Copie anonyme - n°anonymat : 300275

E3-00015
300275
Maths T

Code épreuve : 285 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2025

Épreuve de : Maths T ESCP BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

Partie I :

1) a.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{27} + \frac{2}{27} & \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Calculons dès lors $A^2 - \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}I$:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} - \frac{8}{9} + \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} - \frac{4}{27} & \frac{5}{9} - \frac{8}{9} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $P(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$, alors $P(A) = 0$.

Donc P est annulateur de A.

b. On sait que les valeurs propres sont parmi les racines du polynome annulateur.

Résolvons $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$

On a $x = 1$ racine évidente.

Donc $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{\frac{c}{a}}{x_1} = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

Les valeurs propres possibles sont donc $\frac{1}{3}$ et 1.

c. $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+1\\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

On a $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, ce qui est de la forme $AX = \lambda X$ avec $\lambda = 1$ et $X \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Donc 1 est valeur propre de A associée au vecteur propre $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

$A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1\\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

De même, on a $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, ce qui est de la forme $AX = \lambda X$ avec $\lambda = \frac{1}{3}$ et $X \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Donc $\frac{1}{3}$ est valeur propre de A associée au vecteur propre $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

2. a.

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\underline{PQ = 6I.}$

b. On a $PQ = 6I$

$\Rightarrow P \frac{1}{6} Q = I.$

Donc P est inversible car de la forme $AB = I$.

avec $\underline{P^{-1} = \frac{1}{6} Q.}$

c. $$AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

On a $\underline{AP = PD.}$

Donc $P^{-1}AP = D$ car P est inversible (question b)

On a bien A qui est diagonalisable.

d. Soit $P(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : $P(0)$: $A^0 = PD^0P^{-1}$

$\Rightarrow I = PIP^{-1}$

$\Rightarrow I = I$ ce qui est vrai

Hérédité : Supposons $P(n)$ vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$P(n+1)$: $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

si $P(n)$ vrai : $A^n = PD^nP^{-1}$
$\Rightarrow AA^n = APD^nP^{-1}$
$\Rightarrow A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$ (question c)
$\Rightarrow A^{n+1} = PDD^nP^{-1}$
$\Rightarrow A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$P(n+1)$ vraie si $P(n)$ vraie.

Par récurrence, $P(n)$ est vraie.

e.

$A^n = PD^nP^{-1} \iff A^n = PD^n \frac{1}{6} Q$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3+3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 9-9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n & 3+3\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 300275

Code épreuve : 285	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Maths T ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3.a. On a $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{2}{3} U_n + V_n \\ V_{n+1} = \frac{1}{9} U_n + \frac{2}{3} V_n \end{cases}$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$ on peut écrire :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} X_n$$

$\Rightarrow \underline{X_{n+1} = AX_n}$

b. Nous avons $X_{n+1} = AX_n$ ce qui est une suite géométrique de raison $q = A$.

On a donc $X_n = q^n \times X_0$

$\underline{X_n = A^n \times X_0}$.

c. On a : $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$

Donc $\underline{U_n = \frac{1}{6}\left[U_0\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + V_0\left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)\right]}$

Et $\underline{V_n = \frac{1}{6}\left[U_0\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) + V_0\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)\right]}$

d. On a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right) = 0$ car $\frac{1}{3} \in]-1;1[$.

Donc, $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6}\left[U_0 \left(3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + V_0 \left(9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)\right]$

$= (3U_0 + 9V_0) \times \frac{1}{6}$

La population U_n survit.

De même, $\lim_{n \to +\infty} V_n = (U_0 + 3V_0) \times \frac{1}{6}$.

Donc la population V_n survit.

4. a. Une clé primaire pertinente serait la clé "Espèce".
Cela permettrait de créer une clé secondaire avec la table Alimentation car il y a aussi une clé espèce.

b. SELECT * FROM ~~//////~~ type.alimentation ;

c. SELECT * FROM Espèce.animaux where categorie = adulte and Effectif >= 6 ;

d. SELECT ~~* FROM~~ Espèce.animaux and Effectifs.animaux FROM Animaux Join Alimentation ON Espèce.animaux = Espece.alimentation where Tarif $\geq$ 15;

Partie II).

5. a. On a $w_{n+1} - w_n = r w_n$

$\Rightarrow w_{n+1} = r w_n + w_n$

$\Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = r + 1$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $r+1$

On a donc $w_n = w_0 \times (r+1)^n$

b. On a $r \in [-1 ; +\infty[$ car on veut que la raison : $r+1$ soit positive car on veut une croissance à taux fixe.

c. Si $r \in [-1 ; 0]$, $(r+1) \in]-1 ; 1[$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

Si $r = 0$, $w_n = w_0 \times 1^n$
$= w_0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = w_0$

Si $r > 0$, $(r+1) > 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_0 \times (r+1)^n$
$= +\infty$

Le modèle n'est pas réaliste car $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ existe et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ existe aussi.

