Copie anonyme - n°anonymat : 927485

P6-00134
927485
Mat Appli

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EMLYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

Partie A :

1. a) Initialisation : $U_0 = 1 > 0$

Hérédité : on pose : P_n : " $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ "

on suppose la propriété vraie au rang n

comme $U_n > 0$, $\frac{1}{U_n} > 0$

et : $e^{\frac{1}{U_n}} > 0$ par propriété de la fonction exp

donc : $U_n e^{\frac{1}{U_n}} > 0$

ie : $U_{n+1} > 0$,

ce qui achève l'hérédité

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$, par principe de récurrence

1.b) Soit $n \in \mathbb{N}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{\frac{1}{U_n}}$

et : $e^{\frac{1}{U_n}} > 1 \iff \frac{1}{U_n} > 0$ par stricte croissance du log

or : on a montré que : $U_n > 0$
donc : $\frac{1}{U_n} > 0$

Bilan : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

1.c) supposons par l'absurde que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$.

donc : $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ (*)

donc : $e^{\frac{1}{U_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{\frac{1}{l}}$ par continuité de exp sur $\mathbb{R}$

donc $U_n e^{\frac{1}{U_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l e^{\frac{1}{l}}$

or avec (*) on a par unicité de la limite :

$U_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

donc : $l = l e^{\frac{1}{l}}$: on aboutit à une contradiction

Bilan : (U_n) admet $+\infty$ comme limite

2. import numpy as np
u = 1
n = 0

```
while u < 10**6:
    u=U*np.exp(1/U)
    n=n+1
print(n)
```

Partie B :

en $+\infty$:

3. $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc par continuité de exp sur $\mathbb{R}$, $e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = 1$

$$\text{donc : } \lim_{x\to+\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

~~en 0 :~~ $\cancel{e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ ~~(DL à l'ordre 2)~~

$\cancel{\underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

~~en posant~~ $\cancel{X = \frac{1}{x}}$

~~donc :~~ $\cancel{e^X \underset{\substack{x\to 0\\ X\to 0}}{=} x\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)}$

~~donc :~~ $\cancel{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$

en 0 : par croissances comparées, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

4. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit et composée de fonctions qui le sont : $x \mapsto \frac{1}{x}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x$

$$\forall x>0,\ f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

$$\forall x>0,\ f'(x) > 0 \iff 1 - \frac{1}{x} > 0 \iff 1 < x$$

par stricte décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

ainsi :

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = e$

5. a) la série $\sum_{k\geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ peut s'écrire : $\sum_{k\geq 0} \frac{(x^{-1})^k}{k!}$

on reconnaît ainsi le terme général d'une série exponentielle, qui est convergente

et : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^{-1})^k}{k!} = e^{x^{-1}} = e^{\frac{1}{x}}$

5. b) $f(x) = x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k+1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k+1}}{k!} + x + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k+2}}{k!} + x + 1$$

6. a) on admettra ces inégalités

6. b) d'après l'inégalité admise : comme $x \geq 1$:

$$\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x}$$

donc $\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}$

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EMLYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7. d'après le théorème d'encadrement dans l'inégalité (*) de la question 6.b) : comme $\frac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{e}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$f(x) - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

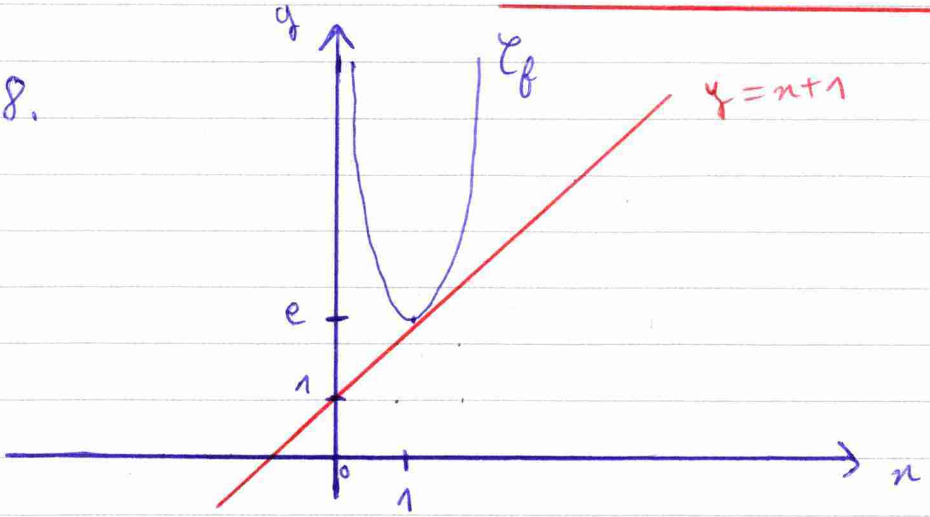
donc : $f(x) - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} h(x)$ avec $h(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

