Copie anonyme - n°anonymat : 693578

V9-00108
693578
Mat2 Appro

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 27 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Première partie

1a) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

donc X_i admet un moment d'ordre 2 car $V(X_i)$ existe

c.à.d $E(X_i^2)$ existe.

donc par somme, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ admet une espérance.

et $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$ par linéarité de l'espérance.

or, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $V(X_i) = 1$ et $E(X_i) = 0$.

donc d'après la formule de Koenig-Huyghens,

$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$

ie $E(X_i^2) = 1$.

donc finalement, $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} 1$

$= n$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1b)
```
def simul(n):
    s=0
    for i in range(n):
        s+=(rd.normal(0,1))**2   # on rajoute une simulation d'une loi normale centrée réduite au carré
    return s
```

1c) On peut conjecturer qu'elle diverge puisque l'écart entre $\overline{S_n} = \frac{1}{n} S_n$ et n^2 augmente à mesure que n augmente. Or $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

2a) $W_1 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} X_1^2$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(W_1 \leq x) = \mathbb{P}(\frac{1}{2} X_1^2 \leq x)$

- si $x < 0$, $\mathbb{P}(\frac{1}{2} X_1^2 \leq x) = 0 = \mathbb{P}(W_1 \leq x)$

- si $x \geq 0$, $\mathbb{P}(W_1 \leq x) = \mathbb{P}(\frac{1}{2} X_1^2 \leq x)$

$= \mathbb{P}(X_1^2 \leq 2x)$ car $2>0$

$= \mathbb{P}(|X_1| \leq \sqrt{2x})$

$= \mathbb{P}(-\sqrt{2x} \leq X_1 \leq \sqrt{2x})$

$= \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x})$

$= 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ où F_{W_1} est la fonction de répartition de W_1.

- $F_{W_1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

- $\sqrt{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\Phi(Y) \xrightarrow[Y\to+\infty]{} 1$

donc $F_{W_1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2\times 1 - 1 = 1$ par composition

• $\sqrt{2x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

et $\Phi(Y) \xrightarrow[Y \to 0]{} \frac{1}{2}$

donc par continuité de Φ en 0,

$$F_{W_1}(0) = 2\Phi(0) - 1$$
$$= 0$$
$$= \lim_{x \to 0^-} F_{W_1}(x)$$

donc F_{W_1} est C^0 en 0, C^0 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par composition de fonctions qui le sont.

donc F_{W_1} est C^0 sur $\mathbb{R}$.

et F_{W_1} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 car $x \mapsto \sqrt{2x}$ l'est sur $\mathbb{R}_+^*$

et $x \mapsto \Phi(x)$ l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ . .

et finalement, $x \mapsto \sqrt{2x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$
et $u \mapsto \Phi(u)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$
donc F_{W_1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$ par composition

donc $\forall x \geq 0$, $F_{W_1}(x) \geq F_{W_1}(0) = 0$

donc F_{W_1} est croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, on a montré que W_1 était bien une variable aléatoire réelle à densité.

~~et $\forall x \geq 0$~~, F_{W_1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\cancel{F_{W_1}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$F_{W_1}'(x) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} \Phi'(\sqrt{2x})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2x})^2/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x}$$

$\Rightarrow$ une densité de W_1 est donnée par f_{W_1} telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

2b) L'énoncé nous a rappelé que $\Gamma(\frac{1}{2})$ existe et :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

or f_{W_1} est une densité de W_1, donc :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{W_1}(x)\,dx$ converge et vaut 1.

càd $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx = 1$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi}$

càd $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

2c) Raisonnons par récurrence et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :
$P(n)$: « $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ ».

