Copie anonyme - n°anonymat : 980545

E6-00143
980545
Mat Appro

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 22	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I

Q1) On procède par analyse-synthèse.

Analyse

On suppose que il existe $a_0 \in E$ tel que :
$\forall x \in E, \ f(x) = \langle a_0, x \rangle_E$

On a ainsi :

$$\forall x \in E, \ \langle a_0, x\rangle_E = f(x) = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{f(e_i)}_{\in \mathbb{R}} \langle x, e_i\rangle_E = \Big\langle \sum_{i=1}^{p} \underbrace{f(e_i)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{e_i}_{\in E}, x \Big\rangle_E$$

$\mathcal{B}_E$ est une base orthonormale de E et $x \in E$

On admet unicité

Synthèse. On pose $a_0 = \sum_{i=1}^{p} f(e_i) e_i$.

On vérifie :

$$\forall x \in E, \ \Big\langle \sum_{i=1}^{p} f(e_i) e_i, x \Big\rangle_E = \sum_{i=1}^{p} f(e_i) \langle e_i, x\rangle_E$$

$$= f\Big(\sum_{i=1}^{p} e_i \langle e_i, x\rangle_E\Big)$$

$$= f(x)$$

Donc a_0 convient.

Donc $\exists! a_0 \in E, \forall x \in E, f(x) = \langle a_0, x\rangle_E$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q2

On pose $f =$

On admet

Q3

Soit $(y_1, y_2, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{R}$. On vérifie :

$u^*(y_1 + \lambda y_2) = z_{y_1+\lambda y_2}$

Or on a :

$\forall x \in E, \quad \langle z_{y_1+\lambda y_2}, x \rangle_E = \langle u(x), y_1 + \lambda y_2 \rangle_F$

$= \langle u(x), y_1 \rangle_F + \lambda \langle u(x), y_2 \rangle_F$

Par Q2 on a qu'il existe un unique $z_{y_1} \in E$ et un unique $z_{y_2} \in E$ tel que :

$\forall x \in E, \langle u(x), y_1 \rangle_F = \langle z_{y_1}, x \rangle_E$ et $\langle u(x), y_2 \rangle_F = \langle z_{y_2}, x \rangle_E$

Donc on a :

$\forall x \in E, \quad \langle x, z_{y_1+\lambda y_2} \rangle_E = \langle z_{y_1}, x \rangle_E + \lambda \langle z_{y_2}, x \rangle_E$

$= \langle x, z_{y_1} + \lambda z_{y_2} \rangle_E$

On admet $z_{y_1+\lambda y_2} = z_{y_1} + \lambda y_2$

Q4 On a :

On admet

On sait que la dimension de $Vect(C_1(A), \ldots, C_p(A))$, où $(C_i(A))_{i \in [\![1,p]\!]}$ désigne la i-ème colonne de A, et la dimension de $Vect(L_1(A), \ldots, L_p(A))$ sont égales, avec $(L_i(A))_{i \in [\![1,p]\!]}$ désignant la i-ème ligne de A.

Donc $Rg({}^tA) = Rg(A)$

Donc $Rg(u^*) = Rg(u)$

On a :

$$\underset{B_E, B_F}{Mat}((u^*)^*) = {}^t({}^tA) = A$$

Donc $(u^*)^* = u$

Q5. On sait que $p = \dim(E) < +\infty$. Donc en vertu du théorème du rang :

$$p = Rg(u) + \dim(Ker(u))$$
$$= Rg(u^*) + \dim(Ker(u))$$

Donc :

$$Rg(u^*) = p - \dim(Ker(u))$$

Or $Ker(u)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Donc on a :

$$\dim(Ker(u)^\perp) = p - \dim(Ker(u)) = Rg(u^*)$$

Soit $z_y \in Im(u^*)$. Soit $y \in F$ tel que $u^*(y) = z_y$.

