



P6-00134
927485
Mat2 Appli

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques II HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1 :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$

$f: t \mapsto e^t$ est convexe sur \mathbb{R} donc par définition au dessus de ses tangentes, en particulier sa tangente en 0, d'équation :

$$y_0: t \mapsto f'(0)(t-0) + f(0)$$

$$\text{ie: } y_0: t \mapsto 1(t-0) + 1$$

$$y_0: t \mapsto t + 1$$

donc : $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq t + 1$

de même, $g: t \mapsto \ln(1+t)$ est concave sur \mathbb{R}

$$\text{car : } \forall t \in \mathbb{R}, g''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \leq 0$$

donc g est en dessous de ses tangentes, en particulier celle en 0 d'équation :

$$t_0: t \mapsto g'(0)(t-0) + g(0)$$

$$\text{ie: } t_0: t \mapsto t$$

donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \ln(1+t) \leq t$

donc en particulier : $\forall t > -1, \ln(1+t) \leq t$

2. a) f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit et somme de fonctions qui le sont: $t \mapsto 1+t$, $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto -t$

$$\forall t \in [0,1], f'(t) = e^{-t} + (1+t)(-e^{-t}) - 1 \\ = -te^{-t} - 1$$

de plus: $\forall t \in [0,1], f'(t) > 0 \Leftrightarrow -te^{-t} - 1 > 0$
 $\Leftrightarrow -te^{-t} > 1$
 $\Leftrightarrow te^{-t} < -1$

or: $0 \leq t \leq 1$
 donc: $0 \leq te^{-t} \leq e^{-t}$

donc $te^{-t} > -1$ ie $f'(t) < 0$

donc f est strictement décroissante sur $[0,1]$

comme f est continue sur $[0,1]$ car dérivable et strictement décroissante sur $[0,1]$ et que $f(0) = 1$ et $f(1) = 2e^{-1} - 1$, f réalise selon le théorème de la bijection une bijection de $[0,1]$ sur $[\frac{2}{e} - 1, 1]$

or: $\frac{2}{e} - 1 < 0$

donc: il existe un unique α dans $[0,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$

et comme $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$, α est dans $]0,1[$

de plus: $\forall t \in [0,1], f(t) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(f(t)) < f^{-1}(0)$

par stricte décroissante de la bijection réciproque de f , notée f^{-1}

donc: $\forall t \in [0, 1], f(t) > 0 \Leftrightarrow t < \alpha$

2. b) def valeur approchée (t):

```
c = 0
a = 0
b = 1
alpha = 0
while ((1+t)**mp.exp(-t)) - t > 0:
    c = (a+b)/2
    t = t+1
    # par
    # algorithme de
    # dichotomie
alpha = c
return alpha
```

2. c) on admettra le résultat

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

en montrant que: $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0$

on pourrait montrer par décroissante de f^{-1} :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq f^{-1}(0)$$

ie: $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \alpha$

3. a) def minimum (x, p):

```
s = 0
N = input("un entier naturel grand")
k = rd.randint(0, N+1)
# k doit prendre la
# valeur d'un entier
# naturel au hasard
# dans IN
for i in range(0, k+1):
    s = s + (p**i) / mp.factorial(i) * mp.exp(-p)
    while s <= n:
        k = k+1
return k
```

def simulY(p):

return (minimum(rd.random(), p))

rd.random simulé
la loi uniforme U

3.b) $Y(x) = N$. Soit $k \in N$, $P(Y=k) = P(Y > k-1) - P(Y > k)$
on admettra le résultat

3.c) on suppose $[Y=k]$ réalisé

donc k est le minimum sur N tel que $0 \leq \sum_{i=0}^k \frac{p^i}{i!} e^{-p}$

de plus: $[X=0]$ est réalisé si et seulement si $[\beta+p < U \leq \beta]$ l'est

$$\text{on: } \sum_{i=0}^k \frac{p^i}{i!} e^{-p} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{p^i}{i!} e^{-p}$$

