

Copie anonyme - n°anonymat : 927485



P6-00134
927485
Mat Appl.i

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques I HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1:

1) a) on suppose M μ -réversible et $m_{ij} \neq 0$ pour un couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

on a: pour un couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$: $\mu_i m_{ij} = \mu_j m_{ji}$

supposons par l'absurde que $m_{ji} = 0$

$$\text{alors: } \mu_i m_{ij} = \mu_j m_{ji} = 0$$

et comme $m_{ij} \neq 0$, il vient: $\mu_i = 0$

or: $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ donc tous les $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$ ne peuvent

pas valoir 0

on aboutit donc à une contradiction

bilan: $m_{ji} \neq 0$

1) b) on choisit $\mu = \left(\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \right)$

comme M est symétrique, on a: $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{ij} = m_{ji}$

donc: $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\frac{1}{n} m_{ij} = \frac{1}{n} m_{ji}$

$$\text{ie: } \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \varphi_i m_{ij} = \varphi_j m_{jii}$$

$$\text{et on a bien: } \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

$$1) c) M \text{ est } \varphi\text{-réversible} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \varphi_i m_{ij} = \varphi_j m_{jii}$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n \varphi_i m_{ij} = \sum_{i=1}^n \varphi_j m_{jii}$$

$$\text{or: } {}^t(\Delta M) = {}^t M {}^t \Delta = {}^t M \Delta \quad \text{car } \Delta \text{ est diagonale}$$

$$\text{et comme } \Delta M = \sum_{i=1}^n \varphi_i m_{ij} \quad \text{et } {}^t M \Delta = \sum_{i=1}^n m_{jii} \varphi_i$$

$$\text{on a bien: } M \text{ } \varphi\text{-réversible} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_i m_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_j m_{jii}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\Delta M = {}^t M \Delta}$$

2. on suppose M φ -réversible

$$\varphi M = (\varphi_1 \dots \varphi_n) \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \varphi_j m_{j,1} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n \varphi_j m_{j,n} \right)$$

$$\text{or: } M \text{ est } \varphi\text{-réversible donc: } \varphi_j m_{j,1} = \varphi_1 m_{1,j} \quad \text{ok } \varphi_j m_{j,n} = \varphi_n m_{n,j}$$

$$\text{donc: } \varphi M = \left(\sum_{j=1}^n \varphi_1 m_{1,j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n \varphi_n m_{n,j} \right)$$

et comme: $M \in ST_n$

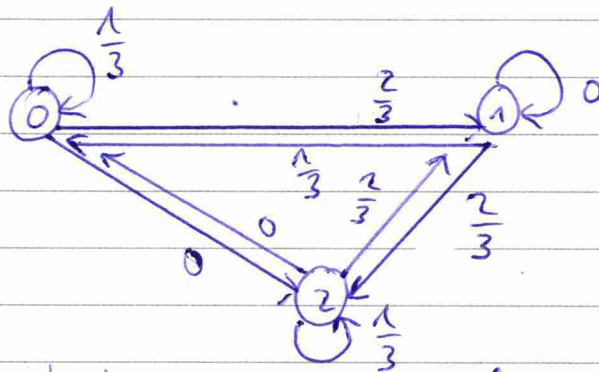
$$\text{on a: } \sum_{j=1}^n m_{ij} = 1 \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$\text{donc: } \mu M = \left(\mu_1 \sum_{j=1}^n m_{1j} \quad \dots \quad \mu_n \sum_{j=1}^n m_{nj} \right)$$

$$= (\mu_1 \quad \dots \quad \mu_n)$$

$$\underline{\mu M = \mu}$$

3. a)



en notant 0, 1 et 2 les trois états de la chaîne

3. b) on a: $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \sum_{j=1}^3 p_{ij} = 1$ car P est

une matrice de transition

donc $P \in ST_n$

d'après la question 1. c), P μ -réversible $\Leftrightarrow \Delta P = {}^t P \Delta$

dans le cas présent, $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \mu_1 & 2\mu_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 2\mu_2 \\ 0 & 2\mu_3 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } {}^t P \Delta = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ 2\mu_1 & 0 & 2\mu_3 \\ 0 & 2\mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

il faut donc :

$$\begin{cases} p_2 = 2p_1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 2p_2 = 2p_3 \end{cases}$$

ie :

$$\begin{cases} p_2 = 2p_1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_2 = p_3 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} p_2 = 2p_1 \\ p_1 = 1 - 4p_1 \\ p_2 = p_3 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{5} \\ p_2 = \frac{2}{5} \\ p_3 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

