Copie anonyme - n°anonymat : 359301

N9-00114
359301
Mat Appro

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 16 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies (HEC-ESSEC)

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I :

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ est le produit scalaire de E et comme tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E \in \mathbb{R}$

Or ℓ est une application linéaire de E dans F
Donc il existe un unique vecteur $a_0 \in E$ tq $\langle a_0, x\rangle_E = \ell(x)$

Bilan : Il existe un unique vecteur $a_0 \in E$ tq $\forall x \in E,\ \ell(x) = \langle a_0, x\rangle_E$

2. $\forall x \in E$, $\langle u(x), y\rangle_F \in \mathbb{R}$ car produit scalaire
donc l'application $x \mapsto \langle u(x), y\rangle$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ ($x \in E$)
Donc avec 1/ on a bien qu'il existe un unique $z_y \in E$ tq

$$\forall x \in E\ \langle u(x), y\rangle_F = \langle z_y, x\rangle_E$$

Bilan : Il existe un seul $z_y \in E$ tq $\forall x \in E\ \langle u(x), y\rangle_F = \langle z_y, x\rangle_E$

3. Soit $(x, y) \in F \times F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u^*(x + \lambda y) &= z_{(x+\lambda y)} \\ &= z_x + \lambda z_y \\ &= u^*(x) + \lambda u^*(y) \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Bilan : $u^* : \begin{cases} F \mapsto E \\ y \mapsto z_y \end{cases}$ est linéaire

4. $A = \mathrm{Mat}_{B_F, B_E}(u)$

or B_F, B_E sont des bases orthonormales

et $\forall x \in E, \forall y \in F, \langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E$

et $A = \cancel{\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(u) \overset{B_E, B_F \text{ bases orthonormales}}{=} (\langle u(e_j), f_i \rangle)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = (\langle e_j, u^*(f_i) \rangle)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}}$

symétrie produit scalaire $\rightarrow$ $\cancel{= (\langle u^*(f_i), e_j \rangle)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = {}^tA = \mathrm{Mat}_{B_E B_F}(u^*)}$

$\mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u^*) = (\langle e_i, u^*(f_j) \rangle_E)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

$= (\langle u(e_i), f_j \rangle_F)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

$= {}^t(\mathrm{Mat}_{B_F, B_E}(u))$

$= {}^tA$

Bilan : $\mathrm{Mat}_{B_E B_F}(u^*) = {}^tA$

4. $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{B_E B_F}(u^*))$

$= \mathrm{rg}({}^tA)$

$\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}({}^tA)$
$= \mathrm{rg}(A)$
$= \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{B_F B_E}(u))$
$= \mathrm{rg}(u)$

$\boxed{\text{Bilan : } \mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)}$

$\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}((u^*)^*) = {}^t(\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(u^*))$
$= {}^t({}^tA)$

$= A$

$\boxed{\text{Bilan : } (u^*)^* = u}$

5. Soit $x \in \mathrm{Im}(u^*)$, $\exists y \in F$ tq $u^*(y) = x$
Soit $z \in \mathrm{Ker}(u)$ tq $u(z) = 0$

$\langle x, z \rangle_E = \langle u^*(y), z \rangle_E$ car $x \in \mathrm{Im}(u^*)$

$= \langle u(z), y \rangle_F$

$= \langle 0, y \rangle_F$ car $z \in \mathrm{Ker}(u)$

$= 0$

donc $\mathrm{Im}(u^*) \perp \mathrm{Ker}(u)$

donc $\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp$

Par théorème du rang

$\mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) = p$

or $rg(u) = rg(u^*)$

donc $rg(u^*) + \dim(\ker(u)) = p$

$\Rightarrow rg(u^*) = p - \dim(\ker(u))$
$= \dim(\ker(u)^\perp)$

$$\boxed{\text{Bilan : } \mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp}$$

