lambda(S)$, $X \neq 0$.

Alors,

$$SX = \lambda X \implies {}^tXSX = \lambda\, {}^tXX$$

$$\implies \|{}^tMX\|^2 = \lambda \|X\|^2 \text{, avec le produit scalaire canonique de } M_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\implies \frac{\|{}^tMX\|^2}{\|X\|^2} = \lambda > 0 \text{, car } X \neq 0 \text{, et } M \text{ inversible}$$

Ainsi les valeurs propres de M sont strictement positives

6. Le théorème spectral assure que $S \in S_n(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.
($S = Mat_\mathcal{B}(f)$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, f son endomorphisme associé)

Ainsi, il existe D diagonale et P orthogonale telles que

$$S = PD\,{}^tP$$

7 a). Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9^2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^2 & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix}}$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, tels que

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

Alors $\Delta^2 = D$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1^2 = 1 \\ \lambda_2^2 = 16 \\ \lambda_3^2 = 49 \end{cases}$ chaque equation a deux solutions
et il y a 3 equations
donc il existe 2^3 combinaisons, ou matrices
telles que $\Delta^2 = D$, soit $2^3 = 8$.

b) On sait que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont tous non nuls (car 1, 16, 49 le sont aussi)

Alors étant diagonale $rg(\Delta) = 3$ et Δ est inversible
(on aurait pu donc dire que $0 \notin sp(\Delta)$).

8. Soit $R \in S_n(\mathbb{R})$, Alors elle est diagonalisable et il existe

Δ diagonale et P orthogonale telle que

$R = P\Delta^tP$ et $R^2 = P\Delta^{2\,t}P$

Ainsi comme $\Delta^2 = D$

$R^2 = PD^tP = S$ et il existe bien une telle matrice (à coefficients réels)

9. À nouveau comme par 7 b) Δ est dite inversible,
ie $0 \notin sp(\Delta)$, alors étant sa matrice diagonalisée
Δ et R partageant le même spectre et $0 \notin sp(R)$,
elle est inversible.

Numéro d'inscription 501018

Né(e) le 30 / 05 / 2005 Signature

Nom DUHOUX

Prénom (s) ARTHUR

18.48 / 20

Ecricome Épreuve : Maths approfondies Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 06 / 10

Numéro de table 050

Notons Δ^{-1} l'inverse de Δ,

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{16}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{49}} \end{pmatrix}$$

Car

$$\Delta \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{16}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{49}{49}} \end{pmatrix} = I_3$$

Alors

$$R P \Delta^{-1} {}^tP = P \Delta {}^tP \times P \Delta^{-1} {}^tP = P \Delta \Delta^{-1} {}^tP = P {}^tP = I_3$$

Ainsi $R(P\Delta^{-1}{}^tP) = I_3$ et donc $R^{-1} = P\Delta^{-1}{}^tP$.

10. Notons $U = MR^{-1}$

Alors ${}^tUU = {}^tR^{-1}\,{}^tM M R^{-1} = {}^tR^{-1} S R^{-1}$

or ${}^t(R^{-1}) = P\Delta^{-1}{}^tP = R^{-1}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.48 / 20

donc,

$$P\Delta^{-1}P^{-1}PDP^{-1}P\Delta^{-1}P^{-1}$$

$$= P\Delta^{-1}D\Delta^{-1}P^{-1}$$

or $\Delta^{-1}D\Delta^{-1} = D(\Delta^{-1})^2 = DD^{-1} = I_3$

d'où $P\Delta^{-1}D\Delta^{-1}P^{-1} = PP^{-1} = I_3$

et donc ${}^tUU = I_3$

U est orthogonale

Partie 3 :

11. On sait que $\Delta^2 = D$ or, $sp(D) \subset \mathbb{R}_+^*$

~~Ainsi soit~~ $\cancel{(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) \in sp(\Delta^2) \subset \mathbb{R}_+^*}$

~~De sorte que,~~ $\cancel{\sqrt{\lambda_1^2} =}$

Soit $X \in E_\mu(R)$, $X \neq 0$, $\mu \neq 0$ (R est inversible)

Alors $RX = \mu X$

De plus notons $Q =$ On admet

12. Si $N = {}^tPTP$ alors $T = PN{}^tP$.

$$T^2 = PN{}^tPPN{}^tP = PN^2{}^tP.$$

de plus $T^2 = ({}^tVM)^2 = {}^tVM{}^tVM$.

