506899

GOSSEZ

TIANA

07/06/2005

Note de délibération : 18.07 / 20

Numéro d'inscription 506899

Né(e) le 07/06/2005

Nom GOSSEZ

Prénom (s) TIANA

Signature

18.07 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 1 / 4

Numéro de table 13

Exercice 1

1) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $a,b,c,d,e,f,g,h,i \in \mathbb{R}$ tel que $M \in E_{O_3}$

$\iff O_3 . M + M . O_3 = O_3$

$\iff \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\boxed{E_{O_3} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ avec } a,b,c,d,e,f,g,h,i \in \mathbb{R} \right\}}$

Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $a,b,c,d,e,f,g,h,i \in \mathbb{R}$ tel que $N \in E_{I_3}$

$\iff I_3 . N + N . I_3 = O_3$

$\iff N + N = O_3$

$\iff 2N = O_3$

$\iff \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 2a = 0 \\ 2b = 0 \\ 2c = 0 \\ 2d = 0 \\ 2e = 0 \\ 2f = 0 \\ 2g = 0 \\ 2h = 0 \\ 2i = 0 \end{cases} \iff a=b=c=d=e=f=g=h=i=0$

$\iff N = O_3$

Ainsi $\boxed{E_{I_3} = \{ O_3 \}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.07 / 20

2) • $I_3 \in M_3(\mathbb{R})$ et $E_{I_3} = \{O_3\}$
donc $O_3 \in E_C$

• Soit M et $N \in E_C$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$C.(\lambda M + N) + (\lambda M + N).C$

$= \lambda CM + CN + \lambda MC + NC$ linéarité par distribution matricielle

$= \lambda(CM + MC) + CN + NC$

$= \lambda O_3 + O_3 = O_3$ car M et $N \in E_C$

donc $(\lambda M + N) \in E_C$

E_C est linéaire et $O_3 \in E_C$ donc E_C est un sous espace propre de $M_3(\mathbb{R})$

3) $M \in E_A$

$\iff AM + MA = O_3$

$\iff {}^t(AM + MA) = {}^tO_3$

$\iff {}^t(AM) + {}^t(MA) = O_3$ par linéarité

$\iff {}^tM\,{}^tA + {}^tA\,{}^tM = O_3$

Or on remarque que A est une matrice symétrique

Ainsi ${}^tA = A$ on a donc

${}^tM\,{}^tA + {}^tA\,{}^tM = O_3$

$\iff {}^tM.A + A.{}^tM = O_3$

$\iff A.{}^tM + {}^tM.A = O_3$

donc ${}^tM \in E_A$

4) a) A est <u>symétrique donc diagonalisable</u>

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$

On remarque $A^3 = 9A \iff A^3 - 9A = 0$
donc $P(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda$ est un polynôme annulateur de A

Ainsi $\underline{\lambda^3 - 9\lambda = 0}$

c) les valeurs propres de A sont parmi les racine de son polynôme annulateur $\{0; -3; 3\}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A)$

$\iff AX = 0.X$

$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$

$E_0(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ 0 est valeur propre de A associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3}(A)$

$\iff AX = -3X$

$\iff \begin{cases} x - 2y = -3x \\ -2x + 2z = -3y \\ 2y - z = -3z \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -2x \end{pmatrix}$ $E_{-3}(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ -3 est valeur propre de A associée à vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A)$

$\Leftrightarrow \quad AX = 3X$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3x \\ -2x + 2z = 3y \\ 2y - z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} -2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$

$E_3(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ 3 est valeur propre de A associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• La concatenation des bases des vecteurs propre de A est libre (cours) et composée de 3 vecteurs dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est donc une base de $M_3(\mathbb{R})$ et d'après la formule de changement de base en notant f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A et $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\underset{can}{\text{Mat}}(f) = P_{can,B}\, \underset{B}{\text{Mat}}(f)\, P_{B,can}$ on note $P_{can,B} = \boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

et $\underset{B}{\text{Mat}}(f) = \boxed{D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

$\Leftrightarrow \quad A = PDP^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad D = P^{-1}AP$

5) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$

$P^2 = 9I_3 \Leftrightarrow P = 9I_3P^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{9}P = P^{-1}$

$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Numéro d'inscription 506899