Soit $x \in Ker(u)$. On a :

$$\langle x, z_y \rangle_E = \langle x, u^*(y) \rangle_E = \langle u(x), y \rangle_F = \langle 0, y \rangle_F = 0$$

Donc $\mathrm{Im}(u^*) \subseteq \mathrm{Ker}(u)^\perp$

Par inclusion et égalité des dimensions :

$\boxed{\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp}$

Q6

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On a :

$u^* \circ u(x) = u^*(0) = 0$

- Donc $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$

Soit $z \in E$ et $x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$. On a :

$0 = \langle z, \underbrace{u^*((u(x))}_{=0} \rangle_E \xrightarrow{Q3} = \langle u(z), u(x) \rangle_F$

On prend en particulier $z = x$ car $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) \subseteq E$

Donc :

$0 = \|u(x)\|_F^2 \iff \|u(x)\|_F = 0$

$\iff u(x) = 0$

$\iff x \in \mathrm{Ker}(u)$

- Donc $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$

$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u)}$

Or $\dim(E) < +\infty$. Donc par le théorème du rang :

$p = \dim(\mathrm{Ker}(u^* \circ u)) + \mathrm{Rg}(u^* \circ u)$

$= \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u^* \circ u)$ & $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^*)$

$= \dim(\mathrm{Ker}(u^*)) + \mathrm{rg}(u^* \circ u)$ $\iff$ $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u^*))$

Or par théorème du rang :

$p = \dim(\mathrm{Ker}(u^*)) + \mathrm{rg}(u^*)$

Donc :

$\mathrm{Rg}(u^*) = \mathrm{Rg}(u^* \circ u)$

Copie anonyme - n°anonymat : 980545

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 22	Session : 2025

Épreuve de : Mathématique Approfondier

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Soit $z_y \in Im(u^* o u)$. Soit $y \in F$ tel que $u^* o u(y) = z_y$

On pose $\alpha = u(y) \in F$ et on a :

$u^*(\alpha) = z_y$

Donc $z_y \in Im(u^*)$

Donc par inclusion et égalité des dimensions :

$\boxed{Im(u^* o u) = Im(u^*)}$

Q7 On a u et u^* qui sont des application linéaires.
Donc w est linéaire.
En outre on a :

$x \in Im(u^*) \cap Ker(w) \iff u^* o u(x) = 0$ d Q6
$\iff u(x) = 0$
$\iff x \in Ker(u)$
~~$\iff x \in Ker(u^*)$~~

Or $x \in Im(u^*) = Ker(u)^\perp$
Donc $\langle x, x \rangle = 0 \iff \|x\|^2 = 0 \iff \|x\| = 0$
$\iff x = 0$

Donc $Ker(w) \cap Im(u^*) = \{0_E\}$ i.e. w est injective.

Or par corollaire du théorème du rang:

w est injective $\Leftrightarrow$ w est bijective

Donc w est un isomorphisme.

On a:

$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\exists! X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(w) X = {}^tAAX$
$= MX$

Q8

8.a) En notant $F_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a:

$${}^tAQ = {}^tA\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \, {}^tF_i\right)$$

On admet

8.b) On a $Rg(u) = Rg(u^*) = rg({}^tA)$.

Q4

Or π est un projecteur. Donc $\pi^2 = \pi$

Donc $P = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de π.

Donc $Sp(\pi) \subseteq \{0,1\}$

Or $\pi \neq 0$

Donc $Rg(\pi) \neq 0 \Leftrightarrow 1 \in Sp(\pi)$.

En outre, pour tout $y \in \text{Ker}(u^*)$, $\pi(y) = 0$

Donc: $\exists y \in F$ tel que $\pi(y) = 0$ avec $y \neq 0$

Donc $Sp(\pi) = \{0,1\}$

Donc il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est une concaténation de $\text{Im}(\pi)$ et $\text{Ker}(\pi)$ tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots 1 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $Tr(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi)) = Rg(u)$

Or On a à un changement de base près :
$Tr(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi)) = Tr(Q)$ car $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Tr(AB) = Tr(BA)$

Donc $\boxed{Rg(u) = Tr(Q)}$

Q9 On procède par double inclusion.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $rg(A) = p$