(on reconnaît
une série
exponentielle)

$$\text{ie: } \sum_{i=0}^k \frac{p^i}{i!} e^{-p} \leq e^{-p} e^p$$

$$\leq 1$$

on admettra que $[Y=k] \subset [X=0]$

donc: $P([X=0] \cap [Y=k]) = P(Y=k) = \frac{p^k}{k!} e^{-p}$ car Y

suit une loi de Poisson de paramètre p

$$3.d) [X=0] = [\beta+p < U \leq \beta]$$

$$= [\beta(p)+p < U \leq \beta(p)]$$

$$= [(1+p)e^{-p} - p < U \leq (1+p)e^{-p} - p]$$

$$\text{et: } [Y=1] = \left[U \leq \sum_{i=0}^1 \frac{p^i}{i!} e^{-p} \right]$$

$$= [U \leq e^{-p} + pe^{-p}]$$

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques II HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{donc } [X=0] \cap [Y=1] = [e^{-p} + pe^{-p} < U \leq e^{-p} + pe^{-p}] = \emptyset$$

$$\text{donc } P([X=0] \cap [Y=1]) = 0$$

comme $\{[X=0], [X=1]\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P([X=0] \cap [Y=1]) + P([X=1] \cap [Y=1]) \\ &= P([X=1] \cap [Y=1]) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \underline{P([X=1] \cap [Y=1])} = pe^{-p} \quad \text{car } Y \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } p$$

$$\begin{aligned} P([X=0] \cap [Y=0]) &= P([(1+p)e^{-p} < U \leq (1+p)e^{-p} - p] \cap [U \leq e^{-p}]) \\ &= P([(1+p)e^{-p} < U \leq (1+p)e^{-p} - p]) \end{aligned}$$

$$\text{car } (1+p)e^{-p} - p \leq e^{-p}$$

$$\begin{aligned} &= F_U((1+p)e^{-p} - p) - F_U((1+p)e^{-p}) \quad \text{car } U \text{ a une densité} \\ &= F_U(\beta) - F_U(\beta+p) \end{aligned}$$

comme $\beta \in \left[\frac{2}{e} - 1, 1 \right]$, $F_U(\beta) = \beta \Leftrightarrow \beta \in [0, 1[$
 il faudrait ensuite conclure que: $P([X=0] \cap [Y=0]) = \beta$

$$\begin{aligned} P([X=1] \cap [Y=0]) &= P\left(\left[(1+p)e^{-p} - p < U \leq e^{-p}\right]\right) \\ &= F_U(e^{-p}) - F_U(\beta) \end{aligned}$$

il faudrait réviser à conclure

3. e)

$$P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$$

$$= 1 - \left(P([X=0] \cap [Y=0]) + P([X=1] \cap [Y=1]) \right)$$

$$= 1 - \left(\beta + pe^{-p} \right)$$

$$= 1 - \left((1+p)e^{-p} - p + pe^{-p} \right)$$

$$= 1 - \left(e^{-p} + pe^{-p} - p + pe^{-p} \right)$$

$$= 1 + p - \left(e^{-p} + 2pe^{-p} \right)$$

$$\underline{P(X \neq Y) = 1 + p - (1 + 2p)e^{-p}}$$

$$4. a) [T \geq 1] = \left[\sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{B_i} \geq 1 \right]$$

or la variable $\mathbb{1}_{B_i}$ prend la valeur 1 si B_i est réalisé

donc la probabilité pour que $\left[\sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{B_i} \geq 1 \right]$ soit réalisé est la probabilité pour qu'au moins 1 des événements B_i le soit

$$\text{donc: } P(T \geq 1) = P\left(\bigcap_{i=1}^k B_i\right)$$

$$4.b) P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) = P(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k)$$

avec la formule du crible: à savoir:
pour deux événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

on a (par généralisation):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) = \sum_{i=1}^k P(B_i) - P(B_1 \cap \dots \cap B_k)$$

$$\text{or: } P(B_1 \cap \dots \cap B_k) \geq 0$$

$$\text{donc: } P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) \leq \sum_{i=1}^k P(B_i)$$

5. a) soit $A > 0$

$$\sum_{k=0}^A |P(X=k) - P(Y=k)| \leq \sum_{k=0}^A |P(X=k)| + \sum_{k=0}^A |-P(Y=k)|$$

(inégalité triangulaire)

$$\text{or: } |-P(Y=k)| = P(Y=k)$$

$$\text{donc: } \sum_{k=0}^A |P(X=k) - P(Y=k)| \leq \sum_{k=0}^A P(X=k) + \sum_{k=0}^A P(Y=k) \quad (*)$$

en passant à la limite pour (*), on a:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = 1 + 1 = 2$$

