500088

ERRAGNE

THÉO

02/08/2004

Note de délibération : 17.29 / 20

Numéro d'inscription 500088

Né(e) le 02/08/2004

Nom ERRAGNE

Prénom (s) THEO

Signature

17.29 / 20

Écricome Épreuve : Maths approfondies

Sujet □ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/08

Numéro de table 007

Exercice 1

1/ (a) On reconnaît que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $2>1$. Donc évidement :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge}}$$

(b) En passant à la valeur absolue, on a
$\sum_{n\geq 1} \frac{|(-1)^n|}{n^2} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

Or, on a vu que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Donc par critère de comparaison des séries de terme positif, il vient

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ converge absolument donc converge}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.29 / 20

(c) Soit $N > 0$. $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{k=2n+1}{=} \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

De même, on a vu que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc par ce changement de variable, on peut affirmer que :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ converge}}$$

2) • $A - B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}$

$$\underset{k=\frac{n-1}{2}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+1}{(2k+1)^2} \text{ par parité}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 2C$$

Donc $\boxed{A - B = 2C}$

• De même, :

$$C + \frac{1}{4} A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$ par le même changement de variable que 1-(c)

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4n^2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{4n^2}$$

On a plutôt d'après ce qui précède :

$$A = 2C - \Delta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$ avec le même changement de variable que précédemment

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\underset{k=2n+1}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

On remarque que $\frac{1}{4} A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$. Donc il vient :

$$A + \frac{1}{4} A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

Cela corespond à la somme des termes paires de $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ additionnée à la somme des termes impaires, ce qui donne finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. D'où :

$$\boxed{A = C + \frac{1}{4} A}$$

3/ (a) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on sait que :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & (1) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & (2) \end{cases}$$

Donc en additionnant (1) et (2), il vient :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) - \sin(a)\sin(b)$$

D'où au final :

$$\boxed{\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)} \qquad (*)$$

1b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: " $\forall t \in [0;\pi]$, $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ "

• <u>Initialisation :</u> Dans le cas où $n = 1$, on a

$$-\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{3}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{2\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{3}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= -\cos(t) \quad \text{d'après } (*)$$

Donc la propriété est initialisée au rang 1.

• <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) = (-1)^{n+1}\cos((n+1)t) - \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{2(-1)^{n+1}\cos((n+1)t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + (-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Numéro d'inscription 500088

Né(e) le 02/08/2004

Nom ERRAGNE

Prénom (s) THEO

17.29 / 20

Ecricome Épreuve : Maths approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 08

Numéro de table 007

Signature

$$= -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n \left(\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - 2\cos((n+1)t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Or, d'après (*), on a :

$$= -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n \left(\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left((n+1)t + \frac{t}{2}\right) - \cos\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right)\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n \left(\cancel{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)} - \cos\left(\frac{(2n+3)}{2}t\right) - \cancel{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2} \quad (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \qquad \text{CQFD}}$$

4) (a) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a<b$. f est une fonction continue sur $[a,b]$ un fermé borné. Donc elle est elle même bornée et ainsi :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall t \in [a;b],\ |f(t)| \leq M}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.29 / 20

De même, f est dérivable et f' est continue sur $[a,b]$ car f est de classe C^1. Donc par les mêmes raisons, on obtient :

$$\boxed{\forall t \in [a;b], \quad |f'(t)| \leq M}$$

(b) Montrons que $\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt$ converge

- $t \longmapsto f'(t)\sin(\lambda t)$ est continue soit sur $[a;b]$, auquel cas elle converge immédiatement, soit sur $]a;b[$.
- Alors on a : $\left|\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f'(t)\sin(\lambda t)|\,dt$

$$\leq \int_a^b M\,|\sin(\lambda t)|\,dt$$

Or : $|\sin(\lambda t)| \leq 1$.

$$\leq M(b-a)$$

Donc par encadrement, on vient de montrer que l'intégrale converge, admettons vers $L \in \mathbb{R}$.
Alors on a :

$$0 \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt \leq \frac{1}{\lambda}L.$$

