500952

HOUSSU

CORENTIN

13/04/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 500952

Né(e) le 13/04/2005

Nom HOUSSU

Prénom (s) CORENTIN

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths : option techno

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 09

Numéro de table 18

Exercice 1 :

1a. $J = M - 2I$.

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{J^2 = 3J.}$$

c. On a $J = M - 2I$

$\cancel{\Rightarrow J^2 = (M - 2I)^2}$

$\cancel{= M^2 - 4M + 4I}$

$\Rightarrow M = J + 2I$

$\Rightarrow M^2 = (J + 2I)^2$

$\Rightarrow M^2 = J^2 + 4J + 4I$

$\Rightarrow M^2 = 3J + 4J + 4I$

$\Rightarrow M^2 = 7J + 4I.$

d. On a donc $M^2 = 7(M - 2I) + 4I$ (cf. question c.)

$\Rightarrow M^2 = 7M - 14I + 4I$

$\Rightarrow M^2 = 7M - 10I.$

2a. Puisque $M^2 = 7M - 10I$, alors $M^2 - 7M + 10I = O_3$.

De plus, $R(M) = M^2 - 7M + 10I$.

Donc $R(M) = O_3$.

On a donc R qui est un polynôme annulateur de M, car $R(M) = O_3$.

b. $R(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 10$
$= 4 - 14 + 10$
$= 0$.

On a donc bien 2 qui est racine du polynôme.

De plus, on sait que le produit des racines vaut $\frac{c}{a}$.
Ainsi on a $2 \times x_2 = 10$
$\Rightarrow x_2 = 5$

On a donc $x_1 = 2$ et $x_2 = 5$.

c. On sait que les valeurs propres possibles pour M sont parmi les racines du polynôme annulateur.
Ainsi, les valeurs propres possibles sont 2 et 5.

3. $$MU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On a donc $MU = 5U$.

5 est donc valeur propre de M avec comme vecteur associé U, car ~~il existe~~ $MU = 5U$ et $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. $MV = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{MV = 2V}$, donc V est vecteur propre de M associé à la valeur propre 2 car $MV = 2V$ et $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De même, $MW = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{MW = 2W}$, donc W est vecteur propre de M associé à la valeur propre 2 car $MW = 2W$ et $W \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5a. $QP =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} & \underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$\underline{QP = 3I.}$

b. On a $QP = 3I$, ce qui est de la forme $AB = \lambda I$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc P est inversible et $\underline{P^{-1} = \frac{1}{3} Q.}$

Numéro d'inscription 500952

Né(e) le 13/04/2005

Nom HOUSSU

Prénom (s) CORENTIN

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths : option techno

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 09

Numéro de table 18

5. c.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$MP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}}$$

On a bien $\underline{PD = MP}$.

d. Soit $P(n) : M^n = \frac{1}{3} PD^n Q \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

__Initialisation :__ $P(0) : M^0 = \frac{1}{3} PD^0 Q$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} PIQ$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} PQ.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$\Rightarrow I = P \frac{1}{3} Q.$

$\Rightarrow I = PP^{-1}$ car $P^{-1} = \frac{1}{3} Q$ (question b.)

$\Rightarrow I = I.$

<u>Hérédité</u> : Supposons $P(n)$ vraie pour un n fixé, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$P(n+1)$: $M^{n+1} = \frac{1}{3} PD^{n+1} Q.$

Si $P(n)$ vraie : $M^n = \frac{1}{3} PD^n Q.$

$\Rightarrow MM^n = M \frac{1}{3} PD^n Q.$

$\Rightarrow M^{n+1} = (PDP^{-1}) \frac{1}{3} PD^n Q.$

car $PD = MP$, donc $M = PDP^{-1}$ (P inversible)

$\Rightarrow M^{n+1} = \frac{1}{3} PDP^{-1} PD^n Q.$

$\Rightarrow M^{n+1} = \frac{1}{3} PDID^n Q.$

$\Rightarrow M^{n+1} = \frac{1}{3} PD^{n+1} Q.$ donc $P(n+1)$ vraie si $P(n)$ vraie.

par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{M^n = \frac{1}{3} PD^n Q}$.