On admet

13. On a $T^2 = S$, d'où, $TS = T^3 = ST$

Ainsi S et T commutent

14 a) Soit $i \in [\![1,3]\!]$,

Soit $P = (C_1 | C_2 | C_3)$, $C_i \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

Alors si ϵ_i est la matrice possédant que des 0

et un 1 à la i-ème position(dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

Alors

$$P\epsilon_i = (C_1|C_2|C_3)\epsilon_i = C_i\epsilon_i = C_i$$

ϵ_i identifie la i-ème colonne de P.

b) On sait que $PD{}^tP = S$.

Ainsi, $PD = SP$

ie $(C_1|C_2|C_3)D = S(C_1|C_2|C_3)$

or $D = (\lambda_1 \varepsilon_1 | \lambda_2 \varepsilon_2 | \lambda_3 \varepsilon_3)$

Alors si on calcule que la colonne C_i,
$\forall i \in [\![1,3]\!]$,

$C_i D = S C_i$ avec $C_i D = C_i \lambda_i \varepsilon_i = \lambda_i C_i$

et on a bien $\lambda_i \in sp(S)$ et $C_i \in E_{\lambda_i}(S)$

c) Soit $i \in [\![1,3]\!]$,

$STC_i =$
on admet

d) Si $TC_i \in E_{\lambda_i}(S)$, comme $\dim E_{\lambda_i}(S) = 1$, car S admet 3 valeurs propres distinctes

et que $C_i \neq 0$, C_i forme une base de $E_{\lambda_i}(S)$ (il y appartient par 14 b)

Ainsi comme $TC_i \in E_{\lambda_i}(S)$,

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $TC_i = \alpha C_i$ et donc ils sont colinéaires

15. On sait que $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ telles que

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$,

Ainsi $N^2 = D \Rightarrow N = \sqrt{D} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$, qui existent (sont réels)
et N est diagonale

Numéro d'inscription S01018

Né(e) le 30/08/2003

Nom DUHOUX

Prénom (s) ARTHUR

18.48 / 20

Ecricome Épreuve : Maths approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 10

Numéro de table 050

16. On a montré que $\cancel{A^2} = N$ était diagonale, Δ aussi,

de plus d'après 11. $sp(R) = sp(\Delta) \subset \mathbb{R}_+^*$

Ainsi $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$

Or dans la question précédente on a vu que

$N = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$

Ainsi $D = N$

Et comme $T = PN^tP$ et $R = P\Delta^tP$

on a bien $T = R$.

17. À nouveau reprenons des résultats précédents,

$M = VT$ et $M = UR$ or $T = R$ donc $VR = UR$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.48 / 20

Ainsi, comme R est inversible,

$$UR = VR \iff U = V.$$

D'où le résultat souhaité

Problème.

Partie 1

1. a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cherchons un équivalent simple de

$t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ au voisinage de 0.

$$(1-t)^{y-1} = (y-1) - (y-2)t + o(t)$$

donc $(1-t)^{y-1} \underset{t \to 0}{\sim} y-1$, si $y \neq 1$.

Ainsi $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \to 0}{\sim} (y-1)t^{x-1}$

b) Alors $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ converge ssi,

Comme $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \to 0}{\sim} (y-1)t^{x-1}$, $x > 0$

car si $x > 1$, l'intégrale n'est pas impropre et si $* \ x \in]0,1[$,

Alors le critère de Riemann en 0 $\alpha = x-1 > -1$.
assure sa convergence.

Ainsi,
par critère d'équivalence appliqué aux fonctions positives
car pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, la fonction l'est.