~~Donc $Tr(Q) = rg(u) = p$~~

On a :

$$\underbrace{{}^tAA}_{=M}X = 0 \Rightarrow {}^tX\,{}^tAAX = 0$$
$$\Leftrightarrow \langle AX, AX \rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow AX = 0$$
$$\Leftrightarrow X \in Ker(A)$$

Or $Rg(A)$ donc par théorème du rang :
$\dim(Ker(A)) = 0$

Donc
${}^tAAX = 0 \Rightarrow X = 0$

Donc ~~M est injective~~ $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto MX \end{cases}$

est injective donc bijective par corollaire du théorème du rang. Donc M est inversible

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose M inversible. On a :

$$Rg(A) = Tr(Q) = Tr(({}^tAA)^{-1} Q ({}^tAA)) \text{ cf Q 8.a)}$$
$$= Tr(({}^tAA)^{-1}\,{}^tAA)$$
$$= Tr(I_p)$$
$$= p$$

Ainsi :

$$\boxed{M \text{ est inversible} \iff Rg(A) = p}$$

Q 10 10.a) On a :

$Rg(A) = p \iff M$ inversible

~~$\iff A$ inversible~~

$$AM^{-1}\,{}^tA = A\,({}^tAA)^{-1}\,{}^tA = A\,({}^tAQA)^{-1}\,{}^tAQ$$

On admet

10.b) On propose :

~~def Calcule_Q (A):~~
~~if al.matrix_rank (A) == p :~~
~~return (np.dot (A, np.dot (al.inv~~

```
# Les bibliothèques sont déjà chargées dans l'énoncé
def Calcule_Q (A):
    M= np.dot(np.transpose(A), A)
    M_inv = al.inv (M)
    if al.matrix_rank(A) == p :
        return (np.dot(A, np.dot(M_inv, np.transpose (A))))
    else :
        return "erreur"
```

Q11 On a :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX \underbrace{{}^tAA}_{=M} X = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2 \geq 0$$

Q12 Soit $(X, H) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\|A(X+H) - Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\|AX - Y + AH\|^2 - \|AX - Y\|^2\right]$$

identité de polarisation

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{\|AX-Y\|^2} + \|AH\|^2 + 2\langle AX-Y, AH\rangle - \cancel{\|AX-Y\|^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}{}^tH\,{}^tAAH + \langle AX - Y, AH\rangle$$

$$= \frac{1}{2}{}^tHMH + {}^tH\,{}^tA(AX - Y)$$

$$= \frac{1}{2}{}^tHMH + {}^tH(MX - {}^tAY)$$

$$\boxed{J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}{}^tHMH + \langle D(X), H\rangle}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q13 Pour alléger les notations :
Par Q11 on a :

Soit X_0 un vecteur propre associé à M et λ la valeur propre associée. On a alors:

$$0 \leq {}^tX_0 M X_0 = \lambda \, {}^tX_0 X_0 = \lambda \underbrace{\|X_0\|^2}_{\geq 0}$$

Ainsi on note:

$q_M : X \mapsto {}^tXMX = \langle X, MX \rangle$ la forme quadratique associée à M.

Ainsi on a:

$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ q_M(X) \geq 0 \iff Sp(M) \subseteq \mathbb{R}_+$.

En assimilant $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ on a que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est un ouvert convexe (convexe car espace vectoriel et on a par stabilité de la combinaison linéaire de tout espace vectoriel que tout espace vectoriel est convexe).

