Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Code épreuve : 298	**Nombre de pages :** 32	**Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) a) f_n est dérivable sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale

de plus : $\forall x \in [0,1], \ f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k k x^{k-1}$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}$$

et : $\forall k \in [\![1,n]\!], \forall x \in [0,1], \ k^2 x^{k-1} \geq 0$

donc : $\forall x \in [0,1], \ \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} \geq 0$

de plus : $f_n'(x) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} = 0$

or si $x = 0$: $f_n'(0) = 0^0 + \sum_{k=2}^{n} k^2 x^{k-1}$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} k^2 x^{k-1} > 0$$

et si $x \in]0,1]$: $f_n'(x) > 0$

Bilan : $\forall x \in [0,1], \ f_n'(x) > 0$
donc : f_n est strictement croissante sur $[0,1]$

1)b) f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$,

ainsi d'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)]$

ie sur $\left[0, \frac{n(n+1)}{2}\right]$

or : $n \geq 1$
donc $n^2 \geq n$

donc $n^2+n \geq 2n$

donc $\frac{n^2+n}{2} \geq \frac{2n}{2} \geq n \geq 1$

donc : $1 \in \left[0, \frac{n(n+1)}{2}\right]$

donc : il existe un unique $u_n \in [0,1]$ tel que : $f_n(u_n) = 1$

1)c) $f_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sum_{k=1}^{1} k x^k = x$$

donc : $u_1 = 1$

de telle sorte qu'on ait : $f_1(1) = 1$

2)a) Soit $x \in [0,1]$

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k x^k + (n+1)x^{n+1}$$

$$= f_n(x) + (n+1)x^{n+1}$$

2) b) $f_{n+1}(U_n) = f_n(U_n) + (n+1)(U_n)^{n+1}$

$$= 1 + (n+1)(U_n)^{n+1}$$

or : $U_n \in [0,1]$

donc : $U_n^{n+1} \in [0,1]$

donc $(n+1)(U_n)^{n+1} \geq 0$

donc : $f_{n+1}(U_n) \geq 1$

2) c) on a : $f_{n+1}(U_{n+1}) = 1$

donc : $f_{n+1}(U_n) \geq f_{n+1}(U_{n+1})$

donc par stricte croissance de f_{n+1}^{-1}, bijection réciproque de f_{n+1}, on a :

$$U_n \geq U_{n+1}$$

donc : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

2) d) on a : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante
et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; U_n \geq 0$

donc la suite est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

3) a) Soit $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = x^0 \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

3) b) Soit $x \neq 1$

on a donc : $$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$$

(en dérivant)

$$= \frac{1-x^{n+1} - (n+1)x^n(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-x^{n+1} - (nx^n + x^n)(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-x^{n+1} - (nx^n - nx^{n+1} + x^n - x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

3) c) Soit $x \in [0,1[$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^k$$

si $x \neq 0$: $$f_n(x) = \frac{x}{x} \times \sum_{k=1}^{n} k x^k$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$$

$$= x \left(\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \right)$$

si $x = 0$: $f_n(x) = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 32	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

9)a) $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x + 2x^2$

on a : $f_2(U_2) = 1$ donc $U_2 + 2U_2^2 = 1$

il faut résoudre : $2U_2^2 + U_2 - 1 = 0$

on pose $\Delta : 1 - 4(2)(-1)$
$\Delta = 9 > 0$

donc : $U_2 = \frac{-1-3}{4}$ ou $U_2 = \frac{-1+3}{4}$

$U_2 = -1$ ou $U_2 = \frac{1}{2}$

or : $U_2 \in [0,1]$

donc : $U_2 = \frac{1}{2}$

Soit $n \geq 2$

$U_2 = \frac{1}{2}$ et (U_n) est décroissante minorée par 0, donc on a : $U_3 \in [0, \frac{1}{2}]$, $U_4 \in [0, \frac{1}{2}]$ ....