$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow x > 0$$

c) d'une part $s = 1-t$ est licite car C^1 sur $[0, 1/2]$

et donc $(dt = -ds)$ il vient que,

$\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,ds$ et $\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ sont de même
nature, étant convergente (~~la seconde~~ la première, x et y jouent des roles symétriques)

Alors $-\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}(-ds) = \int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$, car le changement de variable est décroissant.

d) Alors, $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

$$= \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt + \int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

et comme $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge ssi $x>0$

et que $\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est de même nature que $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds$

Alors le même raisonnement que à la question 1.b)
permet de dire que.

$$\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds \text{ converge ssi } y>0$$

Ainsi c'est la même condition necessaire et suffisante
requise par $\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

et finalement,

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \text{ converge } \Leftrightarrow x>0 \text{ et } y>0$$

2. $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

si on pose $u = 1-t$, $x>0$ et $y>0$

Alors ce changement de variable a été justifié à la question 1c)

et donc $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du$

Numéro d'inscription S 0 1 0 1 8

Né(e) le 30 / 05 / 2005

Signature

Nom DUHOUX

Prénom (s) ARTHUR

18.48 / 20

Ecricome Épreuve : Maths approfondies

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 10

Numéro de table 050

Ce qui confirme que $B(x,y) = B(y,x)$ pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

3. Soit $x > 0$,

$$B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \left[\frac{1}{x}t^x\right]_0^1 = \frac{1}{x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ B(x,1) = \frac{1}{x}$

4a) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$B(x+1,y) + B(x,y+1)$

$$= \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1}\,dt + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(t(1-t))\,dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = B(x,y)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.48 / 20

b) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$,

Posons : $\begin{cases} u(t) = (1-t)^y \\ u'(t) = -y(1-t)^{y-1} \end{cases}$ $\begin{cases} v'(t) = x t^{x-1} \\ v(t) = t^x \end{cases}$

Alors on a :

$$x B(x,y+1) = \int_0^1 x t^{x-1}(1-t)^y \, dt$$

$$= \left[t^x (1-t)^y \right]_0^1 + \int_0^1 t^x y (1-t)^{y-1} \, dt$$

$$= y \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt$$

$$= y B(x+1, y)$$

D'où le resultat demandé

c) Utilisons les deux questions précédentes,

$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,$

$$\cancel{B(x+1,y) = B(x,y) - B(x,y+1)}$$

$$B(x+1,y) + B(x,y+1) = B(x,y)$$

$$\Leftrightarrow B(x+1,y) + \frac{y}{x} B(x+1,y) = B(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x} B(x+1,y) + \frac{y}{x} B(x+1,y) = B(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{x}\right)(B(x+1,y)) = B(x,y)$$

$$\Leftrightarrow B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

On a bien le resultat

Partie 2:

6 a) $\forall n \in \mathbb{N}$, " $\Gamma(n+1) = n!$ " montrons-le par recurrence sur $\mathbb{N}$.

* <u>$n=0$</u>

$\Gamma(1) = 1$ ce qui est vrai

donc l'hypothèse est initialisée

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le resultat vrai au rang $n+1$

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)!$$

Le resultat est héréditaire

* Par principe de recurrence on a bien,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!$$

b) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$

posons $u = \sqrt{2t}$, licite car $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\frac{u^2}{2} = t$

d'où $u\,du = dt$

Alors comme la première intégrale converge et que le changement de variable est croissant,

$$\int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u^2}{2}\right)^{-1/2} e^{-\frac{u^2}{2}} u\,du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{-1/2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

On reconnait ~~une~~ l'intégrale de Gauss associée à la loi normale centrée réduite

Donc comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$

Numéro d'inscription S0101 8

Né(e) le 30 / 05 / 2005

Signature

Nom DUHOUX

Prénom (s) ARTHUR

18.48 / 20

Ecricome Épreuve : Maths approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 10

Numéro de table 050

Alors, $\sqrt{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\pi}$

et donc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

2.a) Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$, vérifions la convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}\,dt$$

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{0}^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt}\,dt$$

posons $bt = u$. changement de variable C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ ($dt = \frac{1}{b}du$) et croissant,

Alors, $\int_{0}^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt} dt$ est de même nature que $\int_{0}^{+\infty} (\frac{u}{b})^{a-1} e^{-u} \frac{du}{b}$

or $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{b^a} u^{a-1} e^{-u} du = \frac{1}{b^a}\Gamma(a)$ donc les deux intégrales

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.48 / 20

convergent.

b) * Alors en reprenant le resultat précédent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)dt = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_{0}^{+\infty} t^{a-1}e^{-bt}dt$$

et le changement de variable précédent, puisqu'elles convergent assure que
$$\int_{0}^{+\infty} t^{a-1}e^{-bt}dt = \frac{\Gamma(a)}{b^a}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\, dt = 1$

* De plus, si $t>0$, $\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1}e^{-bt} > 0$

donc,
$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{a,b}(t) \geq 0$

et $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car pour $t>0$ $f_{a,b}$
est une composée de fonctions continues.