donc : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} h(x) + x + 1$

donc par définition, comme $o(1)$ peut s'écrire $h(x)$ comme défini précédemment, on a bien :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x+1+o(1)$$

8.



Partie C :

9. a) Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\ln(U_{k+1}) - \ln(U_k) = \ln\left(U_k e^{\frac{1}{U_k}}\right) - \ln(U_k)$$

$$= \ln(U_k) + \ln e^{\frac{1}{U_k}} - \ln(U_k)$$

$$\ln(U_{k+1}) - \ln(U_k) = \frac{1}{U_k}$$

9. b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

en sommant la relation précédente pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\ln(U_{k+1}) - \ln(U_k)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_k}$$

par télescopage : $\ln U_n - \ln U_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_k}$

ie : comme $U_0 = 1$: $\ln U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_k}$

10. a) Soit $k \in \mathbb{N}$, en appliquant l'inégalité $(*)$ de la question 6.b) à $x = U_k$ on a :

$$\frac{1}{2U_k} \leq f(U_k) - (U_k + 1) \leq \frac{e}{U_k}$$

donc $\frac{1}{2U_k} + 1 \leq f(U_k) - U_k \leq \frac{e}{U_k} + 1$

et comme $f(U_k) = U_k e^{\frac{1}{U_k}}$
$= U_{k+1}$, on a bien :

$$1 + \frac{1}{2U_k} \leq U_{k+1} - U_k \leq 1 + \frac{e}{U_k}$$

10. b) en sommant la relation précédente pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2U_k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left[U_{k+1} - U_k\right] \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{e}{U_k}\right)$$

ie : $n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2U_k} \leq U_n - U_0 \leq n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e}{U_k}$

(télescopage)

donc : $n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_k} \leq U_n - 1 \leq n + e\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_k}$

puis, avec le résultat de la 9.b) :

$$n + \frac{1}{2}\ln(U_n) \leq U_n - 1 \leq n + e\ln(U_n)$$

donc : $\frac{1}{2}\ln(U_n) \leq U_n - 1 - n \leq e\ln(U_n)$

donc $1 + \frac{1}{2}\ln(U_n) \leq U_n - n \leq 1 + e\ln(U_n)$

11. a) on admettra que : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(U_n)}{U_n} = 0$

11. b)
donc comme $U_n > 0$, on peut diviser par U_n dans le résultat de la question 10. b) :

$$\frac{1}{U_n} + \frac{\ln(U_n)}{2U_n} \leq \frac{U_n - n}{U_n} \leq \frac{1}{U_n} + e\frac{\ln(U_n)}{U_n}$$

par théorème d'encadrement, avec le résultat admis, on a à partir d'un certain rang :

$$\frac{1}{U_n} \leq \frac{U_n - n}{U_n} \leq \frac{1}{U_n}$$

ie : $$\frac{U_n - n}{U_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{U_n}$$

donc : $$U_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

donc : $$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+n$$

12. il faudrait désormais montrer que : $\ln(U_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$

puis que $$\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n \quad (*)$$

donc : $$\ln(U_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

ie : $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

(*) car : $$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

$$= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

et comme $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc : $$\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EMLYON

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2 :

Partie A :

1. (I, J, K) est génératrice de $\mathcal{E}$, donc c'est une base de $\mathcal{E}$ si et seulement si elle est libre