6. Soit $x \in \ker(u)$
$u(x) = 0$
$\Rightarrow u^* \circ u(x) = 0$
donc $x \in \ker(u^* \circ u)$
donc $\ker(u) \subset \ker(u^* \circ u)$

Soit $X \in \ker({}^tAA)$

$\Rightarrow {}^tAAX = 0$
$\Rightarrow {}^tX\,{}^tAAX = 0$
$\Rightarrow \langle AX, AX \rangle = 0$
$\Rightarrow \|AX\|^2 = 0$
$\Rightarrow AX = 0$

donc $X \in \ker(A)$

d'où $\ker({}^tAA) \subset \ker(A)$
et $\ker(u^* \circ u) \subset \ker(u)$

$$\boxed{\text{Bilan : Par double inclusion } \ker(u^* \circ u) = \ker(u)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 359301

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 16	Session : 2025
	Épreuve de : Maths. appro (HEC - ESSEC)		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Par théorème du rang on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = p$$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(u^* \circ u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = p$$

or $\dim(\mathrm{Ker}(u^* \circ u)) + \dim(\mathrm{Im}(u^* \circ u)) = \dim(E) = p$

car u va de E dans F et u^* de F dans E donc $u^* \circ u$ est une application de E dans E

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(u^* \circ u)) = \dim(\mathrm{Im}(u))$$

Soit $X \in \mathrm{Im}({}^tAA)$, $\exists Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tq ${}^tA\underbrace{AY}_{\in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} = X$

donc $X \in \mathrm{Im}({}^tA)$

donc $\mathrm{Im}({}^tAA) \subset \mathrm{Im}({}^tA)$

d'où $\mathrm{Im}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Im}(u^*)$

Puis avec l'égalité des dimensions :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(u^*)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7. w est linéaire par composé de 2 applications linéaires
Donc w est un morphisme

On a que $I-(u^* \circ u) = I-(u^*) = \ker(u)^\perp$

En admettant la bijectivité de w,

$\boxed{w \text{ est un isomorphisme}}$

$w = u^* \circ u$ ~~bijective donc $w^{-1} = u^{-1} \circ (u^*)^{-1}$~~

$\boxed{\text{Donc } M = {}^tAA \text{ est inversible } M^{-1} = ({}^tAA)^{-1} = A^{-1}({}^tA)^{-1}}$

9. $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

Donc M inversible $\Leftrightarrow rg(M) = p$

$\Leftrightarrow rg({}^tAA) = p$

$\Leftrightarrow$ ~~$rg({}^tAQA) = p$~~

10. ${}^tAQ = {}^tA$

$\Rightarrow {}^tAQA = {}^tAA = M$

${}^tAQ = {}^tA$ $\quad Q = AM^{-1}A \Rightarrow {}^tAQ = {}^tAAM^{-1}Q$

$\Leftrightarrow {}^tAQ = MM^{-1}Q$

$\Leftrightarrow {}^tAQ = Q$

$\boxed{\text{B:Q: } Q = AM^{-1}A}$

b.

```
import numpy.linalg as al
import numpy as np
def Calcule_Q(A):
    [i,p]= np.shape(A)
        if al.matrix_rank(A) == p:
            return A * al.inv(np.transpose(A)* A) *np.transpose(A)
        else:
            return erreur
```

11. $\forall X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$

$$ {}^tXMX = {}^tX\,{}^tAAX $$
$$ = \|AX\|^2 \geq 0 $$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXMX \geq 0}$$

II.