Partie 2 :

6. a. $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5a_{n+1} + b_{n+1}}{5a_n + b_n}$

$= \frac{5(7a_n + b_n) + (-10a_n)}{5a_n + b_n}$

$= \frac{25a_n + 5b_n}{5a_n + b_n}$

$\underline{= 5}$.

Donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 5$, on a bien (U_n) géométrique de raison 5.

De plus, on sait que $U_n = U_0 \times q^n$

$\Rightarrow U_n = (5a_0 + b_0) \times 5^n$

$\underline{\Rightarrow U_n = 5^n}$

b. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-2a_{n+1} - b_{n+1}}{-2a_n - b_n}$

$= \frac{-2(7a_n + b_n) + 10a_n}{-2a_n - b_n}$

$= \frac{-4a_n - 2b_n}{-2a_n - b_n} \underline{= 2}$

Donc, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 2$, on a bien (v_n) géométrique de raison 2.

Donc $v_n = v_0 \times q^n$

$\Rightarrow v_n = (-2a_0 - b_0) \times 2^n$

$\Rightarrow v_n = -1 \times 2^n$

$\Rightarrow \underline{v_n = -2^n}$

c. On a : $\begin{cases} U_n = 5^n \\ v_n = -2^n \end{cases} \iff \begin{cases} 5a_n + b_n = 5^n \\ -2a_n - b_n = -2^n \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a_n = \dfrac{5^n - b_n}{5} \\ -2\left(\dfrac{5^n - b_n}{5}\right) - b_n = -2^n \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a_n = \dfrac{5^n - b_n}{5} \\ -2\left(5^{n-1} - \dfrac{b_n}{5}\right) - b_n = -2^n \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a_n = \dfrac{5^n - b_n}{5} \\ -2 \times 5^{n-1} + \dfrac{2b_n}{5} - b_n = -2^n \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a_n = \dfrac{5^n - b_n}{5} \\ -2 \times 5^{n-1} - \dfrac{3}{5} b_n = -2^n \end{cases}$

Numéro d'inscription 500952

Né(e) le 13/04/2005

Nom HOUSSU

Prénom (s) CORENTIN

Signature Houssu

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths : option techno

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 09

Numéro de table 18

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{5^n - b_n}{5} \\ -\dfrac{3}{5} b_n = -2^n + 2 \times 5^{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{5^n - b_n}{5} \\ \dfrac{3}{5} b_n = 2^n - 2 \times 5^{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 b_n = 5 \times 2^n - 2 \times 5^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Procédons par combinaison linéaire

c. On a : $\begin{cases} U_n = 5^n \\ V_n = 2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a_n + b_n = 5^n \\ -2a_n - b_n = -2^n \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \end{array} \begin{cases} 5a_n + b_n = 5^n \\ 3a_n = -2^n + 5^n \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 5^n - 5a_n \\ a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 5^n - \frac{5}{3}(5^n - 2^n) \\ a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 5^n - \frac{5^{n+1}}{3} + \frac{5}{3} \times 2^n \\ a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 5^n\left(1 - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3} \times 2^n \\ a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = -\frac{2}{3} \times 5^n + \frac{5}{3} \times 2^n \\ a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = \frac{1}{3}(5 \times 2^n - 2 \times 5^n) \\ a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \end{cases}$$

7. Posons $P(n)$: $M^n = a_n M + b_n I \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : $P(0)$: $I = a_0 M + b_0 I$.

$I = 0M + 1I$ ce qui est vrai.