Initialisation : $n = 1$

une densité de la loi gamma de paramètre $\frac{1}{2}$ est donnée par :

$$f_{\gamma(\frac{1}{2})} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-1/2} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

$= f_{W_1}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

Ainsi, $W_1 \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$

donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$, montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$

et $W_{n+1} = W_n + \frac{1}{2} X_{n+1}^2$

or, les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants et suivent tous une même loi normale centrée réduite.

on en déduit que $\frac{1}{2} X_{n+1}^2$ suit la même loi que $\frac{1}{2} X_1^2 = W_1$

càd $\frac{1}{2} X_{n+1}^2 \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$

et comme $W_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, le lemme des coalitions assure que

W_n et $\frac{1}{2} X_{n+1}^2$ sont indépendantes.

et par stabilité des lois gammas indépendantes,

$W_{n+1} = W_n + \frac{1}{2} X_{n+1}^2 \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})$

càd $W_{n+1} \hookrightarrow \gamma(\frac{n+1}{2})$

donc $P(n+1)$ est vraie

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

2d) Ainsi, soit $n \in \mathbb{N}^*$ comme S_n admet une espérance, alors W_n également

et $E(W_n) = \frac{1}{2} E(S_n)$ par linéarité de l'espérance

or $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ donc $E(W_n) = \frac{n}{2}$

ainsi, $\frac{n}{2} = \frac{1}{2} E(S_n)$

càd $E(S_n) = n$, ce qui coïncide avec le résultat de la question 1 a)

Et comme $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, W_n admet une variance, donc S_n également et :

$V(W_n) = \frac{n}{2}$

donc $V(W_n) = V\left(\frac{1}{2} S_n\right)$

donc $\frac{n}{2} = \frac{1}{4} V(S_n)$

donc $V(S_n) = 2n$

3a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tq. $n \geq 3$,

$W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

une densité de W_n est : $f_{W_n} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

et le théorème de transfert assure que :

$\frac{1}{W_n}$ admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{x} f_{W_n}(x)\right| dx$ converge

ssi $\int_{0}^{+\infty} \left|\frac{1}{x} f_{W_n}(x)\right| dx$ converge car f_{W_n} est nulle sur $\mathbb{R}_-$

ssi $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x} f_{W_n}(x)\, dx$ converge car $x \mapsto \frac{f_{W_n}(x)}{x}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad \frac{1}{x} f_{W_n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-2} e^{-x}$

or, $\int_{0}^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-2} e^{-x}\, dx$ converge et vaut $\Gamma(\frac{n}{2}-1)$

ssi $\frac{n}{2} - 1 > 0$

ssi $\frac{n-2}{2} > 0$

ssi $n - 2 > 0$

or $n \geq 3$, donc $n - 2 > 0$

Ainsi, $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-2} e^{-x}}{\Gamma(\frac{n}{2})} dx$ converge

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{x} f_{W_n}(x)\right| dx$ converge

donc $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance, $\forall n \geq 3$.

et $\mathbb{E}(\frac{1}{W_n}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-2} e^{-x} dx$

$= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{0}^{+\infty} x^{(\frac{n}{2}-1)-1} e^{-x} dx$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

De plus, $\forall n \geq 3$,

$S_n = 2W_n$

donc $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{2W_n}$

donc $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance et :

$E\left(\frac{1}{S_n}\right) = E\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{W_n}\right)$

$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

or d'après l'énoncé, $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

donc $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)$

$= \frac{n-2}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)$

donc $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{n-2}$

$= \frac{1}{n-2}$

3 b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tq. $n \geq 3$.

montrons que $\frac{1}{\sqrt{W_n}}$ admet une espérance :

Copie anonyme - n°anonymat : 693578

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 27	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$\frac{1}{\sqrt{W_n}}$ admet une espérance ssi $\int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{x}} f_{W_n}(x) \right| dx$ converge

ssi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-x} dx$ converge.

or, $\frac{n-1}{2} > 0$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} x^{\frac{n-1}{2}} e^{-x} dx$ converge.

donc $\frac{1}{\sqrt{W_n}}$ admet une espérance

or $\frac{1}{\sqrt{W_n}} = \sqrt{\frac{2}{S_n}} = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{S_n}}$

Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une espérance

5) Déjà, soit $n \geq 3$, $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une espérance.

et Y est indépendante des $(X_k)_{k \geq 1}$. Donc le lemme des coalitions assure que Y et $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes.

donc $E\left(Y \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe et :

$$E\left(Y \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\right) = \sqrt{n} E(Y) E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$$

Or, $E(Y) = 0$ car $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\mathbb{E}\left(Y \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\right) = 0$

Ainsi, on a montré que $\forall n \geq 3$, $\mathbb{E}(T_n)$ existe et :