L'évolution de la population dans sa généralité devrait aussi exister.

6.a.i On a $f(x) = \alpha x \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right)$

$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow \alpha x \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha x = 0 \quad$ ou $\quad 1 - \frac{1}{\beta} x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad$ ou $\quad x = \beta$.

Donc $f(x) = 0$ a pour solutions $\underline{x = 0 \text{ ou } x = \beta}$.

ii. $f'(x) = \alpha\left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) + \alpha x\left(-\frac{1}{\beta}\right)$ (de la forme $u'v + uv'$)

$$= \alpha - \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{\alpha x}{\beta}$$

$$\underline{= \alpha - 2\frac{\alpha x}{\beta}}$$

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha - 2\frac{\alpha x}{\beta} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \geqslant 2\frac{\alpha x}{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{2} \geqslant \alpha x$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{\beta}{2}$$

D'où le tableau :

x	0		$\frac{\beta}{2}$		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
variation de f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	0^-

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta} x\right)$$

$= 0^-$ car $\alpha \in [0;1]$ et donc $\in]-1;1[$

$\hookrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \alpha x = 0$.

$\hookrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = -\infty$

Copie anonyme - n°anonymat : 300275

Code épreuve : 285	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Maths T

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6.b.i $g(x) = 0 \iff f(x) + x = 0$
$\iff f(x) = -x$
$\iff \underline{x = 0}$, car $f(0) = 0$.

$g(x) = x \iff f(x) + x = x$
$\iff f(x) = 0$
$\iff \underline{x = 0 \text{ ou } x = \beta}$,

$g(x) = \beta \iff f(x) + x = \beta$
$\iff \underline{x = \beta}$, car $f(\beta) = 0$ donc
$f(\beta) + \beta = \beta$.

ii. On a :

- $\beta < (\alpha+1)\beta$ car $\alpha \in]0;1[$.
$\Rightarrow \dfrac{\beta}{2\alpha} < \dfrac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}$ car $\alpha > 0$
$\Rightarrow \underline{\beta < \dfrac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}}$.

- Par ailleurs, $\underline{\dfrac{\beta}{\alpha} < \dfrac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}}$ car $\alpha > 0$.

- Enfin $\underline{\dfrac{\beta}{\alpha} > \dfrac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}}$ car $\beta > \dfrac{(\alpha+1)\beta}{2}$

D'où : $\beta < \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$.

iii. $g'(x) = 1 + f'(x)$

$$= 1 + \alpha - \frac{2\alpha x}{\beta}.$$

$g'(x) \geq 0$

$\iff 1 + \alpha - \frac{2\alpha x}{\beta} \geq 0$

$\iff \frac{(1+\alpha)\beta}{2} \geq \alpha x$

$\iff \frac{\beta + \alpha\beta}{2} \geq \alpha x$

$\iff \frac{\beta + \alpha\beta}{2\alpha} \geq x$

D'où le tableau :

x	0	β	$\frac{\beta+\alpha\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
	0	$\nearrow$ β		$\searrow$	

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim f(x) = 0$

Erreur + manque de temps pour finir.

Exercice 2 :

1\. a. if position [j] < bille :
        position [j+1] = j+1.
    else :
        position [j+1] = j-1
return (j)

b. ~~/////////~~

print(deplacement_pion (20, 10))

c. 5,054 représente la moyenne théorique (l'espérance) de notre variable.

2\. $X_1(\Omega) = \{1\}$ car les boules sont numérotées de 1 à n. On aura forcément un entier supérieur (strictement) à 0. Le pion va donc toujours passer en 1 au premier lancé.

C'est une loi certaine, donc $E(X_1) = 1$.

3\. $X_2(\Omega) = \{0 ; 2\}$ car soit on avance, soit on recule.

$P(X_2 = 0) = \frac{1}{n}$ ← avoir tiré 1 dans l'urne.

$P(X_2 = 2) = \frac{n-1}{n}$ ↖ toutes les possibilités sauf avoir 1.

$E(X_2) = 0 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{n-1}{n} = 2 \times \frac{n-1}{n}$

4. X_k renvoit la position du pion après le k-ième tirage.

Or, la position ne pourra jamais dépasser n car il faudrait avoir un entier strictement supérieur à n pour pouvoir aller en n.