4. a) def Trajectoire (L, m):

$M = []$ ← $x = \text{nd. randint}(1, n+1)$ # état initial x_0
 for k in range(len(L)):
 for i in range(len(L[k-1])):
 if $x == k$:
 M.append(i)
 return M

a) b) soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

la valeur p_{ij} représente la probabilité de passer de l'état i à l'état j

ie : $p_{ij} = P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=j)$ pour $n \in \mathbb{N}$

or la chaîne de Markov est supposée homogène

donc : $p_{ij} = P_{[X_0=i]}(X_1=j)$

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques I HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

or la probabilité de passer d'un sommet i à un sommet j est la probabilité pour qu'il y ait une arête entre les deux, divisée par le nombre de sommets auxquels il est relié

$$ie : P_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_i}$$

$$4) c) P \text{ } \mu\text{-réversible} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \mu_i P_{ij} = \mu_j P_{ji}$$

$$\Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \mu_i \frac{a_{ij}}{d_i} = \mu_j \frac{a_{ji}}{d_j}$$

or: G est non orienté donc sa matrice d'adjacence A est symétrique donc: $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, a_{ij} = a_{ji}$

$$\text{donc } P \text{ } \mu\text{-réversible} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \mu_i = \mu_j$$

$$\text{donc nécessairement : } \mu = \left(\frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \right)$$

5. Soit $(m,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, i_0, \dots, i_m et j_0, \dots, j_s de $\llbracket 1,n \rrbracket$ tels que $i_m = j_0$

$$\begin{aligned} \Omega_m(i_0, \dots, i_m, j_1, \dots, j_s) &= m_{i_0, i_1} \times \dots \times m_{i_{m-1}, i_m} \times m_{i_m, j_1} \times \dots \times m_{j_{s-1}, j_s} \\ &= m_{i_0, i_1} \times \dots \times m_{i_{m-1}, i_m} \times m_{j_0, j_1} \times \dots \times m_{j_{s-1}, j_s} \end{aligned}$$

$$= \prod_{k=1}^m m_{ik-1, ik} \times \prod_{k=1}^m \psi_{ik-1, ik}$$

$$= O_M(i_0, \dots, i_m) \times O_M(j_0, \dots, j_m)$$

6. M vérifie $(K) \Leftrightarrow O_M(1, 2, 3, 1) = O_M(1, 3, 2, 1)$

$$\Leftrightarrow m_{1,2} m_{2,3} m_{3,1} = m_{1,3} m_{3,2} m_{2,1}$$

par la matrice P :

$$m_{1,2} m_{2,3} m_{3,1} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 0 = 0$$

$$\text{et } m_{1,3} m_{3,2} m_{2,1} = 0 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 0$$

donc: P vérifie (K)

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et i_0, \dots, i_m éléments de $[[1, n]]$

M est φ -réversible, donc: $\forall (ij) \in [[1, n]]^2$,

$$\varphi_i m_{ij} = \varphi_j m_{ji}$$

donc: $\forall k \in [[1, m]]$, $\varphi_{i_{k-1}} m_{i_{k-1}, i_k} = \varphi_{i_k} m_{i_k, i_{k-1}}$
 en particulier

en passant au produit: $\prod_{k=1}^m (\varphi_{i_{k-1}} m_{i_{k-1}, i_k}) = \prod_{k=1}^m (\varphi_{i_k} m_{i_k, i_{k-1}})$

donc: $\prod_{k=1}^m \varphi_{i_{k-1}} O_M(i_0, \dots, i_m) = \prod_{k=1}^m \varphi_{i_k} O_M(i_m, \dots, i_0)$