(car X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N})

donc on peut affirmer: $\sum_{k=0}^A |P(X=k) - P(Y=k)|$ converge

par critère de majoration, et:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |P(X=k) - P(Y=k)| \leq 2$$

ie: $\sigma(X, Y)$ converge

5. b) on suppose $P(X=k) \geq P(Y=k)$

on admettra le résultat

$$\text{si } P(Y=k) \geq P(X=k) \text{ alors } |P(X=k) - P(Y=k)| \leq P([X \neq k] \cap [Y=k])$$

(il le faudrait le montrer)

avec le résultat admis, on a donc: pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|P(X=k) - P(Y=k)| \leq P([X=k] \cap [Y \neq k]) + P([X \neq k] \cap [Y=k])$$

5. d) soit $k \in \mathbb{N}$

$$P(X \neq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k] \cap [Y \neq k])$$

$$\text{et } P(X \neq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X \neq k] \cap [Y=k])$$

donc: en sommant le résultat de la 5. c), on a:

$$\sigma(X, Y) \leq P(X \neq Y) + P(X \neq Y)$$

$$\leq 2 P(X \neq Y)$$

$$\leq 2 d(X, Y)$$

$$\text{et } P(X \neq Y) \leq 1$$

$$\text{donc: } \sigma(X, Y) \leq 2 d(X, Y) \leq 2$$

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques II HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2:

6. on suppose qu'il existe un p_k tel que : $p_k \geq \alpha$

$$\text{donc : } p_k^2 \geq \alpha^2$$

$$\text{donc } 4 \sum_{k=1}^m p_k^2 \geq 4 \sum_{k=1}^m \alpha^2$$

donc comme $m \geq 1$:

$$4 \sum_{k=1}^m p_k^2 \geq 4m\alpha^2 \geq 4\alpha^2$$

$$\text{et comme } \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{donc : } 4 \sum_{k=1}^m p_k^2 \geq \frac{4}{2} = 2$$

d'autre part avec la question 5. d), $\sigma(S_m, T_m) \leq 2$
en supposant que l'on peut appliquer l'inégalité à ces variables.

$$\text{on a donc : } 4 \sum_{k=1}^m p_k^2 \geq \sigma(S_m, T_m)$$

donc (LC) est vérifiée

7. on admettra que ces variables sont indépendantes

8. les $(X_k)_{1 \leq k \leq m}$ suivent la loi de Poisson de paramètre p_k

donc par stabilité de la loi de Poisson, $T_m \subset \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^m p_k\right)$

ie: $T_m \subset \mathcal{P}(1)$

de plus: on suppose que tous les p_k sont égaux à $\frac{1}{m}$

$$X_k(\omega) = \{0, 1\} \quad \text{pour tout } k \in \{1, m\}$$

$$\text{donc } S_m(\omega) = \llbracket 0, m \rrbracket$$

et comme S_m compte le nombre de succès de m épreuves de Bernoulli simulées par les $(X_k)_{k \in \{1, m\}}$ identiques et indépendantes, on a:

$$S_m \subset \mathcal{B}\left(m, P(X_k = 1)\right)$$

$$\text{ie: } S_m \subset \mathcal{B}\left(m, P\left(\beta(p_k) < U_k \leq \beta(p_k) + p_k\right)\right)$$

$$\text{ie: } S_m \subset \mathcal{B}\left(m, P\left(\beta\left(\frac{1}{m}\right) < U_k \leq \beta\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m}\right)\right)$$

$$\text{or: } P\left(\beta\left(\frac{1}{m}\right) < U_k \leq \beta\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m}\right) = F_{U_k}\left(\beta\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m}\right) - F_{U_k}\left(\beta\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$

$$\text{or: } \frac{1}{m} = p_k < \alpha$$

$$\text{donc: } f\left(\frac{1}{m}\right) > f(\alpha) = 0$$

$$\text{et: } f\left(\frac{1}{m}\right) \leq f(0) = 1$$

$$\text{donc } F_{0a}(f(\frac{\lambda}{m})) = \frac{\lambda}{m}$$

et comme: $f(\frac{\lambda}{m}) \in]0,1[$ et $\frac{\lambda}{m} \in]0,a[$

$$\text{on a: } f(\frac{\lambda}{m}) + \frac{\lambda}{m} \in]0,1+a[$$

$$\text{si } \underline{f(\frac{\lambda}{m}) + \frac{\lambda}{m} \in [0,1[}, \quad S_m \subset S_B(m, \frac{\lambda}{m})$$

$$\text{si } f(\frac{\lambda}{m}) + \frac{\lambda}{m} \in [1,1+a[, \quad S_m \subset S_B(m, 1 - f(\frac{\lambda}{m}))$$

