Copie anonyme - n°anonymat : 100243

A0-00001 100243 Mat2 Appro

Code épreuve : 283 **Nombre de pages :** 15 **Session :** 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES APPROFONDIES ~~MA~~ HEC / ESCP

1e Partie

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

1/a) $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\forall i \in [\![1, m]\!]$, X_i admet un moment d'ordre 2
$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$

$E(X_i^2)$ existe. $\sum_{i=1}^{m} E(X_i^2) = E\left(\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right) = E(S_m)$

par linéarité de l'espérance

S_m admet une espérance.

1/b)
```
Def simul(m)
    m = int(input( ))
    X = np.normal (0, 1, m)
    For k in range(m):
        S = S + X[k]**2
    return S.
```

1/c) $T = \sum_{j=1}^{N} (S_m)^2$, le programme renvoie la moyenne empirique de S_m^2 $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(S_m)^2$

~~calcu~~ pour N simulations de S_m^2 moins m^2 la moyenne théorique $E(S_m)^2$

La figure montre l'écart, correspondant à cette différence, entre la première bissectrice et le point caractérisant l'erreur entre moyenne empirique et l'espérance de S_m au carré donc de la variance S_m.

On constate que à chaque abscisse d'entiers, les ordonnées sont dans l'ensemble tous très proche de la première bissectrice avec quelque marge d'erreur notamment au point d'abscisse 7 mais d'autres où la différence $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(S_n)^2 - E(S_n)^2$ tend vers 0

qui s'aperçoit par la proximité du point à la première bissectrice comme aux abscisses 1 et 9.

On peut conjecturer que $V(S_n)$ tend vers 0

2/a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$W_1(\Omega) \subset \mathbb{R}^*_+ \quad \forall x \notin \mathbb{R}^*_+ \quad P(W_1 \leq x) = 0.$

Soit $x \in \mathbb{R}^*_+$ $\quad \boxed{P(W_1 \leq x)} = P(\frac{1}{2} S_n \leq x)$

$= P(X_1^2 \leq 2x)$

$= P(-\sqrt{2x} \leq X_1 \leq \sqrt{2x})$

$= \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x})$

$= \boxed{2\Phi(\sqrt{2x}) - 1}$

car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Comme $\begin{cases} x \mapsto \sqrt{x} \ C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*_+ \\ \Phi \text{ est } C^1 \text{ ~~sur~~ } \mathbb{R} \end{cases}$

$x \mapsto 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*_+$

$\lim_{x \to -\infty} P(W_1 \leq x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} P(W_1 \leq x) = 2 - 1 = 1$

Quand $x \to 0$ $\quad \Phi(\sqrt{2x}) \to \Phi(0) = \frac{1}{2}$ par continuité de Φ en 0.

$2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 \to 0$

donc $P(W_1 \leq x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0, Une densité de W_1 est

$\forall x \in \mathbb{R}_*^+$

$$f_{W_1}(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x}} \times \varphi(\sqrt{2x}) = 2\frac{\varphi(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}}$$

On a donc :

$$\boxed{f_{W_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x\pi}} \exp(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2b/

$$T\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt$$

$$= \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\, dt$$

$$= \sqrt{\pi} \times 1 = \sqrt{\pi}$$

car $f_{W_1} : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi t}}$ est une densité de W_1

donc $\boxed{T\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$

2c/ $W_n = \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

$\frac{X_i^2}{2} \rightsquigarrow \gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$ $W_1 = \frac{X_1}{2} \rightsquigarrow \gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$

Comme les X_i sont mutuellement indépendantes,

$\boxed{W_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \rightsquigarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2d/ $E(S_n) = 2\, E\left(\frac{1}{2} S_n\right)$ par linéarité de l'espérance.

$$= 2 \times E(W_n)$$
$$= 2 \times \frac{n}{2} = n \quad \text{car } W_n \rightsquigarrow \gamma\left(\tfrac{n}{2}\right)$$

$\boxed{E(S_n) = n}$

$$V(S_m) = V\left(2 \times \frac{1}{2} S_m\right)$$
$$= 4\, V\left(\frac{1}{2} S_m\right)$$
$$= 4\, V(W_m)$$
$$= 4 \times \frac{m}{2}$$

$$\boxed{V(S_m) = 2m}$$

3a / Soit $m \geq 3$. $E\left(\frac{1}{W_m}\right)$ existe ssi $E(W_m^{-1})$ existe

[illegible] ssi $\int_0^{+\infty} \frac{x^{-1}}{\sqrt{x\pi}} e^{-x}\, dx$ converge absolument

[illegible]