$\mathbb{E}(T_n) = 0$

5b) De la même manière qu'à la question 5a), $\forall n \geq 3$,

$\mathbb{E}(T_n^2)$ existe et :

$$\mathbb{E}(T_n^2) = \underbrace{\mathbb{E}(Y^2)}_{=1\ (1a)} \mathbb{E}\left(\frac{n}{S_n}\right)$$

$$= n\,\mathbb{E}(S_n) \times 1$$

$$= \frac{n}{n-2}$$

et d'après la formule de Koenig-Huyggens,

$$V(T_n) = \mathbb{E}(T_n^2) - \mathbb{E}(T_n)^2$$

$$= \frac{n}{n-2}$$

5c) Soit $n \geq 3$, $(T_n - Y)^2 = T_n^2 + Y^2 - 2T_nY$

$$= T_n^2 + Y^2 - \frac{2Y^2\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}$$

Y^2 et T_n^2 admettent une espérance
et comme à la 5a et 5b), $\frac{Y^2\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}$ admet également une espérance.

donc par somme, $(T_n - Y)^2$ admet une espérance, et par linéarité de celle-ci,

$$\mathbb{E}((T_n - Y)^2) = \mathbb{E}(T_n^2) + \mathbb{E}(Y^2) - 2\,\mathbb{E}\left(\frac{Y^2\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\right)$$

$$= \frac{n}{n-2} + 1 - 2\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left(\frac{Y^2}{\sqrt{S_n}}\right)$$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n} \times \mathbb{E}\left(Y^2 \times \sqrt{\frac{2}{S_n}}\right)$$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\ \mathbb{E}(Y^2)\ \mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{2}{S_n}}\right)$$ par indépendance

$$\boxed{= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) \text{ (cf. 3b)}}$$

6a) Déjà, en utilisant un raisonnement analogue à la 3b,

on trouve que $\frac{1}{\sqrt{W_2}}$ admet une espérance $\left(\int_0^{+\infty} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-x} dx \text{ converge ssi } \frac{n-1}{2} > 0 \text{ ssi } n \geq 2\right)$ Ⓐ

et Soit $n \geq 2$, $\frac{1}{\sqrt{W_n}} - \frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} = \frac{\sqrt{W_{n+1}} - \sqrt{W_n}}{\sqrt{W_n}\sqrt{W_{n+1}}}$

$(W_n)_{n\geq 1}$ est croissante par somme de termes positifs.
donc par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$,

$\sqrt{W_{n+1}} - \sqrt{W_n} \geq 0$ donc $\frac{1}{\sqrt{W_n}} - \frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} \geq 0$.

donc par croissance de l'espérance, comme $\frac{1}{\sqrt{W_n}}$ et $\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}$ admettent une espérance, $\frac{1}{\sqrt{W_n}} - \frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}$ également et :
$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}} - \frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) \geq 0$

c.a.d $U_n \geq U_{n+1}$ par linéarité de l'espérance

donc $(U_n)_{n\geq 2}$ est décroissante

et d'après ce qu'on a fait à la 3b),

$U_2 = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right)$

$\cancel{\frac{1}{\sqrt{W_2}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{2})} x}$

$\forall n \geq 2$, d'après Ⓐ, $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-x} dx$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Et d'après le théorème de transfert,

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{2})} \times x^{\frac{2}{2}-1} e^{-x}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{2})} x^{-1/2} e^{-x} dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(1)}}_{=1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow U_2 = \sqrt{\pi}$$

6-b) Soit $n \geq 2$,

$$U_{n+1} \times U_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n+1-1}{2}-1} e^{-x} dx \quad (\text{cf. } 3\text{-b})$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

$$\text{et } E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-x} dx \quad (\text{cf. } 3\text{-b})$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$\text{donc } U_n \times U_{n+1} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)} \times \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{(\frac{n-1}{2})\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} = \frac{2}{n-1}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 693578

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 27 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6c) $\forall n \geq 2, \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = U_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

d'où le programme d'après la 6b comme $U_{n+1} = \dfrac{2}{n-1} \times \dfrac{1}{U_n}$,

```
def suite_u(n):
    u= (np.pi) ** (1/2)     # u2= √π
    L= [u]
    for i in range(2, n):
        u= (2/(i-1)) * u
        L.append(u)
    return u
```