Né(e) le 07 / 06 / 2005

Nom GOSSEZ

Prénom (s) TIANA

Signature

18.07 / 20

Écricome Épreuve : *Mathématiques appliquées*

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 2 / 4

Numéro de table 13

6)a) $N \in E_0$

$\iff DN + ND = 0_3$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -6a = 0 \\ -3b = 0 \\ -3d = 0 \\ 3f = 0 \\ 3h = 0 \\ 6i = 0 \\ c, e, g \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = d = f = h = i = 0 \\ c, e, g \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille visiblement libre et composée de 3 vecteurs dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$ c'est donc une base B de E_0 de <u>dimension 3</u>.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.07 / 20

7)a) $M \in E_A$ $\quad N = P^{-1}MP \Leftrightarrow PNP^{-1} = M$

$\iff AM + MA = O_3$

$\iff A(PNP^{-1}) + (PNP^{-1})A = O_3$

$\iff APNP^{-1} + PNP^{-1}A = O_3$

$\iff PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = O_3$ d'après 4)c)

$\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = O_3$

$\iff P^{-1}PDNP^{-1}P + P^{-1}PNDP^{-1}P = P^{-1}O_3P$

$\iff DN + ND = O_3$

$\iff N \in E_D$

Donc <u>M appartient à E_A si et seulement si N appartient à E_D</u>

b) Si B est une base de E_D d'après 6)b)
PBP^{-1} est une base de E_A
car d'après 7a) $N = P^{-1}MP$
d'après la formule de changement de base
PBP^{-1} est une base de E_A

8) $(A+M)^2 = A^2 + M^2$

$\iff A^2 + 2AM + M^2 = A^2 + M^2$ par propriété de la matrice

$\iff 2AM = O_3$

$\iff AM + AM = O_3$

il s'agit de l'ensemble des matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ tel que $AM = O_3$

9) $3 = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(E_\varphi)$

$\iff rg(\varphi) = 3 - \dim(E_\varphi)$

$= 0$

Exercice 2

1)a) Montrons par recurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n : "$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge"

- Initialisation :

Soit $A > 0$ $\int_0^A t^0 e^{-t} dt = \int_0^A e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^A$

$\lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-A} + e^0 = 1$ converge

$\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = 1$

donc P_0 vraie

- hérédité Supposons P_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$

On pose l'integration par partie (IPP) :

u et v C^1 $\quad u(t) = t^{n+1} \quad u'(t) = (n+1)t^n$

soit $A > 0$ $\quad v(t) = -e^{-t} \quad v'(t) = e^{-t}$

$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} dt = \left[-t^{n+1} e^{-t}\right]_0^A - \int_0^A -(n+1) t^n e^{-t} dt$

$= \underbrace{-A^{n+1} e^{-A}}_{\xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée (C.C.)}} + 0e^0 + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t} dt$

$\xrightarrow[A \to +\infty]{} (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ qui converge d'après l'hypothèse de recurrence

Donc P_{n+1} converge

- Par principe de recurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

b) $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ d'après 1)

$I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$

on pose l'IPP $u(t) = t$ $u'(t) = 1$

u et v C^1 $v(t) = -e^{-t}$ $v'(t) = e^{-t}$

soit $A>0$ $\int_0^A te^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-t}dt$

$= -Ae^{-A} + 0e^0 + \left[-e^{-t}\right]_0^A$

$= \underbrace{-Ae^{-A}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 \text{ par C.C.}} \underbrace{-e^{-A}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0} + e^0$

$\xrightarrow[A\to+\infty]{} 1$

Ainsi on a $\boxed{I_0 = 1 \text{ et } I_1 = 1}$

2) Si $x>0$:

$$\frac{\frac{e^{-t}}{1+xt}}{e^{-t}} = \frac{e^{-t}}{(1+xt)e^{-t}} = \frac{1}{1+xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{car } x>0$$

$$\frac{e^{-t}}{1+xt} = o(e^{-t})$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge et vaut 1 d'après 1)

donc par comparaison des série à termes positif sur borne croissante $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ converge

si $x = 0$:

$$\frac{\frac{e^{-t}}{1+xt}}{e^{-t}} = \frac{e^{-t}}{1 \times e^{-t}} = 1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$$

donc $\frac{e^{-t}}{1+xt} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$

Par le même principe $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ converge

Numéro d'inscription 506899

Né(e) le 07/06/2005

Signature

Nom GOSSEZ

Prénom (s) TIANA

18.07 / 20

Ecricome Épreuve : Mathémathiques appliquées Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 3 / 4

Numéro de table 13

3) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+0\times t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ d'après q1)