Or, $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{L}{\lambda} = 0$. Donc par théorème d'encadrement, il vient :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0}$$

(c) On pose $\begin{cases} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v(t) = \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) & v'(t) = \cos(\lambda t) \end{cases}$

deux fonctions de classe C^1 sur $]a;b[$. Alors une IPP donne :

$$\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) = \left[\frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) f(t)\right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\sin(\lambda b) f(b) - \sin(\lambda a) f(a) - \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right)$$

Or, $\begin{cases} \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda b) f(b) = 0 \quad \text{car } |\sin(\lambda t)| \leq 1. \\ \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda a) f(a) = 0 \end{cases}$

et ainsi il reste $\frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt$. Or, on vient de voir que la limite de cette intégrale vaut 0. Donc finalement :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0}$$

5) (a) $\forall t \in]0;\pi]$, $\varphi : t \longmapsto \dfrac{t}{\sin(\frac{t}{2})}$

• On a $t \longmapsto \frac{t}{2}$ une fonction C^1 sur $]0;\pi]$ au même titre que $t \longmapsto \sin(t)$. Donc $t \longmapsto \sin(\frac{t}{2})$ est C^1 sur $]0;\pi]$ et elle ne s'annule pas sur l'intervalle. Donc par quotient, il vient :

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})} \text{ est } C^1 \text{ sur }]0;\pi]}$$

• On a alors φ une fonction dérivable et :

$$\underline{\forall t \in]0;\pi]}, \quad \varphi'(t) = \frac{\sin(\frac{t}{2}) - t \times \frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})^2}$$

$$\boxed{= \frac{\sin(\frac{t}{2}) - \frac{t}{2}\cos(\frac{t}{2})}{(1-\cos(\frac{t}{2}))^2}}$$

(b) On a $\sin(\frac{t}{2}) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t}{2}$.

Donc il vient : $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\sin(\frac{t}{2})} = 2}$

$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ car sa limite y est fini. et elle y vaut } 2}$

Numéro d'inscription 500081

Né(e) le 02/08/2004

Nom ERRAGNE

Prénom (s) THEO

17.29 / 20

Écricome Épreuve : Maths appro

Sujet ☐ 1 ou ☑ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 08

Numéro de table 007

(c) • Montrons d'abord que φ est dérivable en 0. c'est à dire que :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \text{ existe est et finie.}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \underline{0}$$

Donc φ est dérivable en 0. Montrons maintenant, puisque φ est C^1 sur $]0;\pi]$ par composé / somme de fonctions C^1 sur $]0;\pi]$, que φ' est continue en 0. On calcul $\lim_{t \to 0} \varphi'(t)$. On a :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t}{2} \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \to 0}{\sim} 1 \end{cases}$$ Donc il vient :

$\lim_{t \to 0} \varphi'(t) = \underline{0}$. et Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est } C^1 \text{ sur }]0;\pi]}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.29 / 20

(d) $\forall t \in [0;\pi[$, $f : t \longmapsto \dfrac{\pi - t}{\cos(\frac{t}{2})} = \varphi(\pi - t)$

Donc par composition, f est continue, dérivable et même C^1 sur $[0;\pi]$ puisqu'on a

$$\lim_{t \to \pi} f(t) = \varphi(0)$$

et que φ est C^1 sur $[0;\pi]$ d'après ce qu'on vient de voir. Donc au final :

$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité sur } [0;\pi] \text{ en une fonction de classe } C^1}$