Finalement les conditions sont reunies et $f_{a,b}$ est une densité

8 a) Soit X une variable aléatoire à densité dont une des densités est $f_{a,1}$.

$$f_{a,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

On reconnaît que cette densité correspond à celle d'une loi $\gamma(a)$, $a > 0$.

Ainsi comme la densité caractérise la loi

$$X \hookrightarrow \gamma(a).$$

Avec $\mathbb{E}(X) = a \quad \mathbb{V}(X) = a$

b) Raisonnons de la même façon,

$$f_{b,1}(t) = \begin{cases} b\, e^{-bt} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

On reconnaît cette fois-ci la densité d'une loi exponentielle de paramètre, $b > 0$.

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$

Avec $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{b} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{b}$.

9 a) ~~Si X a $f_{1,b}$ pour densité, alors $X \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$~~

~~Et par la même occasion $bX \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $bX \hookrightarrow \gamma(1)$.~~

9a) Soit X qui a $f_{a,b}$ pour densité, alors bX est à densité et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f_{bX}(t) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{t}{b}\right) = \begin{cases} \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} e^{-b\frac{t}{b}} & \text{si } \frac{t}{b} > 0 \\ 0 & \text{si } \frac{t}{b} \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

On reconnait la densité d'une variable aléatoire suivant une $\gamma(a)$

donc $bX \hookrightarrow \gamma(a)$.

9b). Si $bX \hookrightarrow \gamma(a)$ $\quad E(bX) = a \quad V(bX) = a$

or $E(bX) = b\,E(X)$ et $V(bX) = b^2 V(X)$

Ainsi X admet une espérance et une variance et

$E(X) = \frac{a}{b}$ et $V(X) = \frac{a}{b^2}$

10 c). Calculons $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}{1} = \pi$

Partie 3

11. e) Le resultat de la partie 2 illustré est $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$

car on s'approche très de 3,14 avec les simulations de B pour $x = y = \frac{1}{2}$

Numéro d'inscription S0 10 18

Né(e) le 30 / 05 / 2005

Signature

Nom DUHOUX

Prénom (s) ARTHUR

18.48 / 20

Écricome Épreuve : Maths appro

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 10

Numéro de table 030

12 a) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Par la formule de transfert, ~~comme X admet une espérance~~ sous réserve d'existence :

Soit $a \geq 1$,
$$E(X^{a-1}) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \Gamma(a)$$

et $V(X^{a-1}) = E((X^{a-1})^2) - \Gamma(a)^2$

$$= \int_0^{+\infty} t^{2(a-1)} e^{-t}\, dt - \Gamma(a)^2$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{(2a-1)-1} e^{-t}\, dt - \Gamma(a)^2$$

$$= \Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.48 / 20

b) Calculons l'espérance de r_n pour $n \geq 1$.

$$\mathbb{E}(r_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X^{a-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Gamma(a) = \frac{n}{n}\Gamma(a) = \Gamma(a)$$

car les $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc par la question 12a)

r_n est sans biais.

Montrons que sa variance tend vers 0.

les X_k sont indépendantes, donc par le lemme des coalitions les X_k^{a-1} aussi et donc,

$$V(r_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k^{a-1})$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2\right)$$

Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} V(r_n) = 0$, l'intérieur de la parenthèse dépend pas de n.

Ainsi, par la condition suffisante de convergence,

H_n est un estimateur convergent et sans biais de $\Gamma(a)$

c) la fonction rlyst . simule une loi exponentielle de paramètre n par la méthode d'inversion. (on prend l'inverse de la fonction de répartition que l'on simule par une loi uniforme, ici dans $[1, n]$