6d) ~~$(U_n^2)_{n\geq 2}$ semble converger vers 2.~~
~~donc $(U_n)_{n\geq 2}$ doit converger vers $\sqrt{2}$~~

$(U_n)_{n\geq 2}$ semble converger

6e) Soit $n \geq 2$,

On admet

7) Soit $\varepsilon > 0$,

$\mathbb{P}(|T_n - Y| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((T_n - Y)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \dfrac{\mathbb{E}((T_n - Y)^2)}{\varepsilon^2}$ d'après l'inégalité de Markov car $(T_n - Y)^2$ est positive

$\mathbb{E}((T_n - Y)^2) = \dfrac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, U_n$

$\sqrt{2n}\, U_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}\sqrt{\dfrac{2}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$

et $\frac{2n-2}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

donc $E\left((T_n - Y)^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underline{2-2=0}$

donc $\forall \varepsilon > 0$,

$$0 \leq P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) \leq \underbrace{\frac{E\left((T_n - Y)^2\right)}{\varepsilon^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

donc par encadrement, $\forall \varepsilon > 0$, $P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

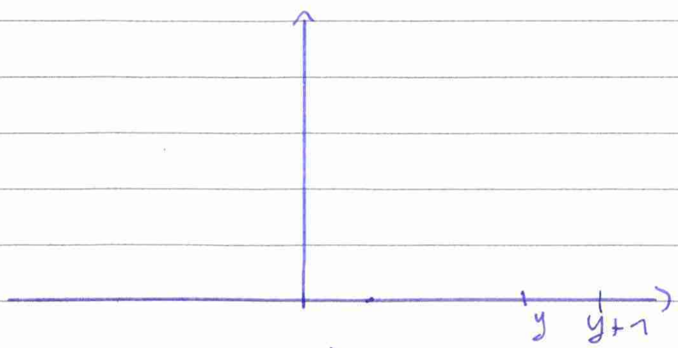
donc $T_n \xrightarrow{P} Y$

<u>deuxième partie</u>

8) si $a = 2$ et $b = 1$,

$$\mathcal{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 2 \text{ et } x-y \leq 1 \right\}$$
$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 2 \text{ et } x \leq y+1 \right\}$$

dessinons $\mathcal{D}_y = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq y+1 \right\}$



$\times$ <u>on admet</u>

9a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y tq. $y \geq d$.

si $(x,y) \in \mathcal{A}$, alors:

$x+y \leq a$ et $x-y \leq b$

donc $x \leq a-y$.

donc $x \in]-\infty, a-y]$

si $x \in]-\infty, a-y]$,

$x \leq a-y$

donc $x+y \leq a$.

et $x-y \leq a-2y$

or $y \geq d$ donc $-2y \leq -2d = -(a-b)$
$= b-a$

donc $x-y \leq a-2y \leq a-2d$
$\leq a+b-a$
$\leq b$

donc $(x,y) \in \mathcal{A}$.

d'où l'équivalence.

9b) Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq d$,

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in \mathcal{A} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]-\infty, a-y] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)\, \varphi(x)\, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)\, \varphi(x)\, dx$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a-y} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)}_{=1} \varphi(x)\, dx + \int_{a-y}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)}_{=0} \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{a-y} \varphi(x)\, dx + 0$$

$$= \Phi(a-y) \text{ par définition.}$$

10) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq. $y \leq d$.

montrons que $(x,y) \in \mathcal{A}$ ssi $x \in]-\infty, b+y]$.

- si $(x,y) \in \mathcal{A}$, alors $x - y \leq b$
  donc $x \leq b+y$
  ie $x \in]-\infty, b+y]$

- si $x \in]-\infty, b+y]$,

  $x \leq b+y$
  donc $x-y \leq b$

  et $x+y \leq b+2y \leq b+2d$
  $\leq b + \frac{2(a+b)}{2}$
  $\leq a$

  donc $(x,y) \in \mathcal{A}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 693578

Emplacement QR Code			
	Code épreuve : 283	**Nombre de pages :**	**Session :** 2025
	Épreuve de : Mathématiques approfondies ESCP BS / HEC Paris		
	Consignes	• *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer* • *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir* • *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)* • *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)* • *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*	