$\boxed{F(0) = 1}$

4) $y \geqslant x$

$\Leftrightarrow ty \geqslant tx$ car $t \in [0 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow ty + 1 \geqslant tx + 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{ty+1} \leq \frac{1}{tx+1}$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{-t}}{ty+1} \leq \frac{e^{-t}}{tx+1}$ par positivité de $t \mapsto e^{-t}$

en intégrant et par croissance de l'intégrale d'une fonction positive sur bornes croissantes de 0 à $+\infty$ on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{ty+1} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{tx+1} dt$$

$\Leftrightarrow F(y) \leq F(x)$

Ainsi la fonction F est décroissante

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.07 / 20

5)a) si $x=0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \int_0^1 1\,dt = (1-0)1 = 1$$

si $x>0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{x}{1+xt}\,dt = \frac{1}{x}\left[\ln(1+xt)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{x}\left(\ln(1+x)-\ln(1)\right) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

donc : $$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}}$$

b) on a :

$$0 \leq t \leq 1$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq -t \leq 0$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq e^{-1} \leq e^{-t} \leq e^{0}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq e^{-t} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{0}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$$

par positivité de $1+xt$ car $x \geq 0$ et $t \geq 0$

en intégrant sur $[0,1]$ et par croissance de l'intégrale de fonction positive sur borne croissante on a :

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt}$$

c) on a $1 \leq t$

$\iff x \leq xt$ car $x > 0$

$\iff x - 1 \leq x \leq xt$

$\iff x \leq xt + 1$

$\iff \frac{1}{x} \geq \frac{1}{xt+1}$ par décroissance de $u \mapsto \frac{1}{u}$

$\iff \frac{e^{-t}}{xt+1} \leq \frac{e^{-t}}{x}$ par positivité de l'exponentiel

en integrant sur des bornes croissantes $[1 ; +\infty[$ on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

de plus comme $\frac{e^{-t}}{1+xt}$ est positive sur $[1 ; +\infty[$:

$$\boxed{0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt}$$

d) $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \overset{\text{par Chasles}}{=} \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$

d'après 3)b) : $0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$

or $\frac{1}{1+xt} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc par encadrement :

$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

d'après 3)c) : $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$

or $\frac{1}{x} e^{-t} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Ainsi $\frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc par encadrement :

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Donc $\boxed{F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$

6) a) $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - xt) dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt) dt$$

par chasles $= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} - \frac{e^{t}(1-xt)(1+xt)}{1+xt} dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1 - (1^2 - (xt)^2)}{1+xt} dt$$

$$\boxed{= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt}$$

b) $F(x) - I_0 + x I_1 = F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} x t e^{-t} dt$

$= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - xt) dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$ (d'après 6a)

Or $x \geq 0$ et ≥ 0 donc $1 + xt \geq 1$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{1+xt} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^2 t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq x^2 t^2 e^{-t}$$

par croissance de l'intégrale sur $[0; +\infty[$

on a $0 \leq x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \leq x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2}$$

Numéro d'inscription S06899

Né(e) le 07/06/2005

Nom GOSSEZ

Prénom (s) TIANA

18.07 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 4 / 4

Numéro de table 13

7)a) $F(x) \underset{x \to 0}{=} F(0) + \frac{F'(0)\,x}{1!} + o(x)$

~~on pose f $\frac{e^{-t}}{1+xt}$ primitivable et~~
~~on pose~~

~~On pose f la primive de la fonction~~
~~$t \longmapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$~~
~~$F(x) = \lim_{t \to +\infty} f(t) - f(0)$~~
~~$F'(x) = \lim_{t \to +\infty} f'(t) - f(0)$~~
~~$= \lim \frac{e^{-t}}{1+xt}$~~

$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}$

$\boxed{F(0) = 1}$ d'apres 3)

donc $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} 1 + F'(0)\,x + o(x)$

il faudra montrer que
que $F'(0) = -1$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