Bilan : $\forall n \geq 2, \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

a) b) $\forall n \geq 2, \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

donc : $\forall n \geq 2, 0 \leq U_n^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$

donc : $\forall n \geq 2, \quad 0 \leq U_n^n \leq \frac{1}{2^n}$ $(*)$

comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on a par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n^n = 0$$

de même, avec $(*)$ on a : $\forall n \geq 2, 0 \leq n U_n^n \leq \frac{n}{2^n}$

et comme $\frac{n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées,

on a : par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} n U_n^n = 0$

a) c) Soit $n \geq 2$

U_n est défini par la relation : $f_n(U_n) = 1$

ie : $U_n \left(\frac{n U_n^{n+1} - (n+1)(U_n)^n + 1}{(1-U_n)^2} \right) = 1$

donc : $U_n\left(nU_n^{n+1}-(n+1)U_n^{n}+1\right)=(1-U_n)^2$

donc : $nU_n^{n+2}-(n+1)U_n^{n+1}+U_n=1+U_n^2-2U_n$

donc : $U_n^2-3U_n+1=nU_n^{n+2}-(n+1)U_n^{n+1}$ $(*)$

a) d) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n^{n+2}=0$ (avec la question 4) b), par unicité de la limite entre U_n^n et U_n^{n+2})

et : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n^{n+1}=0$ pour les mêmes raisons.
donc $(n+1)U_n^{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

~~avec la question précédente, on a : $U_n^2-3U_n+1=nU_n^{n+2}-(n+1)U_n^{n+1}$~~

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n^2-3U_n+1=0$ par passage à la limite dans $(*)$

donc à partir d'un certain rang : $U_n^2-3U_n+1=0$

on pose Δ : $9-4=5$

$U_n=\dfrac{3-\sqrt5}{2}$ ou $U_n=\dfrac{3+\sqrt5}{2}$

Or : $4<5<9$

donc : $2<\sqrt5<3$

donc : $0<3-\sqrt5<1$

donc : $0<\dfrac{3-\sqrt5}{2}<\dfrac12$ et $\dfrac52<\dfrac{\sqrt5+3}{2}<3$

donc comme : $\forall n \geq 2, \quad 0 < U_n \leq \frac{1}{2}$

on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \ell$

Exercice 2 :

1) a) (i) $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

(ii) $O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in E$ on choisissant $(a,b) = (0,0)$

(iii) Soient M_1 et M_2 deux matrices de E et λ un réel

on note $M_1(a_1, b_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ b_1 & 2a_1 - b_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et $M_2(a_2, b_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ b_2 & 2a_2 - b_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}$

$$\lambda M_1(a_1, b_1) + M_2(a_2, b_2) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda a_1 + a_2 \\ \lambda b_1 + b_2 & \lambda(2a_1 - b_1) + 2a_2 - b_2 & \lambda b_1 + b_2 \\ \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda a_1 + a_2 \\ \lambda b_1 + b_2 & 2(\lambda a_1 + a_2) - (\lambda b_1 + b_2) & \lambda b_1 + b_2 \\ \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

donc : $\lambda M_1 + M_2 \in E$

Bilan : avec (i), (ii) et (iii), E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1) b) $E = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2} \right)$

Soient λ_1 et λ_2 deux réels tels que : $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 32 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

on a donc : $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 0&2&0 \\ 1&0&1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&-1&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

donc : $\begin{cases} \lambda_1 + 0\times\lambda_2 = 0 \\ 0\times\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$

ie : $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$

donc : (e_1, e_2) est libre

de plus : $E = \text{Vect}(e_1, e_2)$ donc (e_1, e_2) est génératrice de E

Bilan : (e_1, e_2) est une base de E et $\dim E = 2$

2) les matrices de E sont symétriques donc diagonalisables

de plus : pour chacune des matrices, on voit que, en notant C_1 et C_3 la première et dernière colonne, on a : $C_1 = C_3$

donc : le rang des matrices de E n'est pas égal à 3

donc : les matrices de E ne sont pas inversibles

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3) si l'on prend $a=1$ et $b=3$, on a :

$$M(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

donc : $A \in E$

4)
```
def matA():
    return np.array([[1,3,1],[3,-1,3],[1,3,1]])
```

5) a) comme la question 2) nous fait remarquer que les matrices de E ne sont pas inversibles, on a :

$0 \in Sp(A)$

5) b) $A - 5I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

on admettra que $A - 5I$ et $A + 4I$ ne sont pas inversibles

donc : il existe $X \neq 0$ tel que : $\begin{cases} (A-5I)X = 0 \\ \text{et } (A+4I)X = 0 \end{cases}$
$X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec

ie $\begin{cases} AX - 5X = 0 \\ AX + 4X = 0 \end{cases}$

ie $\begin{cases} AX = 5X \\ AX = -4X \end{cases}$

donc : 5 et -4 sont des valeurs propres de A

5) c) $E_0(A)$:

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$X \in E_0(A) \iff AX = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ 3a - b + 3c = 0 \\ a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3a - b + 3c = 0 \\ 3b = -a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{10}{3}a + 3c = 0 \\ b = -\frac{1}{3}a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -\frac{9}{10}c \\ b = -\frac{1}{3}a = \frac{3}{10}c \end{cases}$$

donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{9} \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{9} \end{pmatrix}$ est une base de $E_0(A)$

de même : $X \in E_5(A) \iff AX = 5X$

$$\iff (A-5I)X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -4a + 3b + c = 0 \\ 3a - 6b + 3c = 0 \\ a + 3b - 4c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{4}L_1}{\iff} \begin{cases} -4a + 3b + c = 0 \\ -15b + 15c = 0 \\ \frac{15}{4}b - \frac{15}{4}c = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow 4L_2 + 3L_1$

$$\iff \begin{cases} -4a + 3b + c = 0 \\ -15b = -15c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = c \\ b = c \end{cases}$$

donc une base de $E_5(A)$ est : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

de même : $X \in E_{-4}(A) \iff AX = -4X$

$$\iff (A + 4I)X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 5a + 3b + c = 0 \\ 3a + 3b + 3c = 0 \\ a + 3b + 5c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5a + 3b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{12}{5}b + \frac{24}{5}c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ b = -2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -2c \end{cases}$$

donc une base de $E_{-a}(A)$ est : $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

on propose donc : $(U, V, W) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

6) $r_1 = 1$ et $r_2 = 1$

7) a) on admettra

7) b) toutes les matrices de E sont diagonalisables, elles peuvent donc toutes s'écrire sous la forme : PDP^{-1} où P contient en colonnes U, V et W et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$

ainsi, pour avoir A^n où A est une matrice de E, il suffit de calculer PD^nP^{-1}
(la preuve de ceci peut éventuellement se faire par récurrence)

7) c)
```
def puissanceM(a,b,n):
    P = np.array([[1,-1/3,-10/9],[1,1,1],[1,-2,1]])  # les vecteurs U, V et W
    D = np.array([[0,0,0],[0,5**n,0],[0,0,(-4)**n]])  # la matrice D
    return np.dot(P,D, al.inv(P))
```

Exercice 3:

1) (i) f_n est définie sur $\mathbb{R}$

de plus : soit x dans $[0,n]$

$$0 \leq x \leq n$$

donc $0 \leq \frac{x}{n} \leq 1$ $(n \neq 0)$

donc $1 - \frac{x}{n} \in [0,1]$

donc : $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \in [0,1]$

donc : f_n est positive sur $[0,n]$

et comme f_n vaut 0 ailleurs, f_n est positive sur $\mathbb{R}$

(ii) f_n est continue sur $]-\infty;0[\cup]n;+\infty[$ comme fonction constante et sur $[0,n]$ comme composée de fonctions qui le sont :

$x \mapsto 1 - \frac{x}{n}$ et $x \mapsto x^{n-1}$

donc : f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en n

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^n f_n(t)\,dt$

$$= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$$

$$= -\int_0^n -\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$$

$$= -\left[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n$$

$$= -\left(-1\right)$$

$$= 1$$

donc avec (i), (ii) et (iii), f_n est bien une densité

2) a) X_n admet une espérance $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,dt$ converge absolument

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^n t \times \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$ converge absolument

or cette intégrale n'est pas impropre donc converge

Bilan : $E(X_n)$ existe

donc : $\frac{1}{n} E(X_n)$ existe et $1 - \frac{1}{n} E(X_n)$ aussi, ie :

$E\left(1 - \frac{X_n}{n}\right)$ existe (linéarité de l'espérance) de même, X_n admet une variance $\Leftrightarrow$ $\int_0^n t^2 \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$ converge absolument

comme elle converge, $V(X_n)$ existe

donc $E(X_n^2)$ existe

donc : $1 + \frac{E(X_n^2)}{n^2} - 2\frac{E(X_n)}{n}$ existe, ie :

$$\underline{E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right) \text{ existe}}$$

2) b) calculons désormais l'espérance et la variance de X_n

$$E(X_n) = \int_0^n t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$$

on pose : $u = t$ $\quad u' = 1$

$v = -\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \quad v' = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}$

par IPP comme les fonctions sont $\mathcal{C}^1$:

$$E(X_n) = \left[-t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n - \int_0^n -\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

$$= \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

$$= \left[-\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n$$

$$= \underline{-\frac{n}{n+1}}$$

$$E(X_n^2) = \int_0^n t^2\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$$

on pose : $u = t^2 \quad u' = 2t$

$v = -\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \quad v' = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}$