Et ainsi, $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x > b+y \\ 1 \text{ si } x \in]-\infty, b+y] \end{cases}$

donc, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{b+y} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)}_{=1} \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)}_{=0} \varphi(x) dx$

$$= \int_{-\infty}^{b+y} \varphi(x)\, dx$$

$$\boxed{= \Phi(b+y)}$$

11a) • $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq a\}$ est un fermé

• $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y \leq b\}$ est un fermé.

donc $\mathcal{A}$ étant une intersection de A_1 et A_2, $\mathcal{A}$ est une intersection de fermés. Donc $\mathcal{A}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$

11b) X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même densité φ.
et $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

donc d'après le théorème admis,

$$P((X,Y) \in \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)\, \varphi(x)\, dx \right) \varphi(y) dy$$

<u>On admet</u>

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

12) $\mathbb{P}((X,Y)\in\mathcal{A}) = \int_0^{+\infty} (\varphi(d+y) + \varphi(d-y))\, \Phi(c-y)\, dy$

or, $\Phi(c-y) = \int_{-\infty}^{c-y} \varphi(u)\, du$

en posant le changement de variable affine

$u = t-y$

$t = u+y$

$dt = du$

$t \mapsto t-y$ $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement croissante de $]-\infty, c]$ dans $]-\infty, c-y]$

$\Phi(c-y) = \int_{-\infty}^{c} \varphi(t-y)\, dt$

donc $\mathbb{P}((X,Y)\in\mathcal{A}) = \int_0^{+\infty} (\varphi(d+y)+\varphi(d-y))\, \Phi(c-y)\, dy$

$= \int_0^{+\infty} (\varphi(d+y) + \varphi(d-y)) \int_{-\infty}^{c} \varphi(t-y)\, dt$

$= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{c} (\varphi(d+y) + \varphi(d-y))\, \varphi(t-y)\, dt \right) dy$

13) Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$,

$\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) \varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-(u+v)^2/4} e^{-(u-v)^2/4}$

$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{4}((u+v)^2+(u-v)^2)}$

$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{4}(2u^2+2v^2)}$

$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2}$$

$$\boxed{= \varphi(u)\,\varphi(v)}$$

1 4) Ainsi,

$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{c} \left(\int_0^{+\infty} \varphi(d+t\mathfrak{z})\,\varphi(t-\mathfrak{z}) + \varphi(d-\mathfrak{z})\,\varphi(t-\mathfrak{z})\,dt \right) d\mathfrak{z}$$

$$= \int_{-\infty}^{c} \left(\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right) \varphi\left(\frac{d-t+2\mathfrak{z}}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right) \varphi\left(\frac{d+t-2\mathfrak{z}}{\sqrt{2}}\right) d\mathfrak{z} \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{c} \left(\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right) \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+2\mathfrak{z}-t}{\sqrt{2}}\right) d\mathfrak{z} \right) dt + \int_{-\infty}^{c} \left(\varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right) \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+t-2\mathfrak{z}}{\sqrt{2}}\right) d\mathfrak{z} \right) dt$$

• calculons: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,\mathfrak{z}\right) d\mathfrak{z}$

posons $u = \dfrac{d-t}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,\mathfrak{z}$, $\quad \mathfrak{z} = \left(u + \dfrac{t-d}{\sqrt{2}}\right) \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$d\mathfrak{z} = \frac{du}{\sqrt{2}}$$

$u \mapsto \left(u + \dfrac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement croissante de $\left[\dfrac{d-t}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ dans $[0, +\infty[$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,\mathfrak{z}\right) d\mathfrak{z} = \int_{\frac{d-t}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \varphi(u)\,\frac{du}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \Phi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)$$

Par un raisonnement analogue, on a :

$$\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+t-2y}{\sqrt{2}}\right) dy = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}y\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{d+t}{2}} \varphi(u)\, du \quad \text{en posant } u = \frac{d+t}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)$$

Ainsi, $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \int_{-\infty}^{c} \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) dt + \int_{-\infty}^{c} \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) dt$

par relation de Chasles avec des intégrales convergentes, $= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{c} \left[\varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)\right] dt$

16) Ainsi, $\frac{c+d}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $\frac{c-d}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$

donc $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

En admettant que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ suivent une loi normale centrée réduite,

On a : $\forall\ b \in \mathbb{R}^2$, $(X+Y \leq b \wedge X+Y \leq b)$

$$= \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \leq \frac{b}{\sqrt{2}} \wedge \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \leq \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

donc avec A pris pour $a = b$,

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \mathbb{P}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \leq \frac{b}{\sqrt{2}} \wedge \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \leq \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

et $\mathbb{P}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \leq \frac{b}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{P}\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}} \leq \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2$

donc $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ sont bien indépendantes.