Puisqu'il y a n billes, X_k ne peut dépasser n.

Par ailleurs, il sera toujours supérieur ou égal à 0 par le même raisonnement.

Pour avoir $X_k = n+1$, il faudrait $n+1$ boules, or on en a n.

5. $P(X_{k+1}=0) = P(X_{k+1}=0 \cap X_k=1) + P(X_{k+1}=0 \cap X_k=2)$

$+ \ldots$ d'après la formule des probabilités totales.

Or, $P(X_{k+1}=0 \cap X_k=y)$ avec $y>1$

vaut 0 car on ne peut reculer que d'une seule case à la fois.

Donc $P(X_{k+1}=0) = P(X_{k+1}=0 \cap X_k=1)$

$= P_{X_k=1}(X_{k+1}=0) \times P(X_k=1)$

$= \frac{1}{n} \times P(X_k=1)$

car on a 1 chance sur n d'avoir tiré 1.

De même, $P(X_{k+1}=n) = P(X_{k+1}=n \cap X_k=n-1)$

$= P(X_k=n-1) \times P_{X_k=n-1}(X_{k+1}=n)$

1 chance sur n de tirer n.

$= \frac{1}{n} P(X_k=n-1)$

Copie anonyme - n°anonymat : 300275

Code épreuve : 285	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Maths T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

6. a. On cherche $P_{X_k=\ell-1}(X_{k+1}=\ell)$

Or, On a $n-(\ell-1)$ possibilités d'avancer d'une case si on est en $\ell-1$

Donc $P_{X_k=\ell-1}(X_{k+1}=\ell) = \dfrac{n-(\ell-1)}{n}$

b. De même, $P_{X_k=\ell+1}(X_{k+1}=\ell) = \dfrac{\ell+1}{n}$

car si on est en $\ell+1$, on a $\ell+1$ boules qui sont inférieures ou égales à ma position et qui me font reculer.

c. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{k+1}=\ell) = P(X_{k+1}=\ell \cap X_k=\ell-1) + P(X_{k+1}=\ell \cap X_k=\ell+1)$$

$$= P_{X_k=\ell-1}(X_{k+1}=\ell) \times P(X_k=\ell-1) + P_{X_k=\ell+1}(X_{k+1}=\ell) \times P(X_k=\ell+1)$$ par Bayes.

$$= \frac{n-\ell+1}{n} P(X_k=\ell-1) + \frac{\ell+1}{n} P(X_k=\ell+1)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7. $E(X_{k+1}) = \sum_{\ell=0}^{n} \ell \, P(X_{k+1} = \ell)$

$= \sum_{\ell=0}^{n} \ell \times \left(\frac{n-\ell+1}{n} P(X_k = \ell-1) + \frac{\ell+1}{n} P(X_k = \ell+1) \right)$

→ Suite plus loin dans la copie ...

Exercice 3 :

Partie I)

1. • On a $f_0(r) \geq 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$.
En effet, $\alpha + 1 > 0$ car $\alpha > 1$
et $r^\alpha > 0$ car $r \in [0;1]$.

• De plus f_0 continue sauf éventuellement en 0 et en 1.
$(\alpha+1) r^\alpha$ continue.

• Enfin, vérifions que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(r)\, dr = 1$.

$\int_{-\infty}^{0} f_0(r)\, dr = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0$.

De même, $\int_{1}^{+\infty} 0 = 0$.

Calculons alors : $\int_0^1 f_0(t)\,dt = \int_0^1 (\alpha+1)t^\alpha\,dt$

$= [t^{\alpha+1}]_0^1$

$= 1^{\alpha+1} - 0^{\alpha+1}$

$\underline{= 1}$

Par Chasles on a bien $\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) = \underline{1}$. (converge et vaut 1)

Donc f_0 est donc une densité.

2a. On a : • f_0 qui est dérivable sur $]0;1[$
car $\alpha+1$ est dérivable et t^α dérivable, ainsi par produit, f_0 dérivable sur $]0;1[$.

De plus, $f_0'(t) = ((\alpha+1)t^\alpha)'$

$= (\alpha+1)\alpha t^{\alpha-1}$ car α un réel fixé.

• $\lim\limits_{t \to 0} f_0'(t) = 0$ car $\lim\limits_{t \to 0} t^{\alpha-1} = 0$

Donc $f_0'(0) = 0$.

• Et $\lim\limits_{t \to 1} f_0'(t) = (\alpha+1)\alpha$ car $\lim\limits_{t \to 1} t^{\alpha-1} = 1$

Donc $f_0'(1) = (\alpha+1)\alpha$

On peut donc affirmer à l'aide de la définition en début d'énoncé que f_0 dérivable sur $[0;1]$.

b. On a $f_{n+1}(t) = t f_n'(t)$

Or, $\alpha^n f_0{}'(\alpha^n)$?

c. $c_n f_n = c_n \alpha^n f_0$.