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que : $\lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K = 0$

donc : $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

donc : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$

donc : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Bilan : (I, J, K) est libre donc c'est une base de $\mathcal{E}$

et : $\dim \mathcal{E} = 3$

2. J et K sont symétriques donc diagonalisables.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3. a) $J^2 = \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&0&0 \\ 0&1&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$

et $J^3 = \begin{pmatrix} 2&0&0 \\ 0&1&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&2&2 \\ 2&0&0 \\ 2&0&0 \end{pmatrix}$

donc : $J^3 = 2J$

3. b) on a : $X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de J
donc les valeurs propres de J ne peuvent être que les racines de ce polynôme (à vérifier), ie :

$0, \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$

4. a) U_1 est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\sqrt{2}$ $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

comme $\begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

et que $\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

on a bien : U_1 vecteur propre de J associé à $\sqrt{2}$

de même : $\begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc U_2 est un vecteur propre de J associé à 0

4.b) on choisit : $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = U_3$

on a bien : $\begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. a) comme J est diagonalisable, il existe une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constitué de vecteurs propres de J

et comme U_1, U_2 et U_3 sont associés à des valeurs propres distinctes, (U_1, U_2, U_3) est libre.

comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$,

(U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

5.b) on choisit $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}&0&-\sqrt{2} \\ 1&1&1 \\ 1&-1&1 \end{pmatrix}$

comme J est diagonalisable, on a bien : $J = P\begin{pmatrix} \sqrt{2}&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&-\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1}$

ie : $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \sqrt{2}&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

6. a) on a : $\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc U_1 est un vecteur propre de K associé à la valeur propre 1

$\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc U_2 vecteur propre de K associé à -1

et : $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}$

donc U_3 est vecteur propre de K associé à 1

comme (U_1, U_3) est libre car les vecteurs sont non colinéaires et que U_1, U_3 d'une part et U_2 d'autre part sont associés à des valeurs propres différentes, on a bien : (U_1, U_2, U_3) libre

donc comme K diagonalisable, pour les mêmes raisons que précédemment, (U_1, U_2, U_3) est une base de vecteurs propres de K

6.b) $P^{-1}KP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

7. a) on a : pour a, b et c trois réels :

$M = aI + bJ + cK$

donc $P^{-1}MP = aP^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP$
$= aI + b\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&0&0\\0&0&-\sqrt{2}\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$P^{-1}MP = \begin{pmatrix}a+b\sqrt{2}+c&0&0\\0&a-c&0\\0&0&a-\sqrt{2}b+c\end{pmatrix}$

7.b) les valeurs propres de M sont donc : $a+b\sqrt{2}+c$, $a-c$ et $a-b\sqrt{2}+c$

8. a) on passe cette question

8.b) $\operatorname{Ker} s = \{ M \in \mathcal{E} : s(M) = 0 \}$

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

Code épreuve : 296	**Nombre de pages :** 24	**Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques EMLYON

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$M \in \operatorname{Ker} s \iff s(M) = 0$

$\iff (a+b\sqrt{2}+c, a-c, a-b\sqrt{2}+c) = (0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} a+b\sqrt{2}+c=0 \\ a-c=0 \\ a-b\sqrt{2}+c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a+b\sqrt{2}=0 \\ a=c \\ 2a-b\sqrt{2}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

donc : $\operatorname{Ker} s = \{0\}$

donc s est injective

de plus : $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

donc : s est bijective (car surjective)

Partie B ;

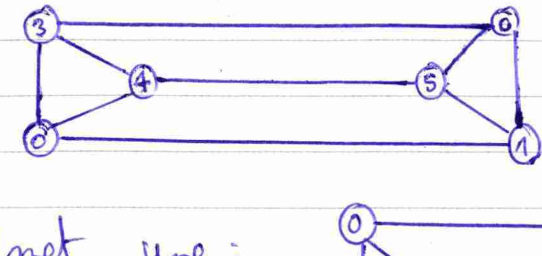
9.
```
def voisins(A, i):
    n = len(A[i])
    V = [ ]
    for j in range(n):
        if j != i and A[i,j] == 1 :
            V.append(j)
    return(V)
```