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} e^{-x}\, dx = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \times \sqrt{\pi}$$
$$= \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

donc $\boxed{E\left(\frac{1}{W_m}\right) \text{ existe}}$

$$\boxed{E\left(\frac{1}{W_m}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}$$

$$\boxed{= \frac{2}{m-2}} = E\left(2 \times \frac{1}{S_m}\right)$$
$$= 2\, E\left(\frac{1}{S_m}\right)$$

$$\cancel{E\left(\frac{1}{W_m}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = 2 \times (\ldots)}$$

donc $\boxed{E(S_m^{-1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{m-2} = \boxed{\frac{1}{m-2}}}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 15

Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES HEC/ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3b/ Soit $m \geqslant 3$.

$$\left|E\left(\frac{1}{\sqrt{S_m}}\right)\right| \leqslant \sqrt{E(1)E\left(\frac{1}{S_m}\right)} = \sqrt{\frac{1}{m-2}}$$

(Cauchy-Swartz)

Par domination $\boxed{E\left(\frac{1}{\sqrt{S_m}}\right) \text{ existe}}$

4/ Soit $\alpha \in]0,1[$.
Supposons qu'il existe $t_{m,\alpha} \in \mathbb{R}$ tel que $P(|T_m| \leqslant t_{m,\alpha}) = 1-\alpha$

On a : $P(-t_{m,\alpha} \leqslant T_m \leqslant +t_{m,\alpha}) = 1-\alpha$

ie $P\left(-t_{m,\alpha} \leqslant \frac{Y}{\sqrt{S_m/m}} \leqslant t_{m,\alpha}\right) = 1-\alpha$

$$= P\left(-\frac{t_{m,\alpha}}{\sqrt{m}} \leqslant \frac{Y}{\sqrt{S_m}} \leqslant \frac{t_{m,\alpha}}{\sqrt{m}}\right)$$

$$= P\left(-t_{m,\alpha}\frac{\sqrt{S_m}}{\sqrt{m}} \leqslant Y \leqslant t_{m,\alpha}\frac{\sqrt{S_m}}{\sqrt{m}}\right)$$

En prenant $\boxed{t_{m,\alpha} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{m}{S_m}}}$

On a $P(|T_m| \leqslant t_{m,\alpha}) = 1-\alpha$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $t_{n,\alpha} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{S_n}}$

$$P\left(|T_n| \leq t_{n,\alpha}\right) = P\left(|T_n| \leq \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{S_n}}\right)$$

$$= P\left(-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{S_n}} \leq \frac{Y}{\sqrt{S_n}}\sqrt{n} \leq \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{S_n}}\right)$$

$$= P\left(-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq Y \leq \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

car $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$= \Phi\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \Phi\left(-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$= 2\Phi\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) - 1$$

$= 2 \times \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1$ car Φ bijective sur $\mathbb{R}_+$

$$\boxed{= 1 - \alpha}$$

$\boxed{\text{Ainsi } \exists!\, t_{n,\alpha} \in \mathbb{R} \text{ tq } P(|T_n| \leq t_{n,\alpha}) = 1 - \alpha}$

5 a/ $\left| E\left(\sqrt{n}\, Y \times \frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)\right| \leq \sqrt{E(nY^2)\, E\left(\frac{1}{S_n}\right)}$

- $Y^2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ admet un moment d'ordre 2 et

$E(nY) = nE(Y) = 0$
- $E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ existe

Par domination $\boxed{E(T_n) = E\left(\frac{Y}{\sqrt{S_n/n}}\right) \text{ existe}}$

$0 \leq E(T_n) \leq |E(T_n)| \leq 0$

donc $\boxed{E(T_n) = 0}$

5b/ $V(T_n)$ existe si T_n admet un moment d'ordre 2.

$$T_n^2 = \frac{nY^2}{S_n}$$

$$E(T_n^2) = n \times E(Y^2) \times E\left(\frac{1}{S_n}\right) = n \times 1 \times \frac{1}{n-2}$$

car Y est indépendante des X_i donc de $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ qui est fonction de variables aléatoires mutuellements indépendantes. Ainsi Y est indépendant de S_n.

donc $\boxed{V(T_n) \text{ existe}}$ et $V(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2$

$$= E(T_n^2) - 0$$

$$\boxed{V(T_n) = \frac{n}{n-2}}$$

5c/

$$E\left((T_n - Y)^2\right) = E\left(T_n^2 - 2T_nY + Y^2\right)$$

$$= E(T_n^2) + E(Y^2) - E(2T_nY)$$

par linéarité de l'espérance.