Copie anonyme - n°anonymat : 693578

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 27	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

17a) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tq. $x = (x_1, \dots, x_n)$

$(a_1, \dots, a_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Donc :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k$$

Ainsi, $$\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k - \langle x, a_1 \rangle a_1$$

$$= x - \langle x, a_1 \rangle a_1$$

$$\langle x, a_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{(a_1)_i}_{=1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

donc $$\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k = (x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i (1, \dots, 1)$$

$$= (x_1, \dots, x_n) - \bar{x} (1, \dots, 1)$$

$$= (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})$$

17b) Ainsi, $$\left\langle \sum_{k=2}^{n} \langle a_k, x \rangle a_k ; \sum_{i=2}^{n} \langle a_i, x \rangle a_i \right\rangle = \langle (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x} ; (x_1 - \bar{x}, \dots) \rangle$$

donc $$\sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} \langle a_k, x \rangle \langle a_i, x \rangle \underbrace{\langle a_k, a_i \rangle}_{= \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \\ 1 \text{ si } k = i \end{cases}} = (x_1 - \bar{x}; \dots; x_n - \bar{x}) \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix}$$

car $(a_1, \dots, a_n)$ est une base orthonormée

donc $$\sum_{k=2}^{n} \langle a_k, x \rangle^2 \langle a_k, a_k \rangle + 0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

donc $$\sum_{k=2}^{n} \langle a_k, x \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

18 a) En prenant $n=2$,

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$X = (X_1, X_2)$ un couple de variable aléatoire indépendantes suivant chacune la loi normale centrée réduite.

et $\langle X, a_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$ est une loi normale centrée réduite

d'après le théorème de Cochran.

En prenant $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$

(a_1, a_2) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$:

$\langle a_1, a_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times (1 \times 1 + 1 \times (-1))$

$= 0$

$\Rightarrow$ (a_1, a_2) est orthogonale de $\mathbb{R}^2$ avec aucun de ses vecteurs nuls

$\Rightarrow$ c'est une base de $\mathbb{R}^2$

et $\|a_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+1^2} = 1$

et $\|a_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+(-1)^2} = 1$

donc (a_1, a_2) est bien une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$

et le théorème de Cochran assure que :

$\langle X, a_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$ est une loi normale centrée réduite.

Enfin, le théorème assure que $\langle X, a_1 \rangle$ et $\langle X, a_2 \rangle$ sont indépendantes

càd $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$ sont indépendantes

On retrouve bien le résultat de la partie 2.

18 b) Soit $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

si $R_1 = X_1 + X_2$ et $R_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ sont indépendantes.

alors $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$ d'après le cours

et si $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$,

alors $\text{cov}(X_1 + X_2, \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2) = 0$

donc par bilinéarité de la covariance,

$\beta_1 \text{cov}(X_1, X_1) + \beta_2 \text{cov}(X_1, X_2) + \beta_1 \text{cov}(X_2, X_1) + \beta_2 \text{cov}(X_2, X_2)$

or X_1 et X_2 sont indépendantes donc $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$
et $\text{cov}(X_1, X_1) = \text{cov}(X_2, X_2) = V(X_1) = V(X_2) = 1$.

donc $\beta_1 + \beta_2 = 0$
donc $\beta_1 = -\beta_2$

donc $R_2 = \beta_1 (X_1 - X_2)$

or $\dfrac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$ sont indépendantes

donc le lemme des coalitions assure que :

$R_1 = X_1 + X_2$ et $R_2 = \beta_1 (X_1 - X_2)$ sont indépendantes.

d'où l'équivalence.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

19a) Les $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$

donc par stabilité des lois normales indépendantes,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,n)$$