12. $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ $H \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$

$$ J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\|A(X+H)-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2 $$
$$ = \frac{1}{2}\|AX+AH-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2 $$
$$ = \frac{1}{2}\,{}^t(AX+AH-Y)(AX+AH-Y) - \frac{1}{2}\,{}^t(AX-Y)(AX-Y) $$
$$ = \frac{1}{2}({}^tX{}^tA + {}^tH{}^tA - {}^tY)(AX+AH-Y) - \frac{1}{2}({}^tX{}^tA - {}^tY)(AX-Y) $$
$$ = \frac{1}{2}\big({}^tX{}^tAAX + {}^tX{}^tAAH + {}^tX{}^tA(-Y) + {}^tH{}^tAAX + {}^tH{}^tAAH $$
$$ - {}^tH{}^tAY - {}^tYAX - {}^tYAH + {}^tYY\big) $$
$$ - \frac{1}{2}\big({}^tX{}^tAA - {}^tX{}^tAY - {}^tYAX + {}^tYY\big) $$
$$ = \frac{1}{2}\big(({}^tXMX + {}^tXMH - {}^tX{}^tAX + {}^tHMX + {}^tHMH - {}^tH{}^tAY - {}^tYAX $$
$$ - {}^tYAH + {}^tYY - {}^tXM + {}^tX{}^tAY + {}^tYAX - {}^tYY $$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\left({}^tXMX + {}^tXMH + {}^tHMX + {}^tHMH - {}^tH\,{}^tAY - {}^tYAH - {}^tXM\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left({}^tXMX + {}^tXMH + {}^tHMX - {}^tH\,{}^tAY - {}^tYAH - {}^tXM\right) + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\left(\langle A(X+H)-Y, A(X+H)-Y\rangle - \langle AX-Y, AX-Y\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle A(X+H), A(X+H)\rangle - 2\langle Y, A(X+H)\rangle + \cancel{\langle Y,Y\rangle} - \langle AX, AX\rangle + 2\langle Y, AX\rangle - \cancel{\langle Y,Y\rangle}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle AX+AH, AX+AH\rangle - 2\langle Y, AX+AH\rangle - \langle AX, AX\rangle + 2\langle Y, AX\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cancel{\langle AX, AX\rangle} + 2\langle AX, AH\rangle + \langle AH, AH\rangle - \cancel{2\langle Y, AX\rangle} - 2\langle Y, AH\rangle - \cancel{\langle AX, AX\rangle} + \cancel{2\langle Y, AX\rangle}\right)$$

$$= \langle AX, AH\rangle + \frac{1}{2}\langle AH, AH\rangle - \langle Y, AH\rangle$$

$$= {}^t(AX)AH + \frac{1}{2}\,{}^t(AH)AH - {}^tYAH$$

$$= {}^tX\underbrace{{}^tAA}_{M}H + \frac{1}{2}\,{}^tH\underbrace{{}^tAA}_{M}H - {}^tYAH$$

$$= {}^tXMH - {}^tYAH + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$$

or $\langle D(X), H\rangle = \langle MX - {}^tAY, H\rangle$
$$= \langle MX, H\rangle - \langle {}^tAY, H\rangle$$
$$= {}^t(MX)H - {}^t({}^tAY)H$$
$$= {}^tX\,{}^tMH - {}^tYAH$$
$$= {}^tXMH - {}^tYAH$$

car ${}^tM = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA)$
$$= {}^tAA$$
$$= M$$

$\boxed{\text{Bilan : } \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\quad J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tHMH}$

Copie anonyme - n°anonymat : 359301

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 16

Session : 2025

Épreuve de : Maths. appro (HEC - ESSEC)

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

13. $J_0(X+H) = J_0(X) + \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tHMH$