<u>Hérédité</u> : Supposons $P(n)$ vrai pour un n fixé, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$$P(n+1) : M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I.$$

$$\text{Si } P(n) \text{ vrai} : M^n = a_n M + b_n I.$$
$$\Rightarrow M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} \cdot I.$$

Vérifions cela en passant par tableau.

$$M^{n+1} =$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{n+1}+2^{n+2} & 5^{n+1}-2^{n+1} & 5^{n+1}-2^{n+1} \\ 5^{n+1}-2^{n+1} & 5^{n+1}+2^{n+2} & 5^{n+1}-2^{n+1} \\ 5^{n+1}-2^{n+1} & 5^{n+1}-2^{n+1} & 5^{n+1}+2^{n+2} \end{pmatrix}$$

~~De plus,~~ $\cancel{a_n M^2 = a_n \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$ $\cancel{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$ $\cancel{\begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}}$

$$\cancel{a_n M^2 = a_n \times \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{a_n M^2} \neq$$

$$\text{Or, } a_{n+1} M = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a_{n+1} M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(5^{n+1}-2^{n+1}\right) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$5^{n+1}-2^{n+1}$ ...

De plus, $b_{n+1} I = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5\times 2^{n+1} - 2\times 5^{n+1}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(5\times 2^{n+1} - 2\times 5^{n+1}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(5\times 2^{n+1} - 2\times 5^{n+1}) \end{pmatrix}$

Au bilan : $a_{n+1} M + b_{n+1} I$

$$= \begin{pmatrix} 5^{n+1} - 2^{n+1} + \frac{1}{3}(5\times 2^{n+1} - 2\times 5^{n+1})^{\square} & * & * \\ \frac{1}{3}(5^{n+1} - 2^{n+1})^{*} & \square & * \\ * & * & \square \end{pmatrix}$$

On a bien $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I$.

$P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, $\underline{P(n) \text{ est vraie}}$.

Partie 3 :

8.a. $P(X_2 = 1) = \frac{3}{5}$ car le chat se nourrit dans la maison 1 au jour 1 et il a une probabilité de $\frac{3}{5}$ de manger au même endroit que la veille.

$P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = \frac{1}{5}$ car la probabilité que le chat se nourisse ailleurs est $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Or, il y a 2 autres maisons de possibles et chacune est choisie de manière équiprobable, donc $\frac{1}{5}$ chacune.

Numéro d'inscription 500952

Né(e) le 13/04/2005

Nom HOUSSU

Prénom (s) CORENTIN

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths : option techno

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/09

Numéro de table 18

8.b. $E(X_2) = \sum_{x \in X_2(\Omega)} x P(X_2 = x)$

$= 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5}$

$= \frac{8}{5}$.

c. Par transfert, $E(X_2{}^2) = \sum_{x \in X_2(\Omega)} x^2 P(X_2 = x)$

$= 1 \times \frac{3}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 9 \times \frac{1}{5}$

$= \frac{16}{5}$

D'après la formule de Huygens :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$\Rightarrow V(X_2) = \frac{16}{5} - \frac{64}{25}$

$= \frac{80-64}{25}$

$= \frac{16}{25}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

De plus, $\sigma(X_2) = \sqrt{V(X_2)}$

$= \frac{4}{5}$

9. $P(X_3 = 1) = P(X_3 = 1 \cap X_2 = 1) + P(X_3 = 1 \cap X_2 = 2) + P(X_3 = 1 \cap X_2 = 3)$

D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'évènement : $[X_3 = 1], [X_3 = 2], [X_3 = 3]$.

$= P(X_2 = 1) \times P_{X_2=1}(X_3 = 1) + P(X_2 = 2) \times P_{X_2=2}(X_3 = 1) + P(X_2 = 3) \times P_{X_2=3}(X_3 = 1)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$

$= \frac{11}{25}$

$P(X_3 = 2) = P(X_2 = 1 \cap X_3 = 2) + P(X_2 = 2 \cap X_3 = 2) + P(X_2 = 3 \cap X_3 = 2)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$

$= \frac{7}{25}$

De même, $P(X_3 = 3) = \frac{7}{25}$

b. On cherche $P_{X_3=3}(X_2=2)$

D'après Bayes : $P_{X_3=3}(X_2=2) = \dfrac{P(X_2=2 \cap X_3=3)}{P(X_3=3)}$

$$= \frac{\frac{1}{25}}{\frac{7}{25}}$$

$$= \frac{1}{7}$$

10. $C_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \\ P(X_{n+1}=3) \end{pmatrix}$