$$7.b) \left(\prod_{k=1}^m \psi_{ik} \right) \mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_m) = \left(\prod_{k=1}^m \psi_{ik} \right) \mathcal{O}_M(i_m, \dots, i_0)$$

donc en posant $k' = k-1$ dans le premier produit :

$$\left(\prod_{k=0}^{m-1} \psi_{ik} \right) \mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_m) = \left(\prod_{k=1}^m \psi_{ik} \right) \mathcal{O}_M(i_m, \dots, i_0)$$

$$\text{donc } \frac{\psi_{i_0}}{\psi_{i_m}} \left(\prod_{k=1}^m \psi_{ik} \right) \mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_m) = \left(\prod_{k=1}^m \psi_{ik} \right) \mathcal{O}_M(i_m, \dots, i_0)$$

en supposant $\psi_{i_m} \neq 0$, mais comme la somme des ψ_{ik} doit faire 1, il y en a forcément un non nul

$$\text{en supposant } \prod_{k=1}^m \psi_{ik} \neq 0,$$

$$\frac{\psi_{i_0}}{\psi_{i_m}} \mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_m) = \mathcal{O}_M(i_m, \dots, i_0)$$

puis en multipliant par m_{i_m, i_0} ie $\mathcal{O}_M(i_m, i_0)$:

$$\frac{\psi_{i_0}}{\psi_{i_m}} \mathcal{O}_M(i_m, i_0) \mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_m) = \mathcal{O}_M(i_m, i_0) \mathcal{O}_M(i_m, \dots, i_0)$$

et avec la question 5. :

$$\frac{\psi_{i_0}}{\psi_{i_m}} \mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_m, i_0) = \mathcal{O}_M(i_m, \dots, i_0) \mathcal{O}_M(i_m, i_0)$$

il faudrait conclure en montrant que : $\mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_m, i_0) = \mathcal{O}_M(i_0, i_m, \dots, i_0)$

or on a comme Mark μ -réversible : $\psi_{i_m} m_{i_m, i_0} = \psi_{i_0} m_{i_0, i_m}$

$$\text{donc : } \psi_{i_0} \mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_m, i_0) = \mathcal{O}_M(i_m, \dots, i_0) \psi_{i_0} m_{i_0, i_m}$$

donc: $\mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_n, i_0) = \mathcal{O}_M(i_0, i_n, \dots, i_0)$

donc: M vérifie (K)

8. Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, on pose: \mathcal{P}_s : " $m_{ij}^{(s)} > 0 \Leftrightarrow \exists (i_0, i_1, \dots, i_s) \in \llbracket 1, n \rrbracket^{s+1} : i_0 = i, i_s = j \text{ et } \mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_s) > 0$ "

$$\underline{\text{I}} \quad m_{ij}^{(1)} > 0 \Leftrightarrow m_{ij} > 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{O}_M(i, j) > 0$$

$$\Leftrightarrow \exists (i_0, i_1) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 : i_0 = i, i_1 = j \text{ et } \mathcal{O}_M(i, j) > 0,$$

ce qui adève l'initialisation

H supposons la propriété vraie pour s fixé

$$\begin{aligned} M^{s+1} &= M^s M \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ij}^{(s)} m_{ji} \\ &= \end{aligned}$$

on admettra le résultat

9. a) avec le résultat de la 8. appliqué à $s = \sigma$ (licite

car $\sigma \in \mathbb{N}^*$) on a: comme M est ergodique:
pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

il existe $(i_0, i_1, \dots, i_\sigma) \in \llbracket 1, n \rrbracket^{\sigma+1}$ tels que $i_0 = i, i_\sigma = j$

et $\mathcal{O}_M(i_0, \dots, i_\sigma) > 0$

on admettra qu'on peut poser $i_\sigma = 1$

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques I HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

on suppose $m_{n,i} > 0$

donc $\Theta_M(n,i) > 0$ donc $\Theta_M(i_0, i_0) > 0$

on a montré que pour un certain (i_0, i_1, \dots, i_0) ,

$\Theta_M(i_0, \dots, i_0) > 0$

or: M vérifie (K) donc: $\Theta_M(i_0, i_1, \dots, i_0) = \Theta_M(i_0, \dots, i_1, i_0)$

donc $\Theta_M(i_0, \dots, i_0) = \underbrace{\Theta_M(i_0, i_0)}_{>0} \Theta_M(i_0, i_1, \dots, i_0)$ (q° 5)

