Copie anonyme - n°anonymat : 693578

V9-00108
693578
Mat Appro

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 20 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I :

1) Déjà, $\ell : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

• si ℓ est nulle, alors $\forall x \in E$, $\ell(x) = 0$
et soit $a_0 \in E$ tel que $\forall x \in E$, $\langle a_0, x \rangle_E = 0$

alors $a_0 \perp E$, donc $a_0 = 0_E$

la réciproque est vraie : si $a_0 = 0_E$, $\forall x \in E$, $\ell(x) = \langle a_0, x \rangle_E = 0$

donc si ℓ est nulle, $\exists! a_0 \in E \mid \forall x \in E$, $\ell(x) = \langle a_0, x \rangle_E$

• si ℓ est non nulle, raisonnons par analyse synthèse, et supposons qu'il existe $a_0 \in E$ tq. $\forall x \in E$, $\ell(x) = \langle a_0, x \rangle_E$

alors $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\ell(e_i) = \langle a_0, e_i \rangle_E$

or $(e_1, \_, e_p)$ est une base orthonormée de E.

donc $\langle a_0, e_i \rangle_E = \left(\text{mat}_{\mathcal{B}_E}(a_0)\right)_i$

Ainsi, $\text{mat}_{\mathcal{B}_E}(a_0) = \left(\ell(e_i)\right)_{i \in [\![1, p]\!]}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ce qui donne l'unicité.

et par synthèse, en prenant $a_0 = \sum_{k=1}^{p} \ell(e_k) e_k$,

~~$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$~~

$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \langle a_0, e_i \rangle_E = \sum_{k=1}^{p} \ell(e_k) \langle e_k, e_i \rangle$

$= 0 + \ell(e_i) \langle e_i, e_i \rangle$ car $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée

$= \ell(e_i)$

Ainsi, $\forall x \in E, \quad x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$

donc $\langle a_0, x \rangle_E = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \ell(e_i) x_j \langle e_i, e_j \rangle$

$= \sum_{i=1}^{p} x_i \ell(e_i) \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{=1}$

$= \ell\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right)$ car ℓ est linéaire

$= \ell(x)$

D'où existence et unicité : $\exists! a_0 \in E \ / \ \forall x \in E, \ \ell(x) = \langle a_0, x \rangle_E$

2) Ainsi, Soit $y \in F$,

$u \in \mathcal{L}(E, F)$,

et posons $\ell_y : x \in E \mapsto \langle u(x) ; y \rangle_F$

$\ell_y \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

donc d'après 1),

il existe un unique $\mathcal{J}_y \in E$ tq. $\forall x \in E$,

$$\ell_y(x) = \langle \mathcal{J}_y, x \rangle_E$$

ie $\exists ! \mathcal{J}_y \in E$ tq. $\forall x \in E$,

$$\langle u(x), y \rangle_F = \langle \mathcal{J}_y, x \rangle_E$$

et ce, pour tout $y \in F$.

3) Soit $(y, a, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{R}$,

$$u^*(\lambda y + a) = \mathcal{J}_{\lambda y + a}$$

$\forall x \in E$, $\langle \mathcal{J}_{\lambda y + a}, x \rangle_E = \langle u(x), \lambda y + a \rangle_F$

$= \lambda \langle u(x), y \rangle_F + \langle u(x), a \rangle_F$ par bilinéarité de $\langle , \rangle_F$

$= \lambda \langle \mathcal{J}_y, x \rangle_E + \langle \mathcal{J}_a, x \rangle_E$ d'après 2)

donc $\forall x \in E$, $\langle \mathcal{J}_{\lambda y + a} - \lambda \mathcal{J}_y - \mathcal{J}_a, x \rangle = 0$ par bilinéarité

donc $\mathcal{J}_{\lambda y + a} - \lambda \mathcal{J}_y - \mathcal{J}_a \perp E$

et E est un sous espace vectoriel.

donc $\mathcal{J}_{\lambda y + a} - \lambda \mathcal{J}_y - \mathcal{J}_a \in E$

donc $\mathcal{J}_{\lambda y + a} - \lambda \mathcal{J}_y - \mathcal{J}_a = 0$

càd $\mathcal{J}_{\lambda y + a} = u^*(\lambda y + a) = \lambda \mathcal{J}_y + \mathcal{J}_a = \lambda u^*(y) + u^*(a)$

donc u^* est linéaire

4) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, soit $j \in [\![1, p]\!]$,

d'après la 3),

$$\langle e_j, u^*(f_i) \rangle_E = \langle u(e_j), f_i \rangle_F$$

or, $\langle e_j, u^*(f_i) \rangle_E = \left(\underset{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}{\text{mat}} (u^*) \right)_{i,j}$ car $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormée

et $\langle u(e_j), f_i \rangle_F = \left(\underset{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}{\text{mat}} (u) \right)_{j,i}$ car $(f_1, \ldots, f_n)$ est orthonormée.

