Copie anonyme - n°anonymat : 359301

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 29 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3 :

Partie 1

1. f est C^0 sur $]0;+\infty[$ car nulle et sur $]-\infty;0]$ comme produit et composé de fonctions qui le sont. Donc f est C^0 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 (1)

f est positive sur $]0;+\infty[$ car nulle et sur $]-\infty;0]$ car $\forall x \leq 0$ $e^{-x^2} > 0$ et $\forall x \leq 0$ $-2x \geq 0$. Donc f positive sur $\mathbb{R}$ (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} -2x e^{-x^2}\,dx$$

Soit $B < 0$, $\displaystyle\int_B^0 -2x e^{-x^2}\,dx = \left[e^{-x^2} \right]_B^0$

$= 1 - e^{-B^2}$

$\xrightarrow[B \to -\infty]{} 1$ car $B \to -\infty$

$\Rightarrow B^2 \to +\infty$

$\Rightarrow -B^2 \to -\infty$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ (3)

$\boxed{\text{Bilan : Avec (1), (2), (3) } f \text{ est une densité}}$

2. $X(\Omega) =]-\infty ; 0]$

Fonctions de répartition :

$\forall x > 0, \quad F(x) = 1$

$\forall x \leq 0, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

Soit $B < 0$, $\int_{B}^{x} -2t\, e^{-t^2} dt = \left[e^{-t^2} \right]_B^x$

$= e^{-x^2} - e^{-B^2}$

$\xrightarrow[B \to -\infty]{} e^{-x^2}$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

3. Soit f_N la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{x^2}{2 \times \frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall x \in \mathbb{R},\ f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}}$$

4. X admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} -2x^2 e^{-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} -2x^2 e^{-x^2}\,dx \quad \text{par parité de l'intégrande}$$

$$= -\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\,dx$$

$$= -\sqrt{\pi}\, E(N^2) \quad \text{où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{2})$$

et donc $E(X)$ existe

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\boxed{\text{Bilan : } X \text{ a une espérance et } E(X) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

5. $Z = X^2$

$Z(\Omega) = [0; +\infty[$

Fonctions de répartition :

$\forall x < 0, G(x) = F_Z(x) = 0$

$\forall x \geq 0, G(x) = F_Z(x) = P(Z \leq x)$

$$= P(X^2 \leq x)$$

$$= P(|X| \leq \sqrt{x}) \quad x \mapsto \sqrt{x} \text{ strict croissant } (\nearrow) \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

$$= F_X(\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0}) - F_X(-\sqrt{x}) \quad X \text{ à densité}$$

$$= 1 - F_X(-\sqrt{x})$$

$\forall x \geq 0$, $G(x) = F_Z(x) = 1 - e^{-(\sqrt{x})^2}$

$= 1 - e^{-x}$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1

$$\boxed{\text{Bilan: } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$$

6. $Z = X^2$

et $E(Z) = 1$ car $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

donc $E(Z) = E(X^2)$ donc X admet un moment d'ordre 2 donc une variance

D'après Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= 1 + \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{\text{Bilan: } X \text{ a une Variance et } V(X) = 1 + \frac{\pi}{4}}$$

7.

```
def simulX(n):
    M = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        M[i] = np.sqrt(rd.exponential(1))
    return M
```

$X^2 = Z$

$\Rightarrow X = \sqrt{Z}$

```
def EsperanceX(n):
    S=simulX(n)
    E = np.mean(S)
    return E
```

X admet un moment d'ordre 2

Copie anonyme - n°anonymat : 359301

Partie 2 :

8. h est C^0 sur $]-\infty;0[$ car nulle et sur $]1;+\infty[$ car nulle. h est C^0 sur $[0,1]$ car affine. Donc h C^0 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et 1 (1)

h est positive sur $]-\infty;0[\,\cup\,]1;+\infty[$ car nulle et sur $[0,1]$ car $\forall x \in [0,1]$ $\quad 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq 2(1-x) \leq 2$

Donc h positive sur $\mathbb{R}$ (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \int_0^1 2(1-t)\,dt$$

$$= 2\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2}\right) - 2\left(0-\frac{0^2}{2}\right)$$

$$= 2-1$$

$$= 1$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = 1$ (3)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Bilan : Avec (1), (2), (3) h est une densité

9. $Y(\Omega) = [0, 1]$

Fonctions de répartition :

$\forall x < 0, \quad H(x) = 0$

$\forall x > 1, \quad H(x) = 1$

$$\forall x \in [0, 1], \quad H(x) = \int_0^x 2(1-t)\,dt$$

$$= 2\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$= 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - 2\left(0 - \frac{0^2}{2}\right)$$

$$= 2x - x^2$$

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

10. $T_n = \sqrt{n}\,(M_n - 1)$

$M_n(\Omega) = [0, 1]$

$T_n(\Omega) = \mathbb{R}$

Fonctions de répartition de M_n :

$\forall x < 0, \quad F_{M_n}(x) = 0$

$\forall x > 1, \quad F_{M_n}(x) = 1$

$\forall x \in [0, 1] \quad F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x)$

$= P(\mathrm{Max}(Y_1, \dots, Y_n) \leq x)$

$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i \leq x)\right)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leq x)$ Y_i mutuellement indep