6)(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

• Si k est paire : on note $k = 2p$ tel que :

$$\int_0^\pi (\pi - t)\cos(2p\,t)\,dt = \pi \int_0^\pi \cos(2pt)\,dt - \int_0^\pi t\cos(2pt)\,dt$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2p}\sin(2pt)\right]_0^\pi - \left(\left[\frac{t}{2p}\sin(2pt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2p}\sin(2pt)\,dt\right)$$

grâce à une IPP similaire à celle de (4)

$$= \pi \left[\frac{1}{2p} \sin(2pt) \right]_0^\pi - \left[\frac{t}{2p} \sin(2pt) \right]_0^\pi - \frac{1}{2p} \left[\frac{1}{2p} \cos(2pt) \right]_0^\pi$$

$$= \frac{\pi}{2p} \sin(2p\pi) - \frac{\pi}{2p} \sin(2p\pi) - \frac{1}{4p^2} \cos(0)$$

$$= \underline{0}.$$

<u>• Si k est impaire</u> :

(b) $\underline{\forall N \in \mathbb{N}^*}$, :

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt)\, dt = \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt)\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{(-1)^k \times 2}{k^2} \qquad \text{car } k \text{ est impair}$$

$$\underset{k=\frac{2N-1}{2}}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{-2}{(2n+1)^2}$$

$$\boxed{= -2 \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

7/ (a) D'après (3), on a aussi :

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt)\, dt = \int_0^\pi (\pi - t)\left(-\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\right) dt$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} + \underbrace{\int_0^\pi \left((-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\right) dt}_{=0} + \frac{\pi^2}{4} - \underbrace{\int_0^\pi t\, (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt}_{=0}$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}$$

Donc $-2 \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{4}$

Donc $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Donc $\boxed{C = \frac{\pi^2}{8}}$

(b) D'après les égalités déterminées en (1) :

$A = \frac{4}{3}$ $C = \frac{\pi^2}{6}$.

Numéro d'inscription 500088

Né(e) le 02/08/2004

Nom ERRAGNE

Prénom (s) THEO

17.29 / 20

Ecricome Épreuve : Maths approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☑ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/08

Numéro de table 007

et on a : $B = A - 2C = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12}$

D'où au final : $\boxed{\begin{cases} A = \frac{\pi^2}{6} \\ B = \frac{\pi^2}{12} \end{cases}}$

Exercice 2

Partie I :

1)(a)

(b) Notons $\mathcal{B}$ la famille étudiée en 1a). C'est une famille liée. Donc il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_9) \in \mathbb{R}^{10}$ non tous nuls tel que :

$$\sum_{k=0}^{9} \lambda_k M^k = 0$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.29 / 20

Ainsi, $P = \sum_{k=0}^{9} \lambda_k X^k$ est un polynôme de degré inférieur ou égale à 9, annulateur de M

4 (a)

```
def PolyAnn(M):
    if M**3 - 4*M**2 - 12*M - 28 = 0:
        return(True)
    else:
        return(False)
```

(b) On pose le système $AX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$AX = Y \iff \begin{cases} 3y + 2z = \lambda_1 \\ 2x + 2y + 4z = \lambda_2 \\ 5x + 2z = \lambda_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y + 4z = \lambda_2 \\ 5x + 2z = \lambda_3 \\ 3y + 2z = \lambda_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 5L_1 \quad \begin{cases} 2x + 2y + 4z = \lambda_2 \\ -10y - 16z = 2\lambda_3 - 5\lambda_2 \\ 3y + 2z = \lambda_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - 10L_1 \quad \begin{cases} 2x + 2y + 4z = \lambda_2 \\ -28z = 3(2\lambda_3 - 5\lambda_2) - 10\lambda_1 \\ 3y + 2z = \lambda_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\lambda_2 \\ y = \\ z = -\frac{3}{14}\lambda_3 + \frac{15}{28}\lambda_2 + \frac{10}{28}\lambda_1 \end{cases}$$

Bien plus simplement, il vient :

$$\varphi(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(M^2 - 24M - 12I_3) = 28I_3$$

Donc $\frac{1}{28} M(M^2 - 24M - 12I_3) = I_3$

Donc $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{28}(M^2 - 24M - 12I_3)}$

3) (a) Soit λ une valeur propre de M associée à X un vecteur propre $(X \neq 0)$ tel que $MX = \lambda X$.