15. $X \in S_0$

$D(X) = 0$

$\Rightarrow MX - {}^tAY = 0$

$\Rightarrow MX = {}^tAY$

$\Rightarrow MX = {}^tAQY$

$\Rightarrow {}^tAAX = {}^tAQY$

$\Rightarrow {}^tX\,{}^tAAX = {}^tX\,{}^tAQY$

$\Rightarrow \|AX\|^2 = \langle AX, QY\rangle$

$\Rightarrow AX = QY$

$\boxed{\text{Bilan : } X \in S_0 \quad AX = QY}$

c. $D(X) = MX - {}^t\!AY$

$= M M^{-1}\,{}^t\!AY - {}^t\!AY$

$= {}^t\!AY - {}^t\!AY$

$= 0$

donc $X \in S_0$

$X' \in S_0 \iff D(X') = 0$

$\iff MX' - {}^t\!AY = 0$

$\iff MX' = {}^t\!AY$

$\iff M^{-1}MX' = M^{-1}\,{}^t\!AY$ M inversible car $rg(A) = p$

$\iff X' = M^{-1}\,{}^t\!AY$

$\boxed{\text{Bilan : } S_0 = \{X\} \text{ avec } X = M^{-1}\,{}^t\!AY}$

16. en admettant $T = \|QZ\|^2$

$\|QZ\|^2 = {}^t(QZ)\,QZ$

$= {}^t\!Z\,{}^t\!Q\,QZ$

$= {}^t\!Z\,{}^t(AM^{-1}\,{}^t\!A)(AM^{-1}\,{}^t\!A)Z$

$= {}^t\!Z\,A\,{}^t(M^{-1})\,\underbrace{\underbrace{{}^t\!A\,A}_{M}\,M^{-1}}_{I}\,{}^t\!A\,Z$

$= {}^t\!Z\,A\,{}^t(M^{-1})\,{}^t\!A\,Z$

$= {}^t\!Z\,A\,({}^t\!M)^{-1}\,{}^t\!A\,Z$

$= {}^t\!Z\,A\,M^{-1}\,{}^t\!A\,Z$ car ${}^t\!M = M$

$= {}^t\!Z\,QZ$

$\boxed{\text{Bilan : } \|QZ\|^2 = {}^t\!ZQZ}$

c.
```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simuleT(A, sigma):

    [n,;]= np.shape (A)
    N = rd.normal(0, sigma, n)
    Z = np.transpose(N)
    Q = Calcul_Q(A)        ← question 10.b
    T =   np.transpose(Z) * Q * Z
    return T
```