$$\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \left(\underset{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}{\text{mat}} (u^*) \right)_{i,j} = \left(\underset{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}{\text{mat}} (u) \right)_{j,i}$$

$$= (A)_{j\,i}$$

$$= ({}^tA)_{ij}$$

donc $\left(\underset{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}{\text{mat}} (u^*) \right) = {}^tA$

et : $rg(u^*) = rg({}^tA) = rg(A) = rg(u)$

et ainsi, $\left(\text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E} ((u^*)^*) \right) = {}^t\left(\underset{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}{\text{mat}} (u^*) \right)$

$$= {}^t({}^tA)$$

$$= A$$

$$= \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E} (u)$$

$(u^*)^*$ et u coïncident sur une base d'après leur matrices.
donc $(u^*)^* = u$

Code épreuve : 282
Nombre de pages : 20
Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

5) Soit $y \in \mathrm{Im}(u^*)$, $\exists x \in F$ tq. $u^*(x) = y$

et soit $\eta \in \ker(u)$, $\eta \in E$ et :

$$\langle y, \eta \rangle = \langle u^*(x), \eta \rangle_F = \langle x, u(\eta) \rangle_F$$

$$= \langle x, 0_F \rangle_F$$

$$= 0$$

donc $\forall \eta \in \ker(u)$, $\eta \perp y$

donc $y \in \ker(u)^\perp$

donc $\mathrm{Im}(u^*) \subset \ker(u)^\perp$

de plus, $rg(u^*) = rg(u)$, et comme E est un espace euclidien,

$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(u)^\perp) = \dim(\ker(u)) + rg(u)$

donc $rg(u) = rg(u^*) = \dim(\ker(u)^\perp)$

et donc $\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$ par la dimension.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) Soit $x \in \ker(u)$,

$u(x) = 0_F$

donc $(u^* \circ u)(x) = 0_E$

donc $x \in \ker(u^* \circ u)$

donc $\ker(u) \subset \ker(u^* \circ u)$

et :

remarquons que $\ker(u^* \circ u) = \{x \in \mathrm{Im}(u) \mid u^*(x) = 0_E\}$

car $(u^*)^* = u$ et $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^*)^\perp$ d'après 4 et 5) $= \{x \in \ker(u^*)^\perp \mid u^*(x) = 0_E\}$

$= \ker(u^*)^\perp \cap \ker(u^*)$

$= \{0_F\}$

donc soit $x \in \ker(u^* \circ u)$,

$u^* \circ u(x) = 0_E$ donc $u(x) = 0_E$

donc $x \in \ker(u)$

donc par double inclusion,

$\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$

~~et soit $x \in \ker(u^* \circ u)$,~~

~~$u^* \circ u(x) = 0_E$~~

~~$u^* \circ u(x) \in \mathrm{Im}(u^*)$ donc $u^* \circ u(x) \in \ker(u)^\perp$~~

6) Montrons que $\ker({}^tAA) = \ker(A)$.

- Soit $X \in \ker(A)$, $AX = 0$, donc ${}^tAAX = 0$

donc $X \in \ker({}^tAA)$

$\Rightarrow \ker(A) \subset \ker({}^tAA)$

- soit $X \in \ker({}^tAA)$, ${}^tAAX = 0$

donc ${}^tX\,{}^tAAX = 0$
donc ${}^t(AX)AX = 0$
donc $\|AX\|^2 = 0$
donc $AX = 0$
donc $X \in \ker(A)$

donc par double inclusion,

$\ker({}^tAA) = \ker(A)$

c.à.d $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$

7) Remarquons que :

$$\ker(w) = \{ x \in \mathrm{Im}(u^*) \ / \ u^* \circ u(x) = 0_E \}$$

$$= \{ x \in \mathrm{Im}(u \circ u^*) \ / \ u^*(x) = 0_E \}$$

or $\mathrm{Im}(u \circ u^*) \subset \mathrm{Im}(u)$

donc $\ker(w) \subset \{x \in \operatorname{Im}(u) \mid u^*(x) = 0_E\}$

or d'après 4 et 5, $(u^*)^* = u$ et donc $\operatorname{Im}(u) = \ker(u^*)^\perp$

donc $\ker(w) \subset \ker(u^*)^\perp \cap \ker(u^*)$
$\subset \{0\}$

et w est clairement linéaire par composition

donc $w \in \mathcal{L}(\operatorname{Im}(u^*))$ et $\ker(w) \subset \{0\}$ donc $\ker(w) = \{0\}$

Ainsi, w est injective, donc bijective, donc c'est un isomorphisme

9) $M = {}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

on a montré à la 6) que $\ker({}^tAA) = \ker(A)$.