9. a) supposons que l'événement: $\left[\bigcup_{k=1}^m [X_k \neq Y_k] \right]$

soit réalisé

$$\text{on a donc: } \bigcap_{k=1}^m [X_k = Y_k] \text{ réalisé}$$

donc pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a: $X_k = Y_k$

$$\text{donc: } \sum_{k=1}^m X_k = \sum_{k=1}^m Y_k$$

$$\text{donc: } \underline{S_m = T_m}$$

$$\text{ainsi: } \left[\bigcup_{k=1}^m [X_k \neq Y_k] \right] \subset [S_m = T_m]$$

donc la contraposée est vraie:

$$\underline{[S_m \neq T_m] \subset \bigcup_{k=1}^m [X_k \neq Y_k]}$$

9. b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$

$$\text{on a: d'après 9. a): } P(S_m \neq T_m) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^m [X_k \neq Y_k]\right)$$

$$\leq \sum_{a=1}^m \mathbb{P}(X_a \neq Y_a)$$

(inégalité de Boole)

ou avec la 5. d): $\delta(S_m, T_m) \leq 2d(S_m, T_m)$

donc $\delta(S_m, T_m) \leq 2\mathbb{P}(S_m \neq T_m)$

donc $\delta(S_m, T_m) \leq 2 \sum_{a=1}^m \mathbb{P}(X_a \neq Y_a)$

or: avec la question 3. e): $\mathbb{P}(X_a \neq Y_a) \leq 2p_k^2$

donc: $\delta(S_m, T_m) \leq 2 \sum_{a=1}^m 2p_k^2$

donc $\delta(S_m, T_m) \leq 4 \sum_{a=1}^m p_k^2$

10. Soit $m \in \mathbb{N}^*$

on a montré que: $\delta(S_m, T_m) \leq 4 \sum_{a=1}^m p_k^2$

comme tous les p_k valent $\frac{\lambda}{m}$, on a montré en q°8

que: $T_m \subset \mathcal{P}(\Lambda)$ et $S_m \subset \mathcal{B}\left(m, \frac{\lambda}{m}\right)$

donc en appliquant, on a:

$$\sum_{k=0}^m |\mathbb{P}(S_m=k) - \mathbb{P}(T_m=k)| \leq 4 \sum_{k=1}^m p_k^2$$

ie: $\sum_{k=0}^m \left| \binom{m}{k} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-k} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq 4 \sum_{k=1}^m \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2$

ie: $\sum_{k=0}^m \left| \binom{m}{k} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-k} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq 4 \frac{\lambda^2}{m}$

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques II HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11. a) on admettra le résultat

11. b) Soit $k \in [1, m]$

Soit $t \in [k, k+1]$

$$t \geq k$$

$$\text{donc } t+m \geq k+m$$

$$\text{donc } \frac{1}{t+m} \leq \frac{1}{k+m}$$

par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$ comme les fonctions sont continues, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t+m} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k+m} dt$$

$$\text{donc } \int_k^{k+1} \frac{1}{t+m} dt \leq \frac{1}{k+m} \quad (*)$$

Soit $t \in [k-1, k]$

$$\text{donc } \frac{1}{t+m} \geq \frac{1}{k+m}$$

par croissance de l'intégral sur $[k-1, k]$, comme les fonctions sont continues, on a :

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{t+m} dt \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k+m} dt$$

$$\text{ie: } \int_{k-1}^k \frac{1}{t+m} dt \geq \frac{1}{k+m} \quad (*) (*)$$

avec $(*)$ et $(*)(*)$, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t+m} dt \leq \frac{1}{k+m} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t+m} dt$$

11-c) en sommant la relation précédente pour k variant de 1 à m , on a :

$$\sum_{k=1}^m \int_k^{k+1} \frac{1}{t+m} dt \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k+m} \leq \sum_{k=1}^m \int_{k-1}^k \frac{1}{t+m} dt$$

$$\text{donc: } \int_1^{m+1} \frac{1}{t+m} dt \leq S_m \leq \int_0^m \frac{1}{t+m} dt$$