Or, $\frac{1}{5} M C_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} C_n$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5}P(X_n=1) & \frac{1}{5}P(X_n=2) & \frac{1}{5}P(X_n=3) \\ \frac{1}{5}P(X_n=1) & \frac{3}{5}P(X_n=2) & \frac{1}{5}P(X_n=3) \\ \frac{1}{5}P(X_n=1) & \frac{1}{5}P(X_n=2) & \frac{3}{5}P(X_n=3) \end{pmatrix}.$$

Au bilan on veut montrer que :

- $P(X_{n+1}=1) = \frac{3}{5}P(X_n=1) + \frac{1}{5}P(X_n=2) + \frac{1}{5}P(X_n=3)$
- $P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{5}P(X_n=1) + \frac{3}{5}P(X_n=2) + \frac{1}{5}P(X_n=3)$
- $P(X_{n+1}=3) = \frac{1}{5}P(X_n=1) + \frac{1}{5}P(X_n=2) + \frac{3}{5}P(X_n=3)$

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(X_{n+1}=1) = P(X_{n+1}=1 \cap X_n=1) + P(X_{n+1}=1 \cap X_n=2) + P(X_{n+1}=1 \cap X_n=3)$$

$$= P(X_n=1) \times P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) + P(X_n=2) \times P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) + P(X_n=3) \times P_{X_n=3}(X_{n+1}=1)$$

$$= \frac{3}{5} P(X_n=1) + \frac{1}{5} P(X_n=2) + \frac{1}{5} P(X_n=3)$$

De même pour $P(X_{n+1}=2)$ et $P(X_{n+1}=3)$

On a donc bien $\underline{C_{n+1} = \frac{1}{5} M C_n}$.

b. On a C_n qui est géométrique de raison $\frac{1}{5} M$.

Ainsi, $C_n = C_1 \times q^{n-1}$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \times M^{n-1} \times C_1$$

$$= \underline{\frac{1}{5^{n-1}} \times M^{n-1} \times C_1}$$

c. ~~Manque de temps pour la fin~~.

→ Finalement à la fin des feuilles.

Numéro d'inscription 500952

Né(e) le 13/04/2005

Nom HOUSSU

Prénom (s) CORENTIN

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths. option techno

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/09

Numéro de table 18

Partie 4 :

12. Cela affiche le nom et la puce des chats de la table chats où le chat est gris et est une femelle.

13. UPDATE propriétaires SET nomchat = Niels, pucechat = 987654321 where idprop = 1234.

14. UPDATE chats SET race = burmane, couleur = blanche, âge = 1, poids = 2 where idchat = 457

15. From chats join propriétaires.

Exercice 2 :

1. $f'(x) = 1e^{x} + -1e^{-x}$
$= e^{x} - e^{-x} = g(x)$

$g'(x) = 1e^{x} - (-1e^{-x}) = e^{x} + e^{-x} = f(x)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

2.a. $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Par somme, $\underline{\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$

De même, $\underline{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

b. $g'(x) = e^{x} + e^{-x}$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$.

Donc $g'(x) > 0$ par somme.

Donc g est croissante sur $\mathbb{R}$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3\. a. $g(x) = 0 \iff e^{x} - e^{-x} = 0$

$\iff e^{x} = e^{-x}$

$\underline{\iff x = 0}$

b. On a $g(x) \geq 0$

$\iff x \geq 0$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de g		$-$	0	$+$	

c. On a $f'(x) = g(x)$

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
variations de f.	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim e^{x} + e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$f(0) = 2$

d. Calculons $f''(x)$ puisque $f'(x) = g(x)$ est dérivable.

$$f''(x) = g'(x) = f(x) = e^{x} + e^{-x}.$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} + e^{-x} > 0$

Donc $f''(x) > 0$.

Donc f est convexe.

4. $g''(x) = f'(x) = g(x) = e^{x} - e^{-x}$.

Or, $g''(x) < 0$ pour $x \leq 0$
et $g''(x) > 0$ pour $x \geqslant 0$.

Donc g concave sur $]-\infty ; 0]$
et g convexe sur $[0 ; +\infty[$

5. $T = g(0) + g'(0)(x - 0)$
$= 0 + 2(x - 0)$ car $g'(0) = f(0) = e^{0} + e^{0} = 2$
$= 2x$

b. Puisque g concave sur $]-\infty ; 0[$, alors g en dessous de ses tangentes sur $]-\infty ; 0[$.