10.
```
def min_ext(L):
    m = 0
    while m in L :
        m = m+1
    return m
```

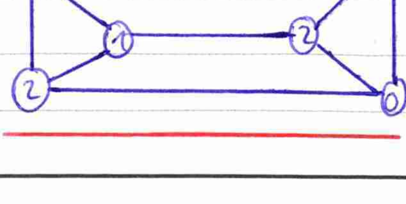
11.
```
def coloration(A):
    n = len(A[0])
    C = [k in range(0,n)]
    for i in range(1,n):
        C_voisins = [ j for j in V ]
        C[i] = min_ext( C-voisins)
    return(C)
```

12. a) la liste est la suivante : [0, 1, 3, 4, 5]

car le graphe colorié avec les couleurs est le suivant :



12. b) oui, il en admet une :



Exercice 3 :

Partie A :

1. a) U est à valeurs dans $]0,1]$

donc $\sqrt{U}$ est à valeurs dans $]0,1]$

donc : $\frac{1}{\sqrt{U}}$ est à valeurs dans $[1;+\infty[$

car : $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ et $\lim_{U \to 0} \frac{1}{\sqrt{U}} = +\infty$

donc V est à valeurs dans $[1;+\infty[$

1. b) Soit $x \in \mathbb{R}$

si $x < 1$: $F_V(x) = 0$

si $x \geq 1$: $F_V(x) = \mathbb{P}(V \leq x)$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{U}} \leq x\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sqrt{U} \geq \frac{1}{x}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(U \geq \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{x^2}\right)$$ car U est à densité

$$= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

or : $x \geq 1$ donc $x^2 \geq 1$
donc $\frac{1}{x^2} \leq 1$

et : $0 < \frac{1}{x^2} \leq 1$ donc $F_U\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$

donc $F_V(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

<u>Bilan:</u> $F_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

1. c) F_V est continue sur $]-\infty ; 1[$ en tant que fonction constante
F_V est continue sur $[1 ; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont : $x \mapsto 1$ et $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

<u>le problème en 1 :</u> $\lim_{x \to 1^-} F_V(x) = 0 = F_V(1)$

donc F_V est continue en 1, donc sur $\mathbb{R}$

de plus : F_V est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1, pour les mêmes raisons que précédemment

<u>Bilan:</u> <u>V est une variable aléatoire à densité</u>

$\forall x < 1,\ F_V'(x) = f_V(x) = 0$

$\forall x > 1,\ F_V'(x) = f_V(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

en posant arbitrairement $f_V(1) = 2$, on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ est une densité de V

2. V admet une espérance $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t f_V(t)\,dt$ Converge absolument

$\iff \int_1^{+\infty} t \times \frac{2}{t^3}\,dt$ converge

Copie anonyme - n°anonymat : 927485

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}\,dt$ converge

par critère de Riemann, comme $\alpha = 2 > 1$,

$\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}\,dt$ converge

donc V admet une espérance

et : pour $A \geq 1$: $\int_1^A \frac{2}{t^2}\,dt = 2\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^A$

$= 2\left(\frac{A^{-1}}{-1} + 1^{-1}\right)$

$= 2\left(1 - \frac{1}{A}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 2$

donc $E(V) = 2$

V admet une variance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_V(t)\,dt$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} t^2 \times \frac{2}{t^3}\,dt$ converge

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2}{t}\,dt$ converge

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

or par critère de Riemann, cette intégrale diverge car $\alpha = 1$

donc : V n'admet pas de variance

Partie B :

3. a) Soit $n \geq 1$:

l'ensemble des valeurs prises par M_n est : $[1 ; +\infty[$

donc : $\forall x < 1$, $F_n(x) = 0 = 0^n$ (car $n \geq 1$)
$= (F_V(x))^n$

Soit $x \geq 1$

$F_n(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x)$

$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [V_i \leq x]\right)$

$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(V_i \leq x)$ car les $(V_i)_{i \geq 1}$ sont indépendants