(relation de Charles)

$$\text{donc: } \left[\ln(t+m) \right]_1^{m+1} \leq S_m \leq \left[\ln(t+m) \right]_0^m$$

$$\text{donc } \ln(2m+1) - \ln(m+1) \leq S_m \leq \ln(2m) - \ln m$$

$$\text{donc } \ln\left(2\left(m+\frac{1}{2}\right)\right) - \ln(m+1) \leq S_m \leq \ln 2 + \ln m - \ln m$$

$$\text{donc } \ln 2 + \ln\left(m+\frac{1}{2}\right) - \ln(m+1) \leq S_m \leq \ln 2$$

$$\text{donc: } \ln 2 + \ln m + \ln\left(1 + \frac{1}{2m}\right) - \ln m - \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) \leq S_m \leq \ln 2$$

par passage à la limite, comme: $\ln\left(1 + \frac{1}{2m}\right) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2m}$

$\rightarrow 0$
 $m \rightarrow +\infty$

on a: par théorème d'encadrement:

$$\underline{\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \ln 2}$$

11. d) on a avec la 11) a): pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$-\frac{\alpha}{n} \leq P(S_m = k) - \frac{S_m^k}{k!} e^{-S_m} \leq \frac{\alpha}{n}$$

$$\text{donc } -\frac{\alpha}{n} + \frac{S_m^k}{k!} e^{-S_m} \leq P(S_m = k) \leq \frac{\alpha}{n} + \frac{S_m^k}{k!} e^{-S_m}$$

donc par passage à la limite quand $m \rightarrow +\infty$, comme

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{-S_m} = e^{-\ln 2}$$

(on a aussi: $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{S_m^k}{k!} = \frac{(\ln 2)^k}{k!}$) par continuité de exp sur \mathbb{R} , on a:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} P(S_m = k) = \frac{(\ln 2)^k}{k!} e^{-\ln 2}$$

donc: $(S_m)_{m \geq 2} \xrightarrow{\mathcal{L}} S$ où $S \sim \mathcal{P}(\ln 2)$

Partie 3:

12. h est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* en tant que quotient de fonctions qui le sont: $x \mapsto e^x - 1$ et $x \mapsto x$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+^*

le problème en 0: $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

$$\text{donc } \frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\text{donc: } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = 1$$

donc h est continue en 0

$$\text{de plus: } \forall x > 0, h'(x) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2}$$

$$= \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2}$$

$$\text{or: } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{donc: } h'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))(x-1) + 1}{x^2}$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - 1 + x^2 - x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1}{x^2}$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$$

donc: h est dérivable en 0 et $h'(0) = \frac{1}{2}$

de plus: $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \frac{1}{2}$ donc h est C^1 sur \mathbb{R}^+

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques II HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

13. a) soit $x \geq 0$

g est dérivable sur \mathbb{R}^+

$$\text{et : } g'(x) = -e^{-x} \int_0^x h(t) dt + e^{-x}$$

on admettra le résultat

13. b) soit $t > 0$

$$h(t) - h'(t) = \frac{e^t - 1}{t} - \frac{e^t t - (e^t - 1)}{t^2}$$

$$= \frac{te^t - t - e^t t + (e^t - 1)}{t^2}$$

$$= \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$$

13. c) soit $t > 0$

on a avec la question 1. : $e^t - 1 > t$

$$\text{donc : } e^t - 1 - t > 0$$

$$\text{donc: } \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \geq 0$$

$$\text{donc } h(t) - h'(t) \geq 0$$

$$\text{de plus: si } h(t) - h'(t) = 0$$

$$\text{alors: } h(t) = h'(t)$$

donc: h est la fonction nulle, ce qui n'est pas le cas

$$\text{donc: } h(t) - h'(t) > 0$$

$$\text{si } t = 0: h(t) - h'(t) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc: } h(t) - h'(t) > 0$$

$$\text{de plus: } \forall n \geq 0, \int_0^n (h(t) - h'(t)) dt = \int_0^n \frac{e^t - 1 - t}{t^2} dt$$

$$\text{or: } \int_0^n \frac{e^t - 1 - t}{t^2} dt = \int_0^n \frac{e^t dt}{t^2} - \int_0^n \frac{1}{t^2} dt - \int_0^n \frac{1}{t} dt$$

$$\text{et: par critère de Riemann, } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} dt$$

diverge vers $+\infty$

$$\text{donc: } \int_0^{+\infty} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} dt \text{ diverge vers } +\infty$$

$$\text{donc: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n (h(t) - h'(t)) dt = +\infty$$

16. $X = \text{mp.linspace}(\text{mp.log}(3), 2, 100)$

$Y = []$

for x in X :

$n = 2$; $S = n + n ** 2 / \alpha$; $d = n ** 3 / 6$

while $d * \text{mp.exp}(-n) > 0.0001$:

$n = n + 1$

$S = S +$