Puisque g convexe sur $[0 ; +\infty[$, alors g est au dessus de ses tangentes sur $[0 ; +\infty[$.

Numéro d'inscription 500952

Né(e) le 13/04/2005

Nom HOUSSU

Prénom (s) CORENTIN

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths : option techno

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06/09

Numéro de table 18

5.c. Ainsi $\forall x \leq 0, g(x) \leq 2x$ car g est en dessous de ses tangentes et $2x$ est une tangente.

De même, $\forall x \geq 0, g(x) \geq 2x$ car g est au dessus de ses tangentes et $2x$ est une tangente.

6.a. Prouvons que $f(x) \geq g(x)$:

$$f(x) \geq g(x)$$
$$\Leftrightarrow e^{x} + e^{-x} \geq e^{x} - e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow e^{x} + 2e^{-x} \geq e^{x}$$

Or, $2e^{-x} > 0$, donc on a bien $e^{x} + 2e^{-x} \geq e^{x}$ et donc $\underline{f(x) \geq g(x)}$,

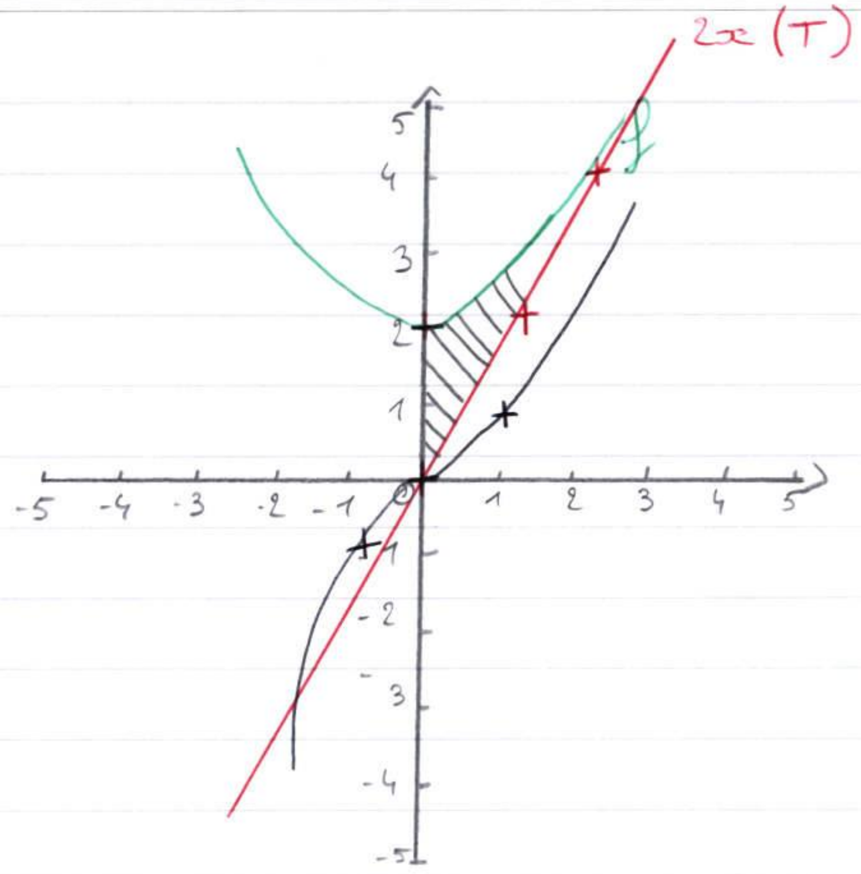
b. On a donc Cf au dessus, de Cg car $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

7.