On a donc puisque $Sp(M) \subseteq \mathbb{R}_+$:

inutile ⊗

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $D(X) = 0$

On a:

$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2} {}^tHMH \geq 0$

Donc :

$\forall K \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad J_0(K) \geq J_0(X)$

Donc X est le minimum global de J_0.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose : $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \ J_0(H) \geq J_0(X)$

Donc : $\langle D(X), H \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} {}^tHMH}_{\geq 0} \geq 0$

Donc $\langle D(X), H \rangle \geq 0$

Donc $\langle (MX - {}^tAY), H \rangle \geq 0$

Donc $\langle MX, H \rangle \geq \langle {}^tAY, H \rangle$

Donc ${}^tX {}^tAAH \geq {}^tYAH$

On admet

Q14

On admet

Q15 15a) On a :

$0 = D(X) = MX - {}^tAY$. On a donc $MX = {}^tAY = ({}^tAQ)Y$

donc : ${}^tAAX = {}^tAQY$

donc ${}^tX\,{}^tAAX = {}^tX\,{}^tAQY$

donc $\|AX\|^2 = \langle AX, QY \rangle$

On admet

15.b) ~~On a par Q14 :~~

~~$X_0 \in \mathrm{Ker}(A)^\perp \Rightarrow \begin{cases} X_0 \in \mathrm{Ker}(A)^\perp \\ X - X_0 \in \mathrm{Ker}(A) \end{cases}$~~

On a :

$\begin{cases} X_0 \in \mathrm{Ker}(A)^\perp \quad \text{et} \quad AX = QY \\ \text{et } X_0 \in \mathcal{S}_0 \end{cases}$

Donc ${}^tAAX = {}^tAY$ donc ${}^tAQY = {}^tAY$

Q15.a)

Copie anonyme - n°anonymat : 980545

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 22	**Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Q15.c) On a M inversible. Donc on a :

$\forall X \in S_0, \quad D(X) = 0$ i.e. $MX = {}^tAY$

On a donc :

$X = M^{-1}\,{}^tAY$

$\boxed{\text{Ainsi } S_0 = \{X\} \text{ avec } X = M^{-1}\,{}^tAY}$

Q16 16.a) On a :

$$T = \|AX - AV_0\|^2 = \|QY - Y + Z\|^2$$

$X \in S_0$ donc par Q15.a), $AX = QY$

On admet

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

16.b) On propose :

```
# Les bibliothèques sont déjà chargées par l'énoncé.
def simuleT(A, sigma):
    Z = Rd.normal(0, sigma, np.shape(A)[0])
    Q = Calcule_Q(A)        # on utilise la question 10.b)
    return (np.dot(Z, np.dot(Q, Z)))
# Pas besoin de transposer Z puisque Z est compris
  comme matrice colonne ou ligne par Python.
```

16.c) On constate une erreur. Le nom de la fonction devrait être esperanceT, au vu du test entre Q16.d) et Q16.e). On a donc :

~~def esperanceT(A, sigma):~~
~~p = np.shape(A)[0]~~
~~Retour = 0 # compteur~~
~~for i in range(10000):~~
~~T = simuleT(A, sigma)~~

```
def esperanceT(A, sigma):
    p = np.shape(A)[0]
    T = np.array([simuleT(A, sigma) for i in range 10 000])
    return ((np.sum(T)) / 10 000)
```

16.d) On conjecture que :

$$\mathbb{E}(T)\left(=\sum_{\lambda\in Sp(A)} \dim(Ker(A-\lambda I_p))\right)=Rg(A)$$

En effet, $Rg(A_1)=2$, $Rg(A_2)=3$ et $rg(A_3)=5$

Puis on conjecture que $\mathbb{E}[T] = Rg(A_1)$ $\xrightarrow{}$ pour $A=A_1$

16.e) On a :

$$\mathbb{E}[Z_1^2] = V(Z_1)+\mathbb{E}[Z_1]^2$$
$$= \sigma^2$$

$$\mathbb{E}[Z_1^3] \underset{\text{théorème de transfert } (x\mapsto x^3\ \mathcal{C}^0(\mathbb{R}))}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx \underset{\text{imparité de l'intégrande}}{=} 0$$

$$\mathbb{E}[Z_1^4] \underset{\text{théorème de transfert } (x\mapsto x^4 \text{ est } \mathcal{C}^0(\mathbb{R}))}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx \underset{\text{parité de l'intégrande}}{=} \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^4 e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} dx$$

Or l'intégrande est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale est définie et la fonction $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2}\frac{x^2}{2}$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$