Pour que $c_n f_n$ définisse une densité il faut :

- $c_n f_n \geq 0$, il faut donc $c_n \geq 0$. car $\alpha^n f_0 \geq 0$.
- $c_n f_n$ continue sauf éventuellement en 0 et en 1.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} c_n f_n(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Or, $\int_0^1 c_n f_n(t)\,dt = c_n \int_0^1 f_n(t)\,dt$

$$= c_n \int_0^1 \alpha^n (\alpha+1) t^\alpha \,dt$$

$$= c_n \alpha^n (\alpha+1) \int_0^1 t^\alpha \,dt$$

$$= c_n \alpha^n (\alpha+1) \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1$$

$$= c_n \alpha^n (\alpha+1) \times \frac{1}{\alpha+1}$$

$$= c_n \alpha^n$$

On veut donc $c_n \alpha^n = 1$

$$\iff \boxed{c_n = \frac{1}{\alpha^n}}$$

On aurait pu aller plus vite car f_0 est une densité

Copie anonyme - n°anonymat : 300275

Code épreuve : 285	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Maths - T

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

d. $c_n f_n = c_n \alpha^n f_0$

$= \frac{1}{\alpha^n} \alpha^n f_0$

$= f_0$

Donc X_n et X_0 suivent la même loi.

3. $F_{X_\alpha}(x) = P(X_\alpha \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\,dt$

si $x \leq 0$, $\int_{-\infty}^{x} f_0(t) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

~~si $x \in [0;1]$, $\int_{M}^{x} f_0(t)\,dt = \int_{M}^{x} (\alpha+1) t^\alpha\,dt$~~

~~(Soit $M \in]-\infty; x[$)~~ ~~$= [t^{\alpha+1}]_M^x$~~

~~$= x^{\alpha+1} - M^{\alpha+1}$~~

Si $x \in [0;1]$, $P(X_\alpha \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_\alpha(t)\,dt$

$$= \int_0^x f_\alpha(t)\,dt \text{ car } \int_{-\infty}^{0} f_\alpha(t)\,dt = 0$$

$$= \int_0^x (\alpha+1)t^\alpha\,dt$$

$$= \left[\ t^{\alpha+1}\right]_0^x$$

$$= \underline{x^{\alpha+1}}$$

Si $x > 1$, $P(X_\alpha \leq x) \underline{= 1}$

<u>Au bilan:</u>

$$F_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x^{\alpha+1} \text{ si } x \in]0;1] \\ 1 \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

4. D'après Huygens: $V(X_\alpha) = E(X_\alpha{}^2) - E(X_\alpha)^2$

Or, $E(X_\alpha) = \int_0^1 t f_\alpha(t)\,dt$ $\left(\text{car } \int_{-\infty}^{0} \text{ et } \int_1^{+\infty} = 0\right)$

$$= \int_0^1 (\alpha+1)t^{\alpha+1}\,dt$$

$$= \left[(\alpha+1) \times \frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}$$

De même, $E(X_\alpha{}^2) = \int_0^1 t^2 f_\alpha(t)\,dt$

$$= \int_0^1 t^{\alpha+2} (\alpha+1)\,dt$$

$$= \left[(\alpha+1) \frac{t^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{\alpha+1}{\alpha+3}}$$

$$\boxed{V(X_\alpha) = \frac{\alpha+1}{\alpha+3} - \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^2}$$

Partie II)

5. Soit $c_\alpha f_\alpha$.

- On a $c_\alpha f_\alpha \geq 0$ si $c_n \geq 0$ car $e^t > 0$ et $\alpha \geq 0$.
- On a $c_\alpha f_\alpha$ continue sauf éventuellement et 0 et en 1.
- Enfin il faut c_n tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} c_\alpha f_\alpha$ converge et vaut 1.