$= \Theta_M(i_0, i_0) \Theta_M(i_0, \dots, i_1, i_0)$

$= \Theta_M(i_0, i_0) \Theta_M(i_0, i_0) \Theta_M(i_0, \dots, i_1, i_0)$

$= m_{n,i} m_{i,1} \Theta_M(i_0, \dots, i_1, i_0)$

donc comme $m_{n,i} > 0$:

$\frac{\Theta_M(i_0, \dots, i_0)}{m_{n,i}} = m_{i,1} \Theta_M(i_0, \dots, i_1, i_0)$

il faudrait ensuite conclure

Partie 2 :

10. a) on pose $D = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{p_n} \end{pmatrix}$

on a bien : $D^2 = \begin{pmatrix} p_1 & (0) \\ \vdots & \vdots \\ (0) & p_n \end{pmatrix} = \Delta$

et D est triangulaire inférieure avec aucun élément nul sur sa diagonale (on le suppose) donc inversible

10. b) comme P est q -réversible, avec la question 10. a), on a :

$$\Delta P = Q \Delta$$

ie $\Delta P = Q \Delta$

donc $D^{-1} \Delta P = D^{-1} Q \Delta$

donc $D^{-1} \Delta P D^{-1} = D^{-1} Q \Delta D^{-1}$

donc $D^{-1} \Delta P D^{-1} = D^{-1} Q D^2 D^{-1}$

$D^{-1} \Delta P D^{-1} = D^{-1} Q D$

donc $D P D^{-1} = D^{-1} Q D$

donc $D^2 P (D^{-1})^2 = Q$

donc $D (D P D^{-1}) D^{-1} = Q$

10. c) on supposant P diagonalisable, on a $D P D^{-1}$ est diagonale

donc Q est semblable à une matrice diagonale donc diagonalisable

comme P est μ -réversible, avec la question 2. : $\mu P = \mu$

$$\text{donc } {}^t(\mu P) = {}^t\mu$$

$$\text{donc } {}^tP {}^t\mu = {}^t\mu \quad \text{avec la propriété admise}$$

$$\text{ie : } Q {}^t\mu = {}^t\mu$$

on en déduit que 1 est valeur propre de Q associée à ${}^t\mu$

$$\text{donc : } \underline{1 \in Sp(Q)}$$

12. a) on a : $QY = \lambda Y$

$$\text{donc : } \sum_{j=1}^n q_{ij} y_j = \lambda y_i \quad \text{pour tout } i \in [1, n]$$

$$\text{donc en sommant : } \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n q_{ij} y_j \right) = \lambda \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\text{de plus : } \left| \sum_{j=1}^n q_{ij} y_j \right| = |\lambda y_i|$$

or : $|q_{ij}| = q_{ij}$ car tous les coefficients de

P , et donc de Q sont positifs car ils représentent des probabilités (matrice de transition)

$$\text{donc : } \sum_{j=1}^n q_{ij} |y_j| = |\lambda| |y_i|$$

$$\text{et : } \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n q_{ij} |y_j| \right) = \sum_{i=1}^n |\lambda| |y_i|$$

comme i est muet et en prenant en particulier $\lambda = 1$ car 1 est valeur propre de Q :

$$\underline{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n q_{ij} |y_j| \right) = \sum_{j=1}^n |y_j|}$$

12) b) on a montré que: $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n q_{ij} |y_j| \right) = \sum_{j=1}^n |y_j| |\lambda|$

donc: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} |y_j| = \sum_{j=1}^n |y_j| |\lambda|$

donc $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n q_{ij} |y_j| = \sum_{j=1}^n |y_j| |\lambda|$

donc $\sum_{j=1}^n |y_j| \sum_{i=1}^n q_{ij} = \sum_{j=1}^n |y_j| |\lambda|$

or: comme $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$, $\sum_{i=1}^n q_{ij} = 1$

donc $\sum_{j=1}^n |y_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^n |y_j|$

donc les seules solutions possibles pour λ

sont: -1 et 1

12. c) donc: $Sp(Q) \subset [-1, 1]$

(on a démontré directement la 12. c), on admettra la 12. b))