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 32	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a par IPP :

$$E(X_n^2) = \left[-t^2\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n - \int_0^n -2t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

$$= \int_0^n 2t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

(autre IPP) $$= \left[2t\left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n - \int_0^n 2\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

$$= 2\int_0^n -\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

$$= 2\left[\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n$$

$$= \frac{2n}{n+1}$$

donc $V(X_n) = \frac{2n}{n+1} - \left(\frac{-n}{n+1}\right)^2$ (Koenig-Huygens)

$$= \frac{2n}{n+1} - \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

3)

Soit $x \in [0,n]$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$

$= \int_0^x \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$

$= \left[-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^x$

$= -\left(1-\frac{x}{n}\right)^n + 1$

$= 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$

Soit $x < 0$

$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t)\,dt = 0$

Soit $x > n$

$F_n(x) = 1$

4) a) Soit $x < 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

4) b) pour $x \geq 0$

on a vu en 3) que : si $x \leq n$: $F_n(x) = 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$

or : $x \leq n \iff n \geq \lfloor x \rfloor + 1$

donc : $\forall n \geq \lfloor x \rfloor + 1, \quad F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

4)c) Soit $x \geq 0$

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$$

donc $n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \times \frac{x}{n}$

donc $n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x$

donc $n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x$

4)d) on a par continuité de exp sur $\mathbb{R}$:

$$e^{n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$$

ie : $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$

donc : $1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-x}$

donc : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X est définie

par : $\forall x \in \mathbb{R}, \; F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

car on peut estimer que à partir d'un certain rang, on aura n toujours supérieur à x donc on ne sera jamais dans le cas $x > n$

ie : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

5) a) si $x < 0$: $G(x) = 0$
si $x > 1$: $G(x) = 1$
si $x \in [0,1]$: $G(x) = x$

5) b) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(Z_n > x) = \mathbb{P}(nM_n > x)$$

$$= \mathbb{P}\left(M_n > \frac{x}{n}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \left[U_i > \frac{x}{n}\right]\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(U_i > \frac{x}{n}\right) \quad \text{par indépendance des } U_i$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \mathbb{P}\left(U_i \leq \frac{x}{n}\right)\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left[1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right] \quad \text{car les } U_i \text{ ont pour fonction de répartition } G$$

si $x < 0$: $\mathbb{P}(Z_n > x) = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1$

si $x > n$: $\mathbb{P}(Z_n > x) = \prod_{i=1}^{n} (1-1) = 0$

si $x \in [0,n]$: $\mathbb{P}(Z_n > x) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > n \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n] \end{cases}$

5) c) les deux variables ayant la même fonction de répartition, Z_n suit la même loi que X_n

5) d)

```
def approx_X(n):
    L = []
    for i in range(n+1):
        U = rd.random()
        L.append(U)
```

on réalise n simulations d'une uniforme sur [0,1], qu'on stocke dans une liste

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

```
for j in range(len(L)):          # on cherche le minimum
    t=0                          dans la liste
    while L[i] > t:
        t=j
    return n*L[j]                # on renvoie n x Mn
                                 c'est-à-dire Zn
                                 (même loi que Xn)
```

Problème:

1)
```
def varX(n):
    k=rd.randint(1,n+2)          #choix de l'urne, il y en a n+1
    if k==n+1:
        X= 0                     # l'urne ne contient que des
                                 boules noires
    elif k==1:
        X= 1                     # l'urne ne contient que des
                                 blanches
    else :
        X=1
        while rd.randint(1,n+1)<= j-1:
            X= X+1
    return (X)
```

2) Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$

on choisit l'urne au hasard

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{n+1}$ (équiprobabilité)

3) a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$

si U_k est réalisé, alors on a choisit l'urne U_k

on a exclu le cas $k = n+1$, donc il y a forcément au moins une boule blanche dans l'urne.

on a alors : $X_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$

donc $\mathbb{P}(X_n = j) = \left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right)^{j-1} \left(\frac{n-k+1}{n}\right)$ pour tout j de $\mathbb{N}^*$

(proportion de boules blanches sur boules totales de l'urne)

3) b) else :
x = np.geometric(n-k+1/n)
return (x)

4) a) sachant qu'on est dans l'urne U_{n+1}, il n'y a aucune boule blanche

donc : $\mathbb{P}_{U_{n+1}}(X_n = 1) = 0$

4) b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$

$$\mathbb{P}_{U_k}(X_n = 1) = \frac{\mathbb{P}([U_k \cap (X_n = 1)])}{\mathbb{P}(U_k)}$$
$$= \frac{n-k+1}{n}$$