. M est inversible ssi $\ker({}^tAA) = \{0\}$

ssi $\ker(A) = \{0\}$

or $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n \geq p$. donc $\ker(A) = \{0\} \iff rg(A) = p$

Ainsi, $rg(A) = p$ ssi M est inversible

Copie anonyme - n°anonymat : 693578

10b)
```
def Calcule_Q(A) :
    n,p = len(A)
    if al.matrix_rank(A) != p : # si le rang de A ne vaut pas p
        return (erreur)                  (on teste si M est inversible)
    else:
        Q = np.dot ( A, al.inv (np.dot (np.transpose(A), A)))   ①
        return np.dot (Q, np.transpose (A))   ②
```

① # on calcule $A \times M^{-1}$

② # On retourne $A \times M^{-1} \times {}^tA$.

11) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de M.

$\exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tq. $MX = \lambda X$

donc ${}^tAAX = \lambda X$

donc ${}^tX\,{}^tAAX = \lambda\,{}^tXX$

ie $\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2$

donc $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$ car $X \neq 0 \Rightarrow \|X\|^2 > 0$ (X vecteur propre).

donc les valeurs propres de M sont positives.

de plus, ${}^tM = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = M$

donc M est symétrique réelle.

donc M est diagonalisable.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc il existe $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de M associés aux $(\lambda_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$, les valeurs propres de M.

Ainsi, $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\exists (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid X = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$

donc $MX = \sum_{i=1}^{p} x_i M e_i = \sum_{i=1}^{p} x_i \lambda_i e_i$

donc $^tX M X = \langle X, MX \rangle = \langle \sum_{j=1}^{p} x_j e_j, \sum_{i=1}^{p} x_i \lambda_i e_i \rangle$

$= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} x_i x_j \lambda_i \langle e_j, e_i \rangle$

$= \sum_{j=1}^{p} x_j^2 \lambda_j \geq 0$ par somme de termes positifs $(\lambda_j) \in \mathbb{R}_+$, $\forall j \in [\![1,p]\!]$.

donc $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $^tX M X \geq 0$

12) Soit $(X, H) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2$,

$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\|A(X+H) - Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2$

$= \frac{1}{2}\left(\|A(X+H)\|^2 + \|Y\|^2 - 2\langle AX + AH, Y\rangle\right) - \frac{1}{2}\left(\|AX\|^2 + \|Y\|^2 - 2\langle AX, Y\rangle\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\|AX\|^2 + \|AH\|^2 + \|Y\|^2 + 2\langle AX, AH\rangle - 2\langle AX, Y\rangle - 2\langle AH, Y\rangle\right)$

$- \frac{1}{2}\left(\|AX\|^2 + \|Y\|^2 - 2\langle AX, Y\rangle\right)$

$= \frac{1}{2}\|AH\|^2 + \langle AX, AH\rangle - \langle AH, Y\rangle$

$= \frac{1}{2}\langle AH, AH\rangle + \langle AX - Y, AH\rangle$

$= {}^tH ({}^tA) AX - {}^tH {}^tA Y + \frac{1}{2} {}^tH {}^tA A H$

$= {}^tH (MX - {}^tAY) + \frac{1}{2} {}^tH M H$

$= \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2}\, {}^tH M H$

13) Si $D(X) = 0$, $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\, {}^tH M H \geq 0$

donc $\forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $J_0(Y) - J_0(X) \geq 0$

donc J_0 admet un minimum global en X.

si J_0 admet un minimum global en X,

$\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$\langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2}\, {}^tH M H \geq 0$

On admet la réciproque

15a) Soit $X \in \mathcal{S}_0$,

$S(X) = MX - {}^tAY = 0 \Rightarrow MX = {}^tAY$

$QY = AM^{-1}\underbrace{{}^tAY}_{=MX}$

$= A\underbrace{M^{-1}M}_{=I_p}X$

$= AX$

15b) Soit $X \in \mathcal{S}_0$,

$A(X - X_0) = AX - AX_0$

$= QY - AX_0$

or $X_0 \in \mathcal{S}_0$ (14)
donc $AX_0 = QY$ (cf. 15a)

donc $A(X - X_0) = QY - QY$
$= 0$
donc $X - X_0 \in \ker(A)$

On admet que $\|X\| > \|X_0\|$.