$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda - 28 = 0$ car d'après le cours, les valeurs propres de M sont des racines d'un polynome annulateur

D'où $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } M \Rightarrow \varphi(\lambda)=0}$

(1b) Soit φ une fonction polynomiale. Donc φ est dérivable :

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}}, \ \varphi'(x) = 3x^2 - 8x - 12$$

Or, on a
$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (-12)$$
$$= 64 + 144$$
$$= 208 > 0$$

Donc $x_1 = \dfrac{8+\sqrt{208}}{6}$ $\qquad x_2 = \dfrac{8-\sqrt{208}}{6}$

$= \dfrac{4+2\sqrt{13}}{3}$ $\qquad = \dfrac{4-2\sqrt{13}}{6}.$

Or, on a $\varphi(x_2) < 0$ et $\varphi(x_1) = 0$.

Donc $x_1 = \dfrac{4+2\sqrt{13}}{3}$ est l'unique valeur propre réelle de M et $3 < \sqrt{13} < 4$
Donc elle est positive

(1c) M admet une unique valeur propre réelle x_1
Donc si elle est diagonalisable, $M = x_1 I_3$, ce qui n'est pas le cas Donc $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Numéro d'inscription: 500088

Né(e) le: 02/08/2004

Signature

Nom: ERRAGNE

Prénom (s): THEO

17.29 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/08

Numéro de table 007

Partie II :

4/ $${}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tMM = S$$

Donc $\boxed{S \text{ est symétrique}}$

5/ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S. On a alors :

$$\langle SX, X\rangle = \lambda \|X\|^2$$

Donc $$\lambda = \frac{\langle SX, X\rangle}{\|X\|^2} = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \quad (X \neq 0)$$

Donc $\boxed{\lambda > 0 \text{ par positivité du produit scalaire}}$

6/ S est une matrice symétrique, donc elle est diagonalisable et ainsi, il existe

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.29 / 20

$\boxed{D \text{ et } P \text{ tels que } \mathcal{J} = PD\,{}^tP \quad (P \text{ orthogonale})}$

7/ (a) Prenons $\Delta = \text{diag}(1\ ;\ 4\ ;\ 7)$

On a alors $\Delta^2 = D$. Or, on peut aussi prendre

$\Delta = \text{diag}(-1\ ;\ -4\ ;\ -7)$ telle que $\Delta^2 = D$.

Donc $\boxed{\text{il existe deux matrices } \Delta \text{ telles que } \Delta^2 = D}$

(b) $\boxed{\Delta \text{ est une matrice diagonale donc } \Delta \text{ est inversible (ses éléments diagonaux étant non nuls)}}$

8/ On a vu que $\mathcal{J} = PD\,{}^tP$. Donc il vient, d'après ce qu'on vient de voir : $\mathcal{J} = P\Delta^2\,{}^tP$.

Or, puisque P est orthogonale :

$$(P\Delta\,{}^tP)(P\Delta\,{}^tP) = P\Delta^2\,{}^tP = PD\,{}^tP.$$

Ainsi, $\boxed{R = P\Delta\,{}^tP}$ est une matrice symétrique (${}^tR = R$) telle que $R^2 = S$

9/ Soit $R = P\Delta {}^tP$. une matrice symétrique, produit de matrice inversible. Donc elle est inversible et,

$$\boxed{R^{-1} = (P\Delta {}^tP)^{-1} = ({}^tP)^{-1}\Delta^{-1}(P)^{-1} = P\Delta^{-1}{}^tP}$$

10/ vérifions que ${}^tUU = I_n$

$${}^tUU = {}^t(MR^{-1})MR^{-1} = {}^t(R^{-1})\,{}^tMMR^{-1}$$

$$= P\Delta^{-1}{}^tP\,PD\,{}^tP\,P\Delta^{-1}{}^tP$$

$$= P(\Delta^{-1})^2D\,{}^tP$$

$$= P(D)^{-1}D\,{}^tP \qquad \text{car } \Delta^2 = D$$

$$= P\,{}^tP \qquad = I_n$$

Donc $\boxed{U \text{ est orthogonale}}$

Partie III :