$$= \frac{n}{n-2} + 1 - E(2T_nY)$$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - E\left(\frac{2Y^2}{\sqrt{S_n/n}}\right)$$

$$E\left(\frac{2Y^2}{\sqrt{S_n}}\sqrt{n}\right) = E\left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{S_n}}\, Y^2 \times \sqrt{n}\right)$$

$$= E(Y^2) \times \sqrt{2n} \times E\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{S_n}}\right)$$

par indépendance de Y et S_n.

donc $\boxed{E\left((T_n - Y)^2\right) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n} \times 1 \times E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)}$

car $\frac{1}{W_n} = \frac{2}{S_n}$

6/a) Soit $n \geq 2$.

$$W_{n+1} - W_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$= \frac{1}{2}(X_{n+1})^2 \geq 0$$

donc $W_{n+1} \geq W_n$ et $\sqrt{W_{n+1}} \geq \sqrt{W_n}$

ie $\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{W_n}}$

Par croissance de l'espérance $E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) \leq E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$$\boxed{U_{n+1} \leq U_n}$$

donc $\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante}}$

Soit $n \geq 2$.

6b) $U_{n+1} \cdot U_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

~~$U_2 = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right) = E\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{S_2}}\right)$~~

6c/
```
def suite_u(n)
        U =(n-1) * [0]
        U[0] =
        For k in range (1, n-1)
             U[K] = (2 / n-1) * 1/ U[K-1]
        return U .
```

6d/ On obtient 79 valeurs correspondants à $U_2 = U[0]$ $U_3 = U[1]$ ... de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les points successifs sont les ordonnées de $n \cdot U_n^2$ selon les valeurs de n de 2 à 80. ~~La~~ La courbe que forment les points se rapproche de 2 ~~On peut conjecturer q~~ quand n grandit.

On peut conjecturer que $n \cdot U_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

donc $U_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{n}$ ie (U_n) converge

et $\boxed{U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{2}{n}}}$

$(n \geq 2)$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) = P((T_n - Y)^2 \geq \varepsilon^2)$$
$$= P(E((T_n-Y)^2) \geq E(\varepsilon^2))$$
$$= P(E((T_n-Y)^2) \geq \varepsilon^2)$$

$$E((T_n-Y)^2) = 2\,\frac{n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

$$U_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\sqrt{2n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$$

$$E((T_n-Y)^2) \underset{n\to+\infty}{=} 2 - 2 + o(1)$$

$$P(E((T_n-Y)^2) < \varepsilon^2) \longrightarrow 1$$

$$P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) = 1 - P(E(T_n-Y)^2 < \varepsilon)$$
$$\longrightarrow 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{T_n \xrightarrow{P} Y}$$