$= \prod_{i=1}^{n} F_V(x)$ car les $(V_i)_{i \geq 1}$ suivent la même loi que V

$= (F_V(x))^n$

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = (F_V(x))^n$

donc : $\forall n \geq 1$, $F_n = (F_V)^n$

3.b) Soit $x \in \mathbb{R}$

si $x < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$

si $x \geq 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n$

or : $1 - \frac{1}{x^2} \in [0;1[$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n = 0$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$

3.c) il n'existe aucune variable aléatoire qui admette pour fonction de répartition une fonction nulle sur $\mathbb{R}$, car par définition une fonction de répartition doit tendre vers 1 en $+\infty$

donc : $(M_n)_{n \geq 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire

4.a) Soit $n \geq 1$ la variable aléatoire $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$ est à valeurs dans $]0;+\infty[$

donc : $\forall x \leq 0$, $G_n(x) = 0$

Soit $x > 0$

$G_n(x) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right)$

$= \mathbb{P}(M_n \leq x\sqrt{n}) = (F_V(x\sqrt{n}))^n$

$$= \left(1 - \frac{1}{(x\sqrt{n})^2}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$$

$$= e^{n\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)}$$

or : $\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{nx^2}$

donc : $n\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$

donc : $n\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{x^2}$

donc par continuité de exp sur $\mathbb{R}$:

$$e^{n\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

donc : $\forall x > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

4.b) comme : $\forall x \leq 0, \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$

on a : $\frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} W$

Partie D :

7. Soit $n \in N(\Omega)$

$$\mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!}$$

8. l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs prises par T est $\mathbb{N}^*$.

9. a) Sachant l'événement $[N=n]$ réalisé, l'ensemble des valeurs prises par T est $[\![1, n]\!]$

de plus : on peut introduire une loi de Bernoulli comptant 1 si $V_i > A$ et 0 sinon (pour $i \geq 1$)

ie : $\mathbb{1}_{[V_i > A]}$

comme T compte les succès de ces épreuves de Bernoulli, indépendantes, identiques et , on a bien : $T \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \mathbb{P}(V_i > A))$

or : $\mathbb{P}(V_i \leq A) = F_V(A) = 1 - \frac{1}{A^2}$

donc $\mathbb{P}(V_i > A) = 1 - 1 + \frac{1}{A^2} = \frac{1}{A^2}$

donc : $T \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{A^2})$

9.b) Soit $k \in \mathbb{N}$

si $k > n$: $\mathbb{P}_{[N=n]}(T=k) = 0$ car il ne peut pas y avoir plus d'éléments de $\{V_1, ..., V_N\}$ qui

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

prennent une valeur supérieure à A qu'il n'y a d'éléments dans cet ensemble
autrement dit, si $[N=n]$, T peut compter au plus n éléments

si $k \leq n$: $P_{[N=n]}(T=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{A^2}\right)^k\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$

10. Soit $k \in \mathbb{N}$

comme $\{[N=n],\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P([N=i] \cap [T=k])$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(N=i)\, P_{[N=i]}(T=k)$$

$$= \sum_{i=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^i}{i!} \binom{i}{k}\left(\frac{1}{A^2}\right)^k\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{i-k} \quad (i \geq k)$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \times \frac{i!}{k!(i-k)!} \times \left(\frac{1}{A^2}\right)^k\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{i-k}$$

$$= e^{-\lambda} \times \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{(i-k)!}\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{i-k}$$

en posant $i' = i-k$ (changement de variable)

$$= e^{-\lambda} \times \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{i+k}}{i!}\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^i$$

$$= e^{-\lambda} \times \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \times \lambda^k \times \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^i$$

$$= e^{-\lambda} \times \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \times e^{\lambda\left(1 - \frac{1}{A^2}\right)}$$

$$= e^{\lambda - \frac{\lambda}{A^2} - \lambda} \times \frac{\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k}{k!}$$

$$\mathbb{P}(T=k) = e^{-\frac{\lambda}{A^2}} \times \frac{\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k}{k!}$$

donc : $T \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)$

11. ceci revient à calculer $E(T)$

$E(T)$ existe car T suit une loi de poisson

et : $E(T) = \frac{\lambda}{A^2}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751