On a donc par un changement de variable licite $u=\frac{x}{\sqrt{2}^2\sigma^2}$

$$\mathbb{E}[Z_1^4] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{2}\, u^2 \sigma e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1\cdot\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} u^{\frac{5}{2}-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \cdot \qquad \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{36}{\cancel{\sqrt{\pi}}\,2}\cdot\cancel{\sqrt{\pi}}$$

Donc $\mathbb{E}[Z_1^4] = \frac{3}{2}\sigma$

Q16.f) On a :

$$T_1 + 2T_2 = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\, z_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j}\, z_i z_j$$

Or on a :

$$\cancel{T = \|QZ\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\, Z_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} Q_i\, z_i^2}$$

$$T = \|QZ\|^2 = {}^t z\, {}^tQ\, Q z = \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i z_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2 + 2\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]\\ i<j}} Q_{i,j}\, z_i z_j$$

$$\boxed{\text{Donc } T = T_1 + 2T_2}$$

Donc :

$$E[T] = E[T_1] + 2E(T_2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} E[z_i^2] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j}\, E(z_i z_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\sigma^2 + 0$$

z_i est indépendante de z_j si $i \neq j$

$$\boxed{E[T] = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\sigma^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 980545

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 22	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Q16.g) On a :

$$E[T_1 T_2] = E\left[\sum_{(k,i)\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=i+1}^{n} Q_{k,k} Q_{i,j} z_k^2 z_i z_j\right]$$

indépendance $\Leftrightarrow$

$$= E\left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} Q_{k,k} Q_{k,j} z_k^2 z_k z_j\right]$$

indépendance car $k<j$ $\Leftrightarrow$ $= 0$

Donc $E[T_1 T_2] = 0$

Q16.h) On a :

$$E[T_1^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[z_i^4] Q_{i,i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} E[z_i] E[z_j] Q_{i,i} Q_{j,j}$$

$$= 9\frac{3}{2}6 + 2 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q 16) i)

T est une variable aléatoire admettant une espérance et est positive (Q 16.a) $\|QZ\|^2 \geq 0$) Donc par inégalité de Markov :

$$\forall \beta > 0, \quad \mathbb{P}(T > \beta) \leq \frac{E(T)}{\beta}$$

On pose $\beta = (1+\alpha)\rho\sigma^2$. On a :

$$\mathbb{P}(T > (1+\alpha)\sigma^2\rho) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\sigma^2}{(1+\alpha)\rho\sigma^2}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 980545

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 22

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Q 23.d) Python

i)

```
def FoncSom(alpha, Y, lda):        # on suppose alpha une liste
    F = np.array([(alpha[i]**2 * Y[i]**2)/(lda + alpha[i]**2)
          **2 for i in range (1, len(alpha)+1)])
    Return (np.sum(F) -1)
```

23. d) ii)

```
def CalcBeta(alpha, Y, epsilon):
    a , b = 0 , (1/4)* np.sum(np.array([Y[i]**2 for i in range
                                   (1, len(alpha)+1)]))
    ~~c=0~~
    while (b - a) / 2 > eps:
        c = (a+b) /2
        if FoncSom(alpha, Y, c) * FoncSom(alpha, Y, a):
            b = c
        else :
            a = c
    Return ((a+b) /2)
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

23. d. iii) On a:

~~def CalcSolution(alpha, y, epsilon):~~
~~— B = np.zeros(np.shape(y)[0])~~
~~— for i in range (len(alpha), np.shape(y)[0].~~
~~— — B[i] = alpha[i]~~

```
def CalcSolution(alpha, y, epsilon):
    n = np.shape(y)[0]
    B = np.zeros(n)
    for i in range(len(alpha)):
        B[i] = alpha[i]
    V = np.zeros(n)
    for i in range(len(alpha)):
        V[i] = (alpha[i] * y[i]) \ (CalcBeta(alpha, y, epsilon) +
                     alpha[i] ** 2)
    return y - np.dot(B, V)
```

/