Et soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\overline{X} \leq x) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq nx)$

une densité de $\overline{X}$ est donc donnée par f définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, ~~$f(x) = n\,\varphi(nx)$~~

$$f(x) = n\, f_n(nx) \text{ où } f_n \text{ est une densité d'une loi } \mathcal{N}(0;n)$$

$$= \frac{n}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\left(\frac{nx}{\sqrt{n}}\right)^2/2}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{n}x)^2/2}$$

or, une densité d'une loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$ est définie par :

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{1}{n}}} e^{-\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^2/2} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{n}x)^2/2}$$

on en déduit que $\overline{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; \frac{1}{n})$

19b) $$U = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

En appliquant 17b) à $x = X$, on a : $\overline{x} = \overline{X}$

$$\text{donc } U = \sum_{b=2}^{n} \langle X, a_b \rangle^2$$

$$= \sum_{b=2}^{n} Y_b^2$$

Copie anonyme - n°anonymat : 693578

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 27

Session : 2023

Épreuve de : Mathematiques approfondies 2 ESCP BS / HEC Paris

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Et remarquons que : $\langle x, a_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$= \sqrt{n} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \sqrt{n}\ \overline{X}$$

donc $\overline{X} = \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\sqrt{n}}$

$$= \frac{Y_1}{\sqrt{n}}$$

19c) $\overline{X} = \frac{Y_1}{\sqrt{n}}$ et $U = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2$.

les $(Y_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.

Donc Y_1 est indépendante de $(Y_2, \_\_\_, Y_n)$

donc le lemme des coalitions assure que Y_1 est indépendante des $(Y_k^2)_{k \in [\![2,n]\!]}$

Ainsi, le lemme des coalitions assure que $\overline{X} = \frac{Y_1}{\sqrt{n}}$ et $U = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2$ sont indépendantes

Et par cette même indépendance des $(Y_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$,

on déduit que $U = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2$ suit la même loi que $\sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2$.

Or $\sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2$ suit la loi $\chi^2(n-1)$

Ainsi, $U \hookrightarrow \chi^2(n-1)$

2°a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on admettra que par transformation affine,

$X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

~~D'après 1.7.b), en appliquant avec $x = Z$, alors $\bar{x} = \bar{Z}$~~

~~on a : $V = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2 = \sum_{k=2}^{n} \langle Z, a_k \rangle^2$~~

Remarquons que : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{n\sigma} \sum_{i=1}^{n} Z_i - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i - \mu \right)$$

$$= \frac{\bar{Z} - \mu}{\sigma}$$

Ainsi, $U = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Z_i - \mu}{\sigma} - \frac{\bar{Z} - \mu}{\sigma} \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2} (Z_i - \bar{Z})^2$$

$= \frac{1}{\sigma^2} V$

donc $V = \sigma^2 U$

2) b) Ainsi, comme par transformée affine,

$X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

alors d'après 1)), $U \hookrightarrow \chi^2(n-1)$
donc $\mathbb{E}(U)$ existe et
$\underline{\mathbb{E}(U) = n-1}$

Donc $\mathbb{E}(V)$ existe et donc $\mathbb{E}(\frac{1}{n-1} V)$ existe et :

$\frac{1}{n-1} V = \frac{\sigma^2 U}{n-1}$

donc $\frac{1}{n-1} \mathbb{E}(V) = \frac{\sigma^2}{n-1} \mathbb{E}(U)$ par linéarité de l'espérance

donc $\mathbb{E}(\frac{V}{n-1}) = \sigma^2$

donc $\frac{1}{n-1} V$ est un estimateur sans biais de σ^2.

<u>Suite questions non abouties :</u>

11 b) On avait montré (désolé pour le renvoi) que :

$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y) \varphi(x) dx \right) \varphi(y) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{d} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y) \varphi(x) dx \right) \varphi(y) dy$$
$$+ \int_{d}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y) \varphi(x) dx \right) \varphi(y) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{d} \underbrace{\Phi(a-y)}_{y \leq d} \varphi(y) dy + \int_{d}^{+\infty} \underbrace{\Phi(b+y)}_{y \geq d} \varphi(y) dy$$

<u>Non abouti par manque de temps mais il faut effectuer un changement de variable</u>

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751