13. a) on a: pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n q_{kj} y_j = \lambda y_k$
car $QY = \lambda Y$

donc: comme tous les q_{kj} sont strictement positifs,

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques I HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\sum_{j=1}^n q_{k,j} |y_j| = |\lambda y_k|$$

si $\lambda = 1$: $\sum_{j=1}^n q_{k,j} |y_j| = |y_k|$

or: $y_k > 0$

donc $\sum_{j=1}^n q_{k,j} |y_j| = y_k$

on ne conclura pas dans ce cas-là

si $\lambda = -1$: $\sum_{j=1}^n q_{k,j} |y_j| >$

on admettra que $y_k < \sum_{j=1}^n q_{k,j} |y_j|$

donc: $\sum_{k=1}^n y_k < \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n q_{k,j} |y_j| \right)$

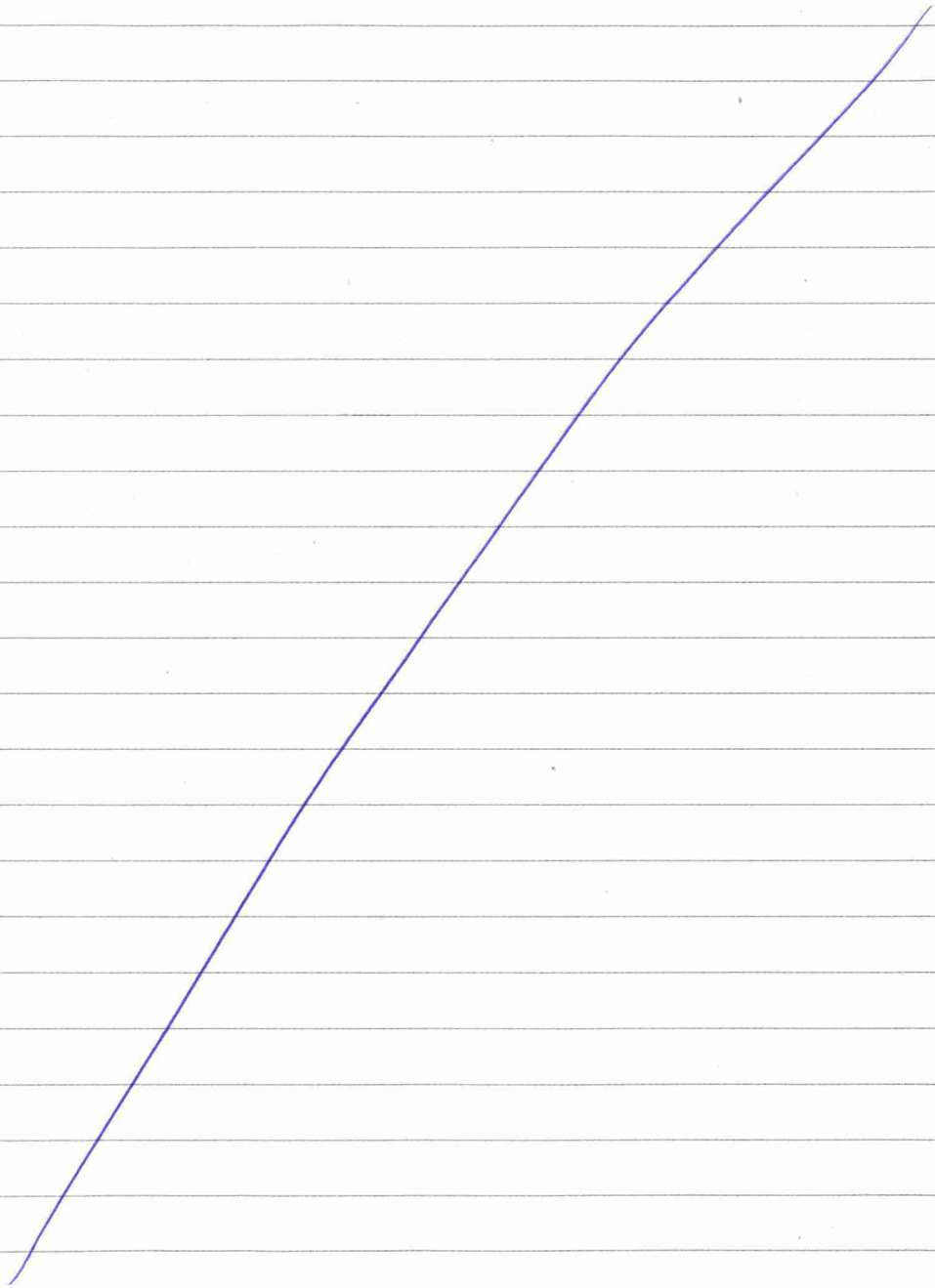
et avec la question 12. a):