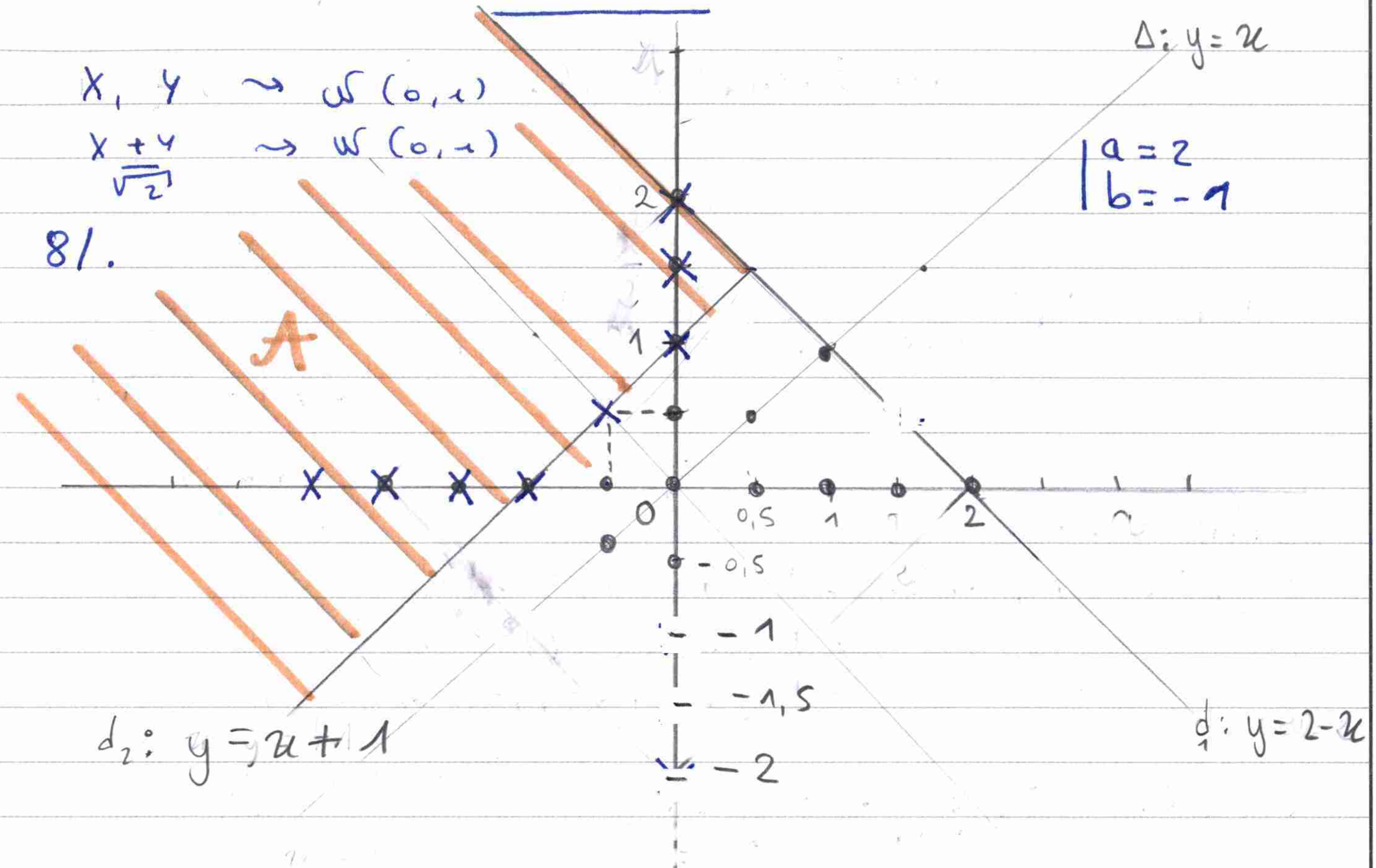
2e Partie

$X, Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

8/.

$\left| \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array} \right.$



9 a/ Soit $y \in \mathbb{R}$, $y \geq d = \frac{a-b}{2}$

$(x,y) \in \mathcal{A}$ ssi $\begin{cases} x + y \leq a \\ x - y \leq b \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x \leq a - y \\ x \leq b + y \end{cases}$

ssi $x \leq \min(a-y, b+y)$

$y \geq \frac{a-b}{2}$ ie $-y \leq -\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$a - y \leq \frac{-a+b}{2} + a$

$a - y \leq \frac{b+a}{2}$ et $b + y \geq \frac{b+a}{2}$

donc $(x,y) \in A$ ssi $x \leq a-y$
ie ssi $x \in]-\infty, a-y]$

9 b/ Si $x \in]-\infty, a-y]$

$(x,y) \in A$, et $\mathbb{1}_A(x,y) = 1$.

~~$P((X,Y)\in A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)dx \right) \varphi(y)\,dy$~~

~~car X et Y indépendantes et suivent la loi normale centrée réduite.~~

φ est une densité de $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

~~$P((X,Y)\in A)$~~ =

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a-y} \mathbb{1}_A(x-y)\,\varphi(x)\,dx$$

$$+ \int_{a-y}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx$$

Comme $\mathbb{1}_A(x,y) = 0$ lorsque $x > a-y$

$\int_{a-y}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = 0$ et $\mathbb{1}_A(x,y) = 1$ si $x \leq a-y$

donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)} = \int_{-\infty}^{a-y} 1 \times \varphi(x)\,dx$

$\boxed{= \Phi(a-y)}$

10/ Soit $y \in \mathbb{R}$ tq $y \leq d$.

$(x,y) \in A$ ssi $\begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \end{cases}$

ssi $x \leq \min(a-y, b+y)$

or $b+y \leq \frac{b+a}{2}$ et $a-y \geq \frac{a+b}{2}$

donc $(x,y) \in A$ ssi $x \leq b+y$

Si $\mathbb{1}_{A(x,y)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq b+y \\ 0 & \text{si } x > b+y \end{cases}$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{A(x,y)} \varphi(x)\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{b+y} 1 \times \varphi(x)\,dx + \underbrace{\int_{b+y}^{+\infty} 0 \times \varphi(x)\,dx}_{=0}$$

$$= \boxed{\Phi(b+y)}$$

11/ a) $f : (x,y) \longmapsto x+y$
$g : (x,y) \longmapsto x-y$

f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{A = f^{-1}(]-\infty, a]) \cap g^{-1}(]-\infty, b])}$$

En tant qu'intersection de deux parties fermées (images réciproques des ~~ent~~ parties fermées $]-\infty, a]$ et $]-\infty, b]$ par deux fonctions continues f et g)
$\boxed{A \text{ est fermée.}}$