11/ Soit μ une valeur propre de R réelle Alors :

$RX = \mu X$ et $\langle RX, X\rangle = \mu \|X\|^2$

Donc $\mu = \dfrac{\langle RX, X\rangle}{\|X\|^2}$ $(X \neq 0)$

Donc $\mu = \dfrac{{}^tXP\Delta{}^tPX}{\|X\|^2} > 0$

Donc les valeurs propres de R sont strictement positives puisque celles de S le sont et que $R^2 = S$

12) • $T^2 = ({}^tVM)^2 = {}^tVM\,{}^tVM$

$= {}^tV\,UR\,{}^tV\,UR$ car $V = MR^{-1}$

$= {}^t({}^tVUR)\,{}^tVUR$ par orthogonalité

$= {}^tR\,{}^tU\,V\,{}^tVUR$

$= {}^tRR$

$= R^2$ car ${}^tR = P\Delta{}^tP = R$

$= S$

Donc $\boxed{T^2 = S}$

• $T^2 = PN^2\,{}^tP$ ie $S = PN^2\,{}^tP$.

Or, on sait que $S = PD\,{}^tP$.

Donc $\boxed{D = N^2}$

Numéro d'inscription S00088

Né(e) le 02/08/2004

Nom EPPAGNE

Prénom (s) THEO

Signature

17.29 / 20

Écricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 08

Numéro de table 007

13/ On vérifie que $TS = ST$:

$$TS = PN^tPPD^tP = PND^tP$$
$$= PND^tP \text{ car } N \text{ et } D \text{ diagonales}$$
$$= ST$$

Donc $\boxed{T \text{ et } S \text{ commutent}}$

14/ (a) $PE_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{k,j}\, e_{j,i}$

Or, $e_{i,j} = \delta_{i,j}$. Donc il reste :

$PE_i = \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}$, ce qui correspond aux valeurs de la colonne C^i de P

Donc $\boxed{PE_i = C_i}$

(b) $SC_i = P\Delta^tPC_i = P\Delta E_i = \Delta E_i P = \Delta C_i$.

Donc C_i est un vecteur propre de S associé à une valeur propre λ_i

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.29 / 20

(c) $STC_i = TSC_i = \lambda_i TC_i$. car S et T commutent

Donc TC_i est un vecteur propre de S associé à λ_i. i.e

$$\boxed{TC_i \in E_{\lambda_i}(S)}$$

(d)

15/ On a $N^2 = D$ où D est une matrice diagonale. Donc nécessairement, $\boxed{N \text{ est une matrice diagonale}}$

16/ $N^2 = D = \Delta^2$. Donc $N^2 = \Delta^2$. et on sait que les valeurs propres de T sont positives. Donc les coefficients de N le sont puisque $T = PN{}^tP$, et ainsi,

$$\boxed{N = \Delta}$$

- On a aussi $R = P\Delta P^{-1} = PNP^{-1} = T$.

Donc $\boxed{R = T}$

17/ $U = HR^{-1} = HT^{-1}$ car $R = T$.

Or, $VT = H$.

Donc $U = HT^{-1} = VTT^{-1} = V$

Donc $\boxed{U = V}$

Problème

Partie I :

~~1/ (a) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :~~

~~$$(1-t)^{y-1} = \exp\left((y-1)\ln(1-t)\right)$$~~

~~Or, $\ln(1-t) \underset{t \to 0}{\sim} -t$ et donc par continuité de l'exponentielle, il vient :~~

~~$$\lim_{t \to 0} \exp\left((y-1)\ln(1-t)\right) = e^{-(y-1)t} = e^{(1-y)t}.$$~~

1/ (a) On a directement $\boxed{t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}}$