15c) $rg(A) = p$ donc d'après 9),

$M = {}^tAA$ est inversible

donc $\ker({}^tAA) = \ker(A) = \{0\}$

or $X - X_0 \in \ker(A)$

donc $X - X_0 = 0$
donc $X = X_0$

donc $\ker(A)^\perp = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

et donc $S_0 \cap \ker(A)^\perp = S_0 = \{X_0\} = \{X\}$

Ainsi, $S(X) = 0 \Rightarrow MX - AY = 0$ donc $MX = AY$
donc $M^{-1}MX = M^{-1}AY$
i.e. $X = M^{-1}AY$

16 a) $T = \|A(X - U_0)\|^2 = \|AX - AU_0\|^2$
$= \|QY - AU_0\|^2$

or $AU_0 \in \mathrm{Im}(A)$, donc $QAU_0 = AU_0$ car Q est la matrice du projeté orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(u)$, u étant l'endomorphisme associé à la matrice A.

donc $T = \|QY - QAU_0\|^2 = \|Q(Y - AU_0)\|^2 = \|QZ\|^2$ d'après l'énoncé

Copie anonyme - n°anonymat : 693578

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

donc $T = \|QZ\|^2 = {}^tZ\,{}^tQ\,Q\,Z$

$= {}^tZ\,Q\,Z$ car Q est la matrice d'un projeté orthogonal

1(b) ~~def simule T(A, sigma):~~
~~n = len(A)~~
~~Z = rd.normal (0, sigma,~~

```
def simule T(A, sigma) :
    n,p = len(A)          # pour sauvegarder n
    Q = calcule_Q(A)      # on obtient Q via la fonction de la 10b).
    Z = rd.normal(0, sigma, n)   # on simule Z, vecteur aléatoire
    T = np.dot(np.transpose(Z), Q)   # on calcule tZ Q
    return np.dot(T, Z)          # on retourne tZQZ.
```

1(6d)) On peut conjecturer que l'espérance de T sera approximativement la somme des premiers coefficients non nuls de chaque colonne.

en appliquant ce raisonnement, on aurait $E(T)$ avec A_1 qui serait environ de $2 \simeq 1,99$

On peut dorénavant conjecturer que l'espérance de T vaudra environ 2×6^2

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

16e) $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0; \sigma^2)$

donc $V(Z_1) = \sigma^2 = E(Z_1^2) - \underbrace{E(Z_1)^2}_{=0}$

donc $E(Z_1^2) = \sigma^2$

Soit $A>0$, une densité de Z_1 est donnée par

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, de même que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\,dx$.

et $x \mapsto x^3 f(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R}$ est centré en 0.

$$\text{donc } E(Z_1^3) = \int_0^{+\infty} x^3 f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} x^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^3 f(x)\,dx - \underline{\int_0^{+\infty} u^3 f(u)\,du}$$

$$= 0$$

en posant $u = -x$
$x = -u$
$dx = -du$
$u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement décroissante de $[0, +\infty[$ dans $]-\infty, 0]$.

Et de même, $\mathbb{E}(Z_1^4)$ existe car $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)\,dx$ converge d'après le critère de comparaison car $x \mapsto x^4 f(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$ et $\int_0^{+\infty} x^4 f(x)\,dx$ converge car $x^4 f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées.

par parité de $x \mapsto x^4 f(x)$ sur $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(Z_1^4) = 2\int_0^{+\infty} x^4 f(x)\,dx$$