b. Calculons l'aire entre Cf et l'axe des abscisses par les intégrales

On cherche : $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x + e^{-x}$

$= \left[e^x - e^{-x}\right]_0^1$

$= e - \frac{1}{e} - \left(e^0 - e^0\right)$

$\underline{= e - \frac{1}{e}}$

a. $h'(x) = f'(x) - 2x$

$$= e^{x} - e^{-x} - 2x.$$

b. On a donc $h(x) \geq 0$

$\Rightarrow f(x) - 2 - x^2 \geq 0$

$\Rightarrow f(x) \geq 2 + x^2$

c. $k'(x) = g'(x) - 2 - x^2$

$$= e^{x} + e^{-x} - 2 - x^2$$

d. On a donc $\forall x \leq 0$, $k(x) \leq 0$

$\Rightarrow g(x) \leq 2x + \frac{1}{3}x^3$

De même, $\forall x \geq 0$, $k(x) \geq 0$

$\Rightarrow g(x) \geq 2x + \frac{1}{3}x^3.$

Partie 2:

10. $g(x) = \frac{1}{n} \iff e^{x} - e^{-x} = \frac{1}{n}$

Or, $\frac{1}{n} > 0$ car $n > 0$.

De plus, g croissante sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Par théorème de la bijection (g continue et strictement croissante) $g(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution.

11. ~~$g(1) = e^{1} - e^{-1} \approx 2,3$.~~

~~On $g(U_1) = \frac{1}{1} = 1$~~

13. b. On a $U_n > 0$ et U_n décroissante, ainsi par théorème de la limite monotone, U_n converge.

14. a.

```
def d(x, n):
    d = np.exp(x) - np.exp(-x) - (1/n)
    return d.
```

b. /

c. Nous pouvons conjecturer que (U_n) converge vers 0.

Exercice 3:

1a. $T \sim \mathcal{E}(1)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1e^{-1x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(T) = \frac{1}{1} = 1, \quad V(T) = \frac{1}{1^2} = 1$$

Numéro d'inscription 500952

Né(e) le 13/04/2005

Signature: [signature]

Nom HOUSSU

Prénom (s) CORENTIN

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths : option techno

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/09

Numéro de table 18

1.b. $F_T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1-e^{-1x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

c. On cherche $P(T \leq 3) = F_T(3)$
$= 1 - e^{-3}$

d. On cherche $1 - P(1 \leq T \leq 2)$ ← 1 - Proba (meurt entre 1 et 2)
$= 1 - (F_T(2) - F_T(1))$

$= 1 - \left(1 - e^{-2} - (1 - e^{-1})\right)$

$= 1 - (e^{-1} - e^{-2})$
$= 1 - e^{-1} + e^{-2}$

2. $f_U(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x \in [0;1] \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \leq x)$

$= P(-\ln(U) \leq x)$

$= P(\ln(U) \geq -x$

$= P(U \geq e^{-x})$ car $x \mapsto e^{x} \nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

c. Si $x < 0$, alors $-x > 0$

$\Rightarrow e^{-x} \geq 1$

De plus, $P(X \leq x) = 1 - F_U(e^{-x})$

Or, si $e^{-x} \geq 1$, $F_U(e^{-x}) = 1$

Donc $P(X \leq x) = 1 - 1$

$= 0$

d. Si $x \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq e^{-x} \leq 1$.

Or, si $0 \leq e^{-x} \leq 1$, $F_U(e^{-x}) = e^{-x}$

Donc $P(X \leq x) = 1 - e^{-x}$ si $x \geq 0$.

Au bilan : $P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

On reconnait une loi exponentielle.

Donc $f_X = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

e. /

Partie 2 :

3. a. $I_1(A) = \int_0^A e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^A$
$= -e^{-A} + 1$

b. $\lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-A} + 1 = 1$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et vaut 1.

4. $I_{n+1}(A) = \int_0^A x^n e^{-x} dx$

Soit $u = x^n \rightarrow u' = nx^{n-1}$
Soit $v' = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x}$.

$$\int_0^A x^n e^{-x} dx = \left[x^n \times -e^{-x} \right]_0^A - \int_0^A nx^{n-1} \times -e^{-x} dx$$

$$I_{n+1}(A) = A^n \times -e^{-A} + n\int_0^A x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

$$= -\frac{A^n}{e^A} + n I_n(A)$$

5. $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{A^n}{e^A} = 0$ par croissance comparée.