(b) On a $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$

Etudions alors $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,dt$ en 0

- ~~Si~~ $x > 0$: l'intégrale et nettement convergente
- Si $x = 0$: $\int_0^{1/2} t^{x-1}\,dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{t}\,dt$ converge

comme intégrale de Riemann

- Si $x < 0$: $\int_0^{1/2} t^{x-1}\,dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$

Or, $1-x > 1$. Donc l'intégrale diverge toujours par critère de Riemann

Donc au final, par critère d'équivalence des intégrales de fonction positives :

$$\boxed{\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \text{ converge ssi } x > 0}$$

(c) Soit $t \longmapsto s = 1-t$ une bijection decroissante de classe C^1 de $[\frac{1}{2}; 1]$ dans $[0; \frac{1}{2}]$.
Alors le changement de variable $s = 1-t$ est licite avec $ds = \cancel{-dt}$ ie $dt = -ds$, ce qui donne

$$\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^{1/2} - (1-s)^{x-1} s^{y-1}\,ds$$

Numéro d'inscription 500088

Né(e) le 02/07/2004

Signature

Nom ERRAGNE

Prénom (s) THEU

17.29 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet 1 ou 2 ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 08

Numéro de table 007

Donc au final : $\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = -\int_0^{1/2}(1-s)^{x-1}t^{y-1}dt$,

ce qui suffit à affirmer que :

$$\boxed{\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \text{ est de même nature que } \int_0^{1/2}(1-s)^{x-1}t^{y-1}dt}$$

(d) On a déjà vu que $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge ssi $x>0$.
Donc il vient : $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-t)^{x-1}ds$ converge ssi $y>0$. Or, on a, sous réserve de convergence :

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

$$= \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt - \int_0^{1/2} s^{y-1}(1-t)^{x-1}dt.$$

Les intégrales convergent respectivements ssi

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.29 / 20

$x > 0$ et $y > 0$, on en déduit :

$$\boxed{\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \text{ converge ssi } x>0 \text{ et } y>0}$$

2/ En posant le même changement de variable que pour la question 1-(c), $s = 1-t$ étant toujours une bijection décroissante de classe C^1 de $[0;1]$ dans $[0;1]$, on obtient :

$$\boxed{\forall (x;y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\quad B(x;y) = B(y,x)}$$

3/ Soit $x > 1$:

$$\boxed{B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}}$$

4/ (a) $\forall (x;y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose ;

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{t^x}{x} & u'(t) = t^{x-1} \\ v(t) = (1-t)^{y-1} & v'(t) = -(y-1)(1-t)^{y-2} \end{cases}$$ deux fonctions

C^1 sur $[0;1]$ telles qu'une IPP donne :

$$B(x;y) = \left[\frac{t^x}{x}(1-t)^{y-1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^x}{x}(y-1)(1-t)^{y-2}\,dt$$

$$= \frac{y-1}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-2}\,dt = B(x+1, y-1)\,\frac{y-1}{x}$$

De là,
$$\begin{cases} B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x;y) \\ B(x; y+1) = \frac{x-1}{y} B(x; y). \end{cases}$$

Donc $\boxed{B(x+1, y) + B(x; y+1) = B(x;y)}$

(b) $\underline{\forall (x;y) \in]0;+\infty[^2}$, $B(x+1;y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,dt$

Donc en posant
$$\begin{cases} u(t) = t^x & u'(t) = xt^{x-1} \\ v(t) = -\frac{(1-t)^y}{y} & v'(t) = (1-t)^{y-1} \end{cases}$$
deux fonctions de classes C^1 sur $[0;1]$, on a,

$$B(x+1;y) = \left[-t^x\left(\frac{(1-t)^y}{y}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 xt^{x-1}\,\frac{1}{y}(1-t)^y\,dt$$

$$= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,dt$$

$$= \frac{x}{y} B(x; y+1)$$

D'où au final: $\boxed{y\,B(x+1;y) = x\,B(x;y+1)}$

(c) $\Delta(x;y) = \Delta(x+1;y) + \Delta(x;y+1)$

$$= \Delta(x+1;y) + \frac{y}{x}\Delta(x;y+1)$$

Donc $\Delta(x;y) = \dfrac{y+x}{x}\Delta(x+1;y)$

Donc $\boxed{\dfrac{x}{x+y}\Delta(x;y) = \Delta(x+1;y)}$ $(x \text{ et } y \neq 0)$