Soit $A > 0$, $\int_0^A x^4 f(x)\,dx = \int_0^A \frac{x^4}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx$

regardons

En réalisant une IPP avec $u : x \mapsto e^{-x^2/2\sigma^2}$

$u' : x \mapsto -\frac{1}{\sigma^2} x e^{-x^2/2\sigma^2}$

$v : x \mapsto x^3$

$v' : x \mapsto 3x^2$

avec u et v $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$,

$$\underbrace{\int_0^A x^4 f(x)\,dx}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\mathbb{E}(Z_1^4)} = \underbrace{\left[-\sigma^2 x^3 f(x)\right]_0^A}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{3\sigma^2 \int_0^A x^2 f(x)\,dx}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3\sigma^2}{2}\mathbb{E}(Z_i^2)}$$

donc par unicité de la limite,

$$\mathbb{E}(Z_i^4) = 3\sigma^2\,\mathbb{E}(Z_i^2) = 3\sigma^4$$

16 i) On admet que $\mathbb{V}(T) = 2p\sigma^4$

$$\begin{aligned}(T > (1+\alpha)p\sigma^2) &= (T - p\sigma^2 > \alpha p \sigma^2) \\ &\subset (T - 2\sigma^2 > \alpha p \sigma^2) \quad \text{car } p \geq 2 \\ &\subset (|T - 2\sigma^2| > \alpha p \sigma^2) \\ &\subset (|T - \mathbb{E}(T)| \geq \alpha p \sigma^2)\end{aligned}$$

donc par croissance des probabilités,

$$\mathbb{P}(T > (1+\alpha)p\sigma^2) \leq \mathbb{P}(|T - \mathbb{E}(T)| \geq \alpha p \sigma^2)$$

$$\leq \frac{\mathbb{V}(T)}{\alpha^2 p^2 \sigma^4}$$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\leq \frac{2p\sigma^4}{\alpha^2 p^2 \sigma^4}$$

$$\leq \frac{2}{p\alpha^2}$$

Partie III :

17) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tq. $u \neq 0$,

posons $f_t : (u, v) \mapsto \|u + tv\|$

et $g : t \mapsto f_t(u, v)$. g est la fonction directionnelle ~~de~~ direction v et passant par u.

Le cours assure que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition

et $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \frac{\langle u+tv, v\rangle}{\|u\|}$

et donc $g'(0) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}$

or $g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t}$

donc in fine, $\lim_{t \to 0} \frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 20 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

18) Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tq. X_0 soit le minimum global de J.

Si $BX_0 \neq 0$,

alors $-D(X_0) = -MX_0 + {}^tAY$

On admet.

20a) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tq. $u \neq 0$,

$$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 = \|u+v\|^2 - \left(\frac{\|u\|^2 + \langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle - \frac{\|u\|^4 - \langle u,v\rangle^2 - 2\|u\|^2\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{\cancel{\|u\|^4} + \|u\|^2\|v\|^2 + \cancel{2\|u\|^2\langle u,v\rangle} - \cancel{\|u\|^4} - \langle u,v\rangle^2 - \cancel{2\|u\|^2\langle u,v\rangle}}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

20b) Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|u\|^2\|v\|^2 \geq \langle u,v\rangle^2, \ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ avec } u \neq 0.$$

donc par quotient, $\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 \geq 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\|u+v\|^2 \geq \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2$

et comme $\left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right) \geq 0$ et $\|u+v\| \geq 0$

alors par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\|u+v\| \geq \|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}$$

donc $\|u+v\| - \|u\| \geq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}$

~~X_0 W - $BX_0 = 0$~~

23d) i)

```
def FoncDom (alpha, Y, lda):
    b = len(Y)
    s = 0
    for i in range (b):
        s += ((alpha [i] ** 2) * ( Y[i] ** 2)) / ((lda + alpha[i] ** 2) ** 2)  (1)
    return (s - 1)
```

(1) pour tout i entre 1 et b (car les tableaux commencent à 0), s prend la valeur de $s + \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda+\alpha_i^2)^2}$

23) d) ii)

```
def CalcBeta (alpha, Y, epsilon):
    c = 0
    a = 0
    b = 0
    for i in range(b):
        b += (1/4) * (Y[i] ** 2)
    while np.abs (FoncDom (c)) > epsilon:   # tant que |F(c)| > ε
        c = (a+b)/2
        if FoncDom(c) > 0 :
```

→ suite

```
        b = c        # si F(c) > 0, b prend la valeur (a+b)/2
    else :
        a = c        # inversement
return [-c, c]
```

Suite des questions non abouties ou non traitées :

19 b) Soit $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$\langle D(X_0), H \rangle \leq \|BH\|$

Soit $Y \in \ker(B)$, $BY = 0$.

donc $0 \leq \langle D(X_0), Y \rangle \leq \|BY\| \leq 0$.

donc $\langle D(X_0), Y \rangle = 0$

donc $D(X_0) \perp \ker(B)$
donc $D(X_0) \in \ker(B)^{\perp}$

~~23 a)~~

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751