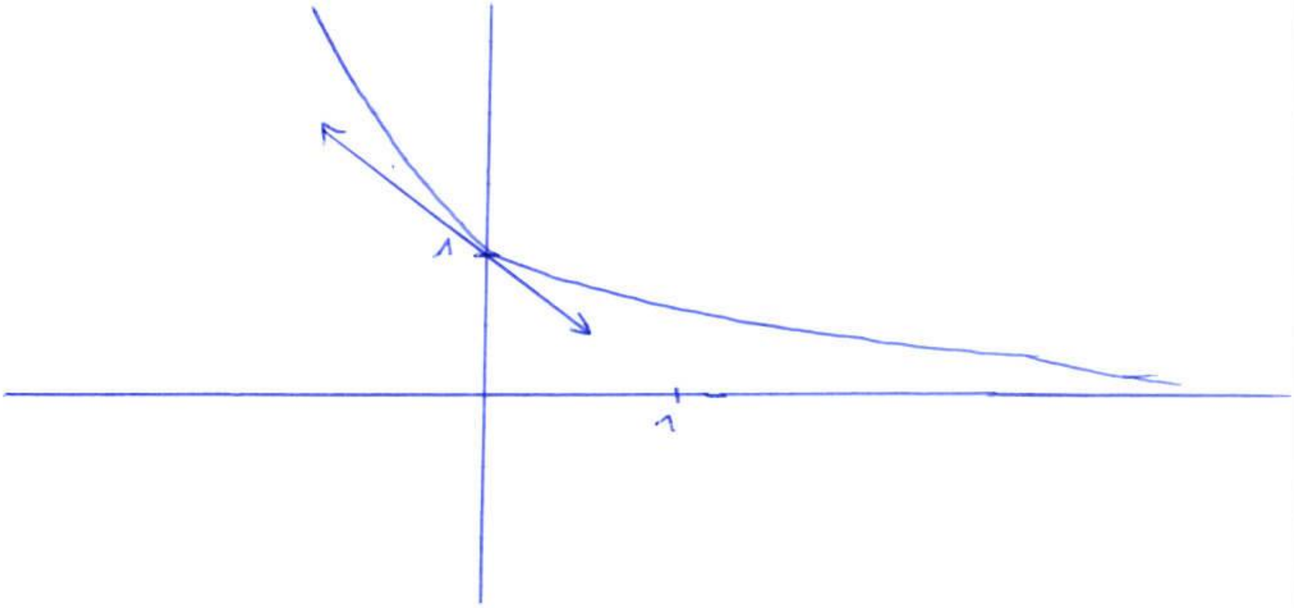
18.07 / 20

b) $\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - x + o(x) - 1}{x}$

$= \lim_{x \to 0} -1 + o(1) = -1$

limite finie donc F derivable en 0 et F'(0) = -1

8) F(0) = 1 d'apres 3)
F decroissante d'apres 4)
F'(0) = -1 d'apres 7b)



Exercice 3

Partie I

1) $\forall i \in [\![1, n]\!]$

- si $x \geq 1$ $f(x) = \frac{i}{x^{i+1}} \geq 0$ et $f(x)$ continue sur $]1;+\infty[$
- si $x < 0$ $f(x) = 0 \geq 0$ et $f(x)$ continue sur $]-\infty; 1[$

donc f_i positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}/\{1\}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{i}{x^{i+1}}\,dx$

soit $A > 0$

$= \lim_{A \to +\infty} \left[-x^{-i}\right]_1^A = \lim_{A \to +\infty} -\frac{1}{x^A} + 1 = 1$ car $x > 1$

donc f_i est une densité de probabilité

2) a) X_i admet une esperance ssi

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\,dx$ converge ie $\int_{1}^{+\infty} \frac{i}{x^i}\,dx$ converge

On reconnait une integrale de Rieman convergente ssi $i > 1$

<u>X_i admet une esperance ssi $i > 1$</u>

soit $A > 0$

$E(X_i) = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{i}{(-i+1)(x^{i-1})}\right]_1^A = \lim_{A \to +\infty} \frac{i}{(-i+1)A^{i-1}} - \frac{i}{-i+1}$

$= \frac{i}{i-1}$ $\boxed{E(X_i) = \frac{i}{i-1}}$

b) $E(X_i) = \frac{i}{i-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{i}{i} = 1$

et $E(X_2) = \frac{2}{2-1} = 2$

plus le i augmente plus l'esperanc tend à diminuer.
On en conclut que la categorie n est celle qui touchera le moins
n, n-1, n-2, ..., 2

3) si $x \geq 1$:

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{x} \frac{i}{t^{i+1}}\,dt$$

$$= \left[-t^{-i}\right]_1^x = -\frac{1}{x^i} + 1$$

si $x < 1$:

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4) a) $U(\Omega) =]0, 1[$

soit $x \in \mathbb{R}$

$$P(V_i \leq x) = P\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right) = P\left(U^{1/i} \geq \frac{1}{x}\right)$$

$$= P\left(U \geq \frac{1}{x^i}\right) = 1 - P\left(U \leq \frac{1}{x^i}\right)$$

$$= \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } \frac{1}{x^i} < 0 \\ 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } 0 \leq \frac{1}{x^i} \leq 1 \\ 1 - 1 & \text{si } \frac{1}{x^i} > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

b)
```
import numpy.random as rd
def simulX(i):
    u = rd.random()
    X = 1/(u**(1/i))
    return(X)
```