4) c) comme $\{U_k,\ k \in [\![1, n+1]\!]\}$ est un système complet d'événements, on a avec la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_n=1) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(U_k \cap [X_n=1])$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(U_k)\, \mathbb{P}_{U_k}(X_n=1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \times \frac{n-k+1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \times \left(1 - \frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

erreur de calcul, on admettra que $\mathbb{P}(X_n=1) = \frac{1}{2}$

5) a) sachant que l'on se trouve dans l'urne $n+1$, il n'y a que des boules noires

donc $\underline{\mathbb{P}_{U_{n+1}}(X_n=j) = 0}$

5) b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$

$$\mathbb{P}_{U_k}(X_n=j) = \frac{\mathbb{P}(U_k \cap (X_n=j])}{\mathbb{P}(U_k)}$$

$$= \underline{\frac{\left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right)^{j-1} \left(\frac{n-k+1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}}}$$

5) c) comme précédemment, avec le SCE $\{U_k,\ k \in [\![1, n+1]\!]\}$ on a :

$$\mathbb{P}(X_n=j) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(U_k)\, \mathbb{P}_{U_k}(X_n=j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right)^{j-1} \left(\frac{n-k+1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

$=$

il y a sûrement une erreur de calcul

on admettra le résultat

6) a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$0 \le k \le n-1$$

donc $0 \le \frac{k}{n} \le \frac{n-1}{n} < 1$

donc $\left|\frac{k}{n}\right| < 1$

donc $\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^j$ est une série géométrique

donc : $\sum_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{j}$

$$= \frac{n}{k} \times \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{k}{n}}\right) - \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{k}{n}}\right)$$

$$= \frac{n}{k} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{n}{n-k}\right) - \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{n}{n-k}\right)$$

$$= \frac{k}{n} \times \frac{n}{n-k} - \frac{k^2}{n} \times \frac{1}{n-k}$$

$$= \frac{k}{n} \left(\frac{n}{n-k} - k\right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 32	Session : 2025

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

6)a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Soit $A \geq 2$

$$\sum_{j=2}^{A} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \left(\frac{k}{n}\right) - \left(\frac{k}{n}\right)^{A}$$ par télescopage

or : $\frac{k}{n} \in [0, 1[$

car : $0 \leq k \leq n-1$

donc $0 \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} < 1$

donc $\left(\frac{k}{n}\right)^{A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$

donc $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \frac{k}{n}$

6)b) $P(X_n \geq 2) = \displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} P(X_n = j)$

$$= \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} \times 2$$

7) a) $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \left(\mathbb{P}(X_n \geq 2) + \mathbb{P}(X_n = 1)\right)$

$$= 1 - \left(2 \times \frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - 2 \times \frac{n-1}{n+1} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \times \frac{n-1}{n+1}$$

8) a) $E(X_n) = \sum_{j=0}^{+\infty} j\, \mathbb{P}(X_n = j)$ si et seulement si cette série converge

considérons $A \geq 1$

$$\sum_{j=1}^{A} j\,\mathbb{P}(X_n=j) = \sum_{j=1}^{A} j \times \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{A}\left[j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - j\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{A\left(\frac{k}{n}\right)^{A+1} - (A+1)\left(\frac{k}{n}\right)^{A}+1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{A\left(\frac{k}{n}\right)^{A+1} - (A+1)\left(\frac{k}{n}\right)^{A}+1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2}\right)\right)$$

on admettra le résultat

8)b)
```
n= int(input('entrez la valeur de n:'))
v= np.arange(1, n+1)
E= (n/(n+1)) * np.sum([1/k  for k in range (1,n+1)])
print(E)
```

9)a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [p, p+1]$

$$p \leq t \leq p+1$$

donc $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{p+1}$

donc par croissance de l'intégrale sur $[p, p+1]$:

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\,dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p}\,dt$$

donc $\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{p}$

9) b) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

en sommant la relation précédente :

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

donc $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$ (relation de Chasles)

$(p'=p+1)$

donc $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \left[\ln t\right]_1^n \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

donc $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln n \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

9) c) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

on a : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \geq \ln n$

donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \geq \ln n + \frac{1}{n}$

et $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln n$

donc $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} + 1 \leq \ln n + 1$

donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln n + 1$

donc : $\displaystyle\ln n + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln n + 1$

9) d) en divisant par $\ln n$ (car $n \neq 1$), on a :

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

$$\frac{\ln n + \frac{1}{n}}{\ln n} \leq \frac{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}{\ln n} \leq \frac{\ln n + 1}{\ln n}$$

par passage à la limite, $\frac{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}{\ln n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

donc $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$

donc $E(X_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{n+1} \times \ln n$

$\underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751