c.
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def esperance(A, sigma):
    m = 1000        # grande valeur de m
    V = np.ones(m)
    for i in range (1, m):
        V[i] = simuleT(A, sigma)
    S =   np.sum(V) / m
    return S
```

d. • Au vue des résultats obtenu il semblerait que E(T) = p où p correspond au nombre de colonnes de A

$\boxed{\text{On conjecture } E(T) = p \text{ où } p \text{ est le nombre de colonne de } A}$

• Sur ce graphique on conjecture que plus sigma est grand plus l'espérance de T tend vers +∞

e. $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$E(Z_1^2) \overset{\text{Huygens}}{=} V(Z_1) + E(Z_1)^2$$
$$= \sigma^2 + 0$$
$$= \sigma^2$$

$E(Z_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$ l'intégrande étant impaire si elle converge elle vaut 0.

$t \mapsto t^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ par produit et composé de fonctions qui le sont

Posons $u = \frac{t}{\sqrt{2}\sigma}$

$du = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$

$\begin{cases} (t \to +\infty) \Leftrightarrow (u \to +\infty) \\ (t \to 0) \Leftrightarrow (u \to 0) \end{cases}$ $\sqrt{2}\sigma > 0$

$t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2}\sigma}$ est C^1 et strict croissant sur $\mathbb{R}^+$ donc le changement de valeur au changement ni la valeur ni la nature en l'intégrale :

Soit $A > 0$, $B < 0$ $\int_B^A \frac{t^3 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} dt$

Posons $\forall t \in [B, A]$ $u(t) = t^2$ $u'(t) = 2t$

$v(t) = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ $v'(t) = t\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$

u et v étant C^1 sur $[B, A]$ par intégrations par parties:

$$\int_B^A t^3 \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dt = \left[\frac{-t^2\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right]_B^A + 2\sigma^2 \int_B^A t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} dt$$

$$= \underbrace{\frac{B^2 e^{-\frac{B^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}}}_{\xrightarrow[B \to -\infty]{} 0} - \underbrace{\frac{A^2 e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}}}_{\xrightarrow[A \to +\infty]{} 0} + 2\sigma \int_B^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$$

par croissances comparées

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 16

Session : 2025

Épreuve de : Maths. appro (HEC - ESSEC)

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

En faisant tendre successivement A vers $+\infty$ et B vers $-\infty$ on a C existe en reconnaissant l'espérance d'une loi normale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} dt = 2\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}_{}$$

Converge car égale à $E(Z_1)$

d'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-\frac{t^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} dt$ converge

donc $E(Z_1^3) = 0$

~~$E(Z_1^4) = E((Z_1^2)^2) \overset{\text{Huygens}}{=} V(Z_1^2) + (E(Z_1^2))^2$~~

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

L'intégrande étant paire en cas de convergence

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^4 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} dt$$

$u = \dfrac{t^2}{2\sigma^2}$

$du = \dfrac{t}{\sigma^2}\, dt$

$\begin{cases} (t \to 0) \Leftrightarrow (u \to 0) \\ (t \to +\infty) \Leftrightarrow (u \to +\infty) \quad (2\sigma^2 > 0) \end{cases}$

Le changement de variable ne changeant ni la valeur ni la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sigma \frac{t^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \frac{t}{\sigma^2} dt = \int_0^{+\infty} \sigma \frac{(\sqrt{2\sigma^2 u})^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-u} du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sigma \sqrt{2}^3 \sigma^3}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{u}^3 e^{-u} du$$

$$= \frac{\sigma \sqrt{2}^3 \sigma^3}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{\frac{3}{2}} e^{-u} du}_{= \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}^3 \sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{3}{4} \times \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}^3 \sigma^4 3}{4\sqrt{2}}$$

Donc $E(Z_1^4) = \dfrac{2 \times \sqrt{2}^3 \sigma^4 3}{4\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2}^3 \sigma^4 3}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}^2 \sigma^4 3}{2}$$

$$= 3\sigma^4$$

$$\boxed{\text{Bilan : } E(Z_1^2) = \sigma^2 \quad E(Z_1^3) = 0 \quad E(Z_1^4) = 3\sigma^4}$$

Soient $u, v \in (\mathbb{R}^n)^2$ $u \neq 0$

20\. a. $\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2$

$= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 - \left(\|u\|^2 + 2\|u\|\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|} + \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}\right)$

$= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 - \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$

$= \|v\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$

$= \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$

$\boxed{\text{Bilan} : (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2\ u \neq 0,\ \|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 = \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}}$

b. On a ainsi $\|u+v\|^2 - \|u\|^2 = \underbrace{\frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} + 2\langle u,v\rangle + \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}}$

$= \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 + 2\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}$

23 : b. F est C^0 sur $]0;+\infty[$ par somme de fonctions qui le sont et quotients $(\lambda + \alpha_i^2 > \alpha_i^2 > 0)$ (1)

De même F est dérivable sur $]0;+\infty[$ en admettant que F soit strict monotone

$F(0) = -1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{\alpha_i^4}$

$= -1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\alpha_i^2}}_{>1}$

donc $F(0) > 0$ $\quad \lim_{\lambda \to +\infty} -1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} y_i^2 = -1$

avec 23. a par comparaison

$\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) \quad S-1$

$\boxed{\text{Donc } \exists! \lambda_0 \in]0; +\infty[\text{ tq } F(\lambda_0)=0}$

d. import numpy as np

c
```
def FoncSom (alpha, Y, Ida) :
        S = np. sum ((alpha **2) + (Y **2)) / ((Ida + alpha
            ** 2)) ** 2)
        return -1 + S
```

ci.
```
import numpy as np
def Calc Beta (alpha, Y, epsilon) :
        a=0
        b = (1/4) * np.sum (Y **2)
        while b-a > ε :
                m = a+b/2
                if FoncSom(alpha, Y, m) > 0 :
                        b = FoncSom(alpha, Y, m)
                else :
                        a = FoncSom (alpha, Y, m)
        return ~~a~~
```