5) $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, d'après ce qui précède :

$$\begin{cases} \Delta(p,q) = \dfrac{p+q}{p}\Delta(p+1,q-1) \\ \Delta(p+1;q-1) = \dfrac{(p+1)+(q-1)}{p+1}\Delta(p+2,q-2) \\ \quad | \\ \Delta(p+q-2;2) = \dfrac{1}{(p+q-2)}\Delta(p+q-1,1) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{p+q-1}$$

Donc par télescopage, il vient enfin :

$$\Delta(p,q) = \frac{(p+q)\times((p+1)+(q-1))\times \text{———} \times 1}{p\times(p+1)\times \text{———} \times(p+q-1)}$$

$$\boxed{= \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}}$$ en multipliant par $p!$ en haut et en bas

Numéro d'inscription 500088

Né(e) le 02/08/2004

Signature

Nom ERRAGNE

Prénom (s) THEO

17.29 / 20

ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 08

Numéro de table 007

Partie II :

6/ (a) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!}$

(b) $\boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$

7/ (a) On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt$.

Or, $f_{a,b}(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge

Donc par comparaison, puis par continuité de $f_{a,b}$ sur $[0;1]$,

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt \text{ converge}}$

(b) ① $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0

② $f_{a,b}$ est positive sur $\mathbb{R}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.29 / 20

(3) $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt}\,dt$

$= \underline{1}$ en posant $\underline{u = bt}$.

Donc $\boxed{f_{a,b} \text{ défini une densité de probabilité}}$

8) (a) Si $b=1$, $f_{a,1} = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t}$.

Donc $\boxed{X \hookrightarrow \gamma(a)}$

(b) $f_{1,b} = b e^{-bt}$ donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(b)}$

9) (a) bX admet pour densité $\frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right)$

qui vaut $\frac{1}{\Gamma(a)} b^{a-1} \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} e^{-t}\,dt$

$= \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t}\,dt$

Donc $\boxed{bX \hookrightarrow \gamma(1)}$

(b) • bX admet une espérance $E(bX) = 1$.
Donc par linéarité :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{b}}$$

• De même, $V(bX) = 1$, donc $\boxed{V(X) = \frac{1}{b^2}}$

10/(a) $\boxed{\text{Produit de convolution}}$ avec X_1 et X_2 indépendantes

(b)

(c) $$B\left(\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{4})} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \boxed{2\sqrt{\pi}}$$

Partie III :

11/ (a) $E(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = E(U)E(1-U)$
puisque $U(\Omega) =]0;1[$. et donc :

$$E(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

(b)

```
def simul(x,y):
    U = rd.random()
    return(U**(x-1) * (1-U) ** (y-1))
```

(c) On utilise l'inégalité de Markov qui donne :

$$P(|R_n - B(x;y)| > \varepsilon) \leqslant \frac{1 - B(x;y)}{4^n n \varepsilon} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $\boxed{R_n \xrightarrow{P} B(x;y)}$

(d)

```
def Rn(x,y):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S = S + simul(x,y)
    return(1/n * S)
```

(e) Le résultat $\boxed{10(c)}$

12/ (a) $E(X^{a-1}) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} f_X(x)\, dx$

$$= \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \boxed{\Gamma(a)}$$

(b) $\boxed{E(M_n) = \Gamma(a)}$ et la LFGN donne $\boxed{M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \Gamma(a)}$

(c) $\boxed{\text{loi exponentielle de paramètre } 1}$ (d) $\boxed{\text{np.sum}(X)}$