Or, $\int_{-\infty}^{0} c_\alpha f_\alpha = \int_{1}^{+\infty} c_\alpha f_\alpha = \int 0 = \underline{0}$

Donc il faut c_n tel que $\int_0^1 c_0 f_0 \, dt = 1$.

$$\iff \int_0^1 c_n e^t \, dt = 1$$

$$\iff c_n \left[e^t \right]_0^1 = 1$$

$$\iff c_n (e-1) = 1$$

$$\iff \boxed{c_n = \frac{1}{e-1}}$$

6. $E(X_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, c_0 f_0 \, dt$ sous réserve de convergence

$$= \int_0^1 t \times \frac{1}{e-1} \times e^t \, dt$$

$$= \frac{1}{e-1} \int_0^1 t e^t \, dt$$

Réalisons une intégration par parties.

$$u = t \to u' = 1$$
$$v' = e^t \to v = e^t$$

$$= \frac{1}{e-1} \left(\left[t e^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t \, dt \right)$$

$$= \frac{1}{e-1} \left(e - (e-1) \right)$$

$$= \frac{e}{e-1} - 1 \quad = \boxed{\frac{1}{e-1}}$$

$E(X_0) = \frac{1}{e-1}$

Copie anonyme - n°anonymat : 300275

Code épreuve : 285

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths - T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7. $\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^1 t f_n'(t)\,dt$

~~$= F(1) - F(0)$ avec F une primitive~~

Réalisons une intégration par parties.

Soit $u = t \Rightarrow u' = 1$

et $v' = f_n'(t) \Rightarrow f_n(t) = v$.

Ainsi, $\int_0^1 f_{n+1}(t) = [t f_n(t)]_0^1 - \int_0^1 f_n(t)\,dt$

$= f_n(1) - \int_0^1 f_n(t)\,dt$

8. Soit $P(n)$: $f_n(t) = P_n(t)e^t \quad \forall t \in [0;1]$.

Initialisation : $P(0)$: $f_0(t) = P_0(t)e^t$

$\Leftrightarrow f_0(t) = 1e^t = e^t$

ce qui est vrai

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un n fixé, montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

$$P(n+1) : f_{n+1}(r) = P_{n+1}(r)e^r$$

$$= r\left(P'_{n}(r) + P_{n}(r)\right) \times e^r$$

Or si $P(n)$ vraie : $f_n(r) = P_n(r)e^r$

$$\Rightarrow f_n'(r) = \left(P_n(r)e^r\right)'$$

$$\Rightarrow f_n'(r) = P_n'(r)e^r + P_n(r)e^r$$

↳ de la forme $u'v + uv'$

$$\Rightarrow f_n'(r) = e^r\left(P_n'(r) + P_n(r)\right)$$

$$\Rightarrow r f_n'(r) = r\left(P_n'(r) + P_n(r)\right) \times e^r$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(r) = P_{n+1}(r)e^r$$

Si $P(n)$ vraie, $P(n+1)$ est aussi vraie.

Par récurrence, $P(n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

9. $f_{n+1}(1) = P_{n+1}(1) \times e$

$$= 1\left(P_n'(1) + P_n(1)\right) \times e$$

$$= eP_n'(1) + eP_n(1)$$

$$= eP_n'(1) + f_n(1) \quad \text{(question 8)}$$

De plus, $f_n(1) + eP_n'(1) \geq f_n(1)$

$\Leftrightarrow eP_n'(1) \geq 0$.

ce qui est vrai car $P_n'(1) \geq 0$ (énoncé)
et $e \geq 0$.

10. On a $\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt = f_n(1) - \int_0^1 f_n(t)\,dt$

Pour montrer que $f_n(1) > \int_0^1 f_n(t)\,dt$, il
faut montrer que $f_n(1) - \int_0^1 f_n(t)\,dt > 0$

$\Rightarrow \int_0^1 f_{n+1}(t) > 0$

Ce qui est vrai par positivité de
l'intégrale.
En effet $f_{n+1}(t) \geq 0$

On a donc $0 < \int_0^1 f_n(t)\,dt < f_n(1)$
par positivité de l'intégrale.

11. On a $0 < c_n \int_0^1 f_n(t)\,dt < c_n f_n(1)$

Surement un encadrement à faire ...

Retour sur l'exercice 2 :

8. a. On reconnait une suite arithmético-géométrique, car de la forme $U_{n+1} = a + bU_n$.

avec $a = 1$
et $b = \left(1 - \frac{2}{n}\right)$

b. $x = 1 + x - \frac{2x}{n}$

$\Leftrightarrow 0 = 1 - \frac{2x}{n}$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{n} = 1$

$\Leftrightarrow 2x = n$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{n}{2}}$

c. $x_{k+1} = E(X_{k+1}) - x$

$= \left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)E(X_k)\right) - x$

$= 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)E(X_k)) - \cancel{\left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x\right)}$

$\left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x\right)$

$= \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(E(X_k) - x\right)$

$= \boxed{\left(1 - \frac{2}{n}\right)x_k}$

$x_k = \cancel{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \times x_0}$

$\boxed{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k \times x_n}$ (suite géometrique)

d. $E(X_k) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k \times E(X_n)$ par déduction