Ainsi, $\lim\limits_{A \to +\infty} I_{n+1}(A) = \lim\limits_{A \to +\infty} n\, I_n(A)$

Donc Si $I_n(A)$ converge, alors $I_{n+1}(A)$ aussi

6. Soit $P(n)$: « I_n converge » $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : « I_1 converge »
ce qui est vrai car $\int_0^1 e^{-x}$ converge
question 3.a.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vrai pour un n fixé, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$P(n+1)$: « I_{n+1} converge ».

Si $P(n)$ vrai : « I_n converge », ainsi I_{n+1} converge car si I_n converge, I_{n+1} aussi converge. (question 5)

Par récurrence, $P(n)$ vrai, I_n converge.

Numéro d'inscription 500952

Né(e) le 13/04/2005

Nom HOUSSU

Prénom (s) CORENTIN

Signature

20 / 20

écricome Épreuve : Maths : option techno

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/09

Numéro de table 18

Donc, $I_{n+1} = n I_n$ car I_n converge (question 5).

7. Soit $P(n)$: $I_n = (n-1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation : $I_1 = 0! = 1$
ce qui est vrai (question 3.b.)

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un n fixé, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$P(n+1)$: $I_{n+1} = n!$

Si $P(n)$ vrai : $I_n = (n-1)!$
$\Rightarrow n I_n = n(n-1)!$
$\Rightarrow I_{n+1} = n!$

Donc $P(n+1)$ est vraie si $P(n)$ vraie.

Par récurrence, $P(n)$ vraie.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Partie 3:

8. On a $f_n(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

En effet, $\frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \geqslant 0$ si $x \geq 0$
avec $n \in \mathbb{N}^*$

car $\frac{1}{(n-1)!} \geqslant 0$

De plus, on a $f_n(x)$ continue sauf éventuellement en 0.

En effet, par produit, $\frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}$ continue

Enfin, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge et vaut 1.

En effet $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times I_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times (n-1)! \quad \text{(question 7)}$$

$$\underline{= 1}$$

Donc f_n est une densité de probabilité.

9. $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\, dx$ sous réserve de convergence.

$$= \int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x} \times \frac{1}{(n-1)!}\, dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times I_{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times n!$$

$$\underline{= n}$$

Donc $E(Y)$ existe et vaut n.

b. $E(F_N) = \cancel{E\left(\sum \frac{1}{N} \times Y_N\right.}$

$$= \frac{1}{N} E\left(\sum_{k=1}^{N} Y_k\right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} E(Y_k) \text{ par indépendance}$$

$$= \frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^{N} m$$

$$\underline{= m}$$

De même, $V(F_N) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N} V(X_k)$

$$\underline{= \frac{m}{N}}$$

c. $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

$\Rightarrow P(|F_N - m| \geq \varepsilon) \leq \underline{\frac{m}{N\varepsilon^2}}$.

d. On peut estimer que m vaut 3.
→ Toutes les estimations sont autour
<u>de 3.</u>

e. Certains intervalles ne contiennent pas 3 car cela ne représente que des estimations.
De plus, la valeur choisie pour ε : $\frac{1}{10}$ est relativement grande et ne permet pas une précision optimale. Il n'est pas étonnant que certains intervalles n'aient pas la valeur de <u>m : 3.</u>

Numéro d'inscription 500952

Né(e) le 13/04/2005

Nom HOUSSU

Prénom (s) CORENTIN

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths : option techno

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09/09

Numéro de table 18

Retour sur la question 10.c. Exercice 1.

On a $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$.

$$\begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n-1}} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^n & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^n & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^{n-1}} \begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^n \\ 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$P(X_n=1) = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{2^n}{5^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2^n}{3 \times 5^{n-1}}$$

$$P(X_n=2) = P(X_n=3) = \frac{1}{3} - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

11.a. $E(X_n) = \frac{1}{3} + \frac{2^n}{5^{n-1}} + 5\left(\frac{1}{3} - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}\right)$

$$= 2 + \frac{2^n - 5\times 2^{n-1}}{5^{n-1}}$$