11/ b/ X, Y indépendantes suivant la loi normale centrée réduite ~~dont~~ une densité est φ.

$$P((X,Y) \in A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{A(x,y)} \varphi(x)\,dx \right) \varphi(y)\,dy$$

$$\cancel{= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Phi(a-y) + \Phi(b+y)\right) \varphi(y)\,dy}$$

16/ On a $P((X,Y) \in A) = P(X \in A) P(Y \in A) = \Phi\left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right)$
$(X+Y)\sqrt{2}$ et $(X-Y)\sqrt{2}$ sont indépendantes et $\sim \mathcal{N}(0,1)$

Copie anonyme - n°anonymat : 100243

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 15 | Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES HEC/ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III

17/ a) ~~$\langle x, a_k \rangle$~~ ~~$\sum$~~

$$\sum_{k=2}^{m} \langle x, a_k \rangle a_k = \langle x, a_2 \rangle a_2 + \langle x, a_3 \rangle a_3 \cdots + \langle x, a_m \rangle a_m$$

~~$\forall k \in [\![2, m]\!]$~~ $$\langle x, a_1 \rangle a_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\sqrt{m}} \times \frac{1}{\sqrt{m}} (1, \dots 1)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i \,(1, \dots, 1)$$

$$= (\bar{x}, \bar{x}, \dots \bar{x})$$

~~$\sum_{k=2}^{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\sqrt{m}} \left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$~~ ~~Comme $(a_1 \dots a_m)$ orthonormée~~ (*)

$$= \cancel{\sum_{i=1}^{m}} \quad \sum_{k=2}^{m} \langle x, a_k \rangle a_k = (x_1, \dots x_m) - (\bar{x}, \bar{x} \dots \bar{x})$$

$$= (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x} \dots, x_m - \bar{x})$$

(*) Comme $(a_1 \dots a_m)$ base orthonormée $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_m) = x = \sum_{k=1}^{m} \langle x, a_k \rangle a_k$$

17 b) $$\sum_{k=2}^{m} \langle x, a_k \rangle^2 = \cancel{\sum_{k=1}^{m} \langle x, a_k \rangle^2 - \langle x, a_1 \rangle^2}$$

$$\cancel{= \|x\|^2 -}$$

$$= \|(x_1 - \bar{x}, \dots x_m - \bar{x})\|^2$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\cancel{\sum_{i=1}^{n}}$ $\| (x_1 - \overline{x}, \dots, x_m - \overline{x}) \|^2$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x})^2}$$

18 a/ X et Y indépendants

19 a/ $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$ mutuellement indépendants

$\overline{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{m})$

(car $\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{N}(0, m)$) ~~et~~ $\cancel{\frac{1}{m}}$

~~donc~~

19 b/ $Y_k = \langle X, a_k \rangle = \sum_{i=1}^{m} X_i a_i$

$\cancel{\overline{X} = \frac{1}{m} Y_k}$ $\boxed{U = \sum_{k=2}^{m} Y_k^2}$ d'après 17/b

$X - \overline{X} = \sum_{k=2}^{M} Y_k a_k$

$$\boxed{\overline{X} = X - \sum_{k=2}^{M} Y_k a_k}$$

19 / c) les variables Y_k sont mutuellements indépendants donc $\overline{X}$ et U en tant que fonctions de variables mutuellements indépendants sont indépendants

~~2a~~

~~2a~~ 2a a/ $\sigma X_i + p = Z_i$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma X_i + p - \overline{Z} \right)^2$$

$$\overline{Z} = \frac{(\sigma X_1 + p) + (\sigma X_2 + p) \dots + (\sigma X_n + p)}{m}$$

$$\cancel{V} = \frac{\sigma}{m} \left(X_1 + \dots + X_n \right) - \frac{n}{m} \times p$$

$$\overline{Z} = \sigma \overline{X} + p$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma X_i + p - (\sigma \overline{X} + p) \right)^2$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma (X_i - \overline{X}) \right)^2$$

$$\boxed{V = \sigma^2 U}$$

V admet une espérance car ~~V(X)=U~~ $V(X) = mU$ existe.

2b/ $\boxed{E\left(\frac{1}{m-1} V \right)}$

$$= \frac{1}{m-1} E(V)$$

$$= \frac{1}{m-1} \sigma^2 E(U)$$ par linéarité

$$= \frac{\sigma^2}{m-1} V(X)$$

$$= \frac{\sigma^2}{m-1} \times m$$

$$= \sigma^2 \cancel{x} - \frac{1}{m-1}$$ petite erreur quelque part !

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751