$$\sum_{k=1}^n y_k < \sum_{j=1}^n |y_j|$$

et comme $|y_k| = y_k$ et comme j est

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(accidentellement sauté ces pages)



mettre : $\sum_{k=1}^n |y_k| < \sum_{k=1}^n |y_k|$

ce qui est absurde car $\sum_{k=1}^n |y_k| = \sum_{k=1}^n |y_k|$

donc on aboutit à une contradiction

donc : il n'existe aucun λ tel que $y_\lambda < 0$

autrement dit $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_i \geq 0$ ou $y_i \leq 0$

13) b) on en déduit effectivement que les vecteurs propres de Q pour λ ne peuvent pas avoir de composantes strictement négatives.

en admettant que les composantes ne peuvent pas être positives et négatives ie nulles, on peut conclure :

toutes les composantes sont soit positives soit négatives

de plus : si : $\sum_{i=1}^n y_i = 0$

alors : $y_1 = -y_2 - \dots - y_n$

donc $Y = \begin{pmatrix} -y_2 - \dots - y_n \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

donc $Y \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

13) c) on admettra que $Y = \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \cdot \psi$

on a donc montré que tous les vecteurs de $E_\lambda(\mathbb{Q})$ s'écrivent comme combinaison linéaire de ψ

donc : $E_\lambda(\mathbb{Q}) = \text{Vect}(\psi)$

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques I HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

13) d) on admet que $\sum_{i=1}^n y_i = 0$ en supposant -1 valeur propre
on a donc avec la 13c) : $\forall Y \in E_n(\mathbb{Q}), Y = 0$.

donc il n'existe aucun vecteur propre non nul
de \mathbb{Q} associé à -1 .
donc -1 n'est pas valeur propre de \mathbb{Q}

15. a) I pour $m=0$:

$$L_1 = (P(X_1=1) \dots P(X_1=n))$$

$$\text{et } L_0 P = (P(X_0=1) \dots P(X_0=n)) P$$

or P est la matrice de transition de la chaîne donc cette multiplication donne:

$$(P(X_0=1) \dots P(X_0=n)) \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

ce qui est égal à : $\left(\sum_{i=1}^n P(X_0=i) p_{in} \dots \right)$

comme $\{X_0=i, i \in \{1, n\}\}$ est un système

complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\sum_{i=1}^n P(X_0=i) p_{i1} = \sum_{i=1}^n P(X_0=i) \underbrace{p_{i1}}_{P(X_1=1)} = P(X_1=1)$$

en raisonnant de la même manière pour tous les coefficients, on a :

$$L_1 = L_0 P$$

H pour n fixé

en généralisant le raisonnement précédent, avec la formule des probabilités totales, on a :

$$\underline{L_{m+1} = L_m P}$$

ainsi, par une deuxième récurrence, on montre :

$$P_m: "L_m = L_0 P^m"$$

$$\underline{I} \quad L_0 = L_0$$

$$\underline{H} \quad \begin{aligned} L_{m+1} &= L_m P \\ &= L_0 P^m P \end{aligned}$$

$$\underline{L_{m+1} = L_0 P^{m+1}}$$

Lined paper template for writing.

20/20