$\forall x \in [0,1]$, $F_{M_n}(x) = (H(x))^n$ X_i à densité

Fonctions de répartition de T_n

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(T_n \leq x)$

$= P(\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x)$

$= P(M_n - 1 \leq \frac{x}{\sqrt{n}})$ $\sqrt{n} > 0$

$= P(M_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1)$

$= F_{M_n}(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1)$ M_n à densité car fonction de répartition C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et 1

$= (H(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}))^n$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \left[H\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)\right]^n}$$

11 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall y \in \mathbb{R}$ $(1 + \frac{y}{n})^n = \exp(n \ln(1 + \frac{y}{n}))$

$\ln(1 + \frac{y}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{y}{n}$ car $\frac{y}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(1 + \frac{y}{n}) = y$

Par continuité de l'exponentielle $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp(n \ln(1 + \frac{y}{n})) = e^y$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall y \in \mathbb{R}, \quad (1 + \frac{y}{n})^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^y}$$

12. $H(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}) = 2(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}) - (2(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}))^2$

$= 2 + \frac{2x}{\sqrt{n}} - 2(1 - \frac{2x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{n})$

$= \cancel{2} + \frac{2x}{\sqrt{n}} - \cancel{2} + \frac{4x}{\sqrt{n}} - 2\frac{x^2}{n} = \frac{6x}{\sqrt{n}} - 2\frac{x^2}{n}$

si $x \geq n > 0$ alors $F_n(x) = 0$

Donc $\forall x \geq 0$ $F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$

$\frac{x}{\sqrt{n}} \in [0, 1]$,

$$F_n(x) = H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$= \left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)\left(2 - \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)\right)\right)^n$$

$$= \left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{n} + 1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x^2} \text{ d'après 11}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$

$$\boxed{\text{Bilan : } T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X}$$

Exercice 1 :

1. a. g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ par quotient de fonctions qui le sont

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x + \frac{\ln(x)}{x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}}{x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{1}{x^2} > 0$

$\cancel{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\ln(x)}{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \geq x^2 \quad x^2 > 0}$

$\cancel{\Leftrightarrow \ln(x) - x^2 \geq 0}$

Copie anonyme - n°anonymat : 359301

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 29	Session : 2025

Épreuve de : Maths. appro EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 1 + \frac{\ln(x)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x^2} \geq -1$

$\Leftrightarrow \ln(x) \geq -x^2 \quad x^2 > 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) + x^2 \geq 0$

$h : x \mapsto \cancel{\ln(x) + x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad h'(x) = \frac{1}{x} + 2x > 0$

$\cancel{\lim_{x \to 0} h(x)}$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée

$\ln(x) + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^{-1}$

x	0				$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		↗		↘	0

b. $k \geq 3 > e^{-1}$ car $\ln(3) \geq \ln(1) = 0 > -1$

$\Rightarrow e^{\ln(3)} > 1 > e^{-1}$ exp strict ↗ sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow 3 > e^{-1}$

$\boxed{\text{Donc la suite } \left(\frac{\ln(k)}{k}\right) \text{ est décroissante}}$

$\forall k \geq 4$, $\quad k \geq 2$

$\Rightarrow \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}$ par décroissance de g

$\boxed{\text{Bilan : } \forall k \geq 4 \quad \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}}$

2. a. f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ par produit, composée et différence de fonctions qui le sont
$(x - n > 0 \Leftrightarrow x > n)$

$\forall x > n$, $f_n'(x) = \ln(x) + \frac{x-n}{x} - \left(\ln(x-n) + x\frac{1}{x-n}\right)$

$= \ln(x) + \frac{x-n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n}$

$= \ln(x) - \ln(x-n) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n}$

$= \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{(x-n)^2 - x^2}{x(x-n)}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Bilan: } n \geq 1,\ f_n \text{ dérivable sur }]n; +\infty[\text{ et } \forall x > n \\ f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{n^2 - 2nx}{x(x-n)}\end{array}}$

2. b. $\forall t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$

$\Leftrightarrow \ln(t) - t + 1 \leq 0$

$j : t \mapsto \ln(t) - t + 1$

j dérivable sur $]0; +\infty[$

$j'(t) = \frac{1}{t} - 1$

$\frac{1}{t} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t} \geq 1 \Leftrightarrow t \leq 1$

t	0		1		$+\infty$
j'		$+$	0	$-$	
j		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$j(1) = 0$

Donc $\forall t>0,\ j(t) \leq 0$

$\Leftrightarrow \ln(t) - t + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \ln(t) \leq t - 1$

$\boxed{\text{Bilan : } \forall t > 0,\ \ln(t) \leq t-1}$

c. f_n est C^0 sur $]n ; +\infty[$ car dérivable sur cette intervalle (1)

En admettant qu'elle soit strict décroissante sur $]n;+\infty[$

$f_n(]n;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) ; \lim\limits_{x\to n} f_n(x)[$

$=]+\infty \quad ; \qquad [$ $\left(\lim\limits_{x\to n} f_n(x) = +\infty \text{ sans forme indéterminée}\right)$

en admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$

f_n réalise une bijection de $]n;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$ donc $\exists!\ x_n \in \mathbb{R}$ tq $f_n(x)=0$

or $f_n(n+1) = (n+1-n)\ln(n+1) - (n+1)\ln(\underbrace{n+1-n}_{=1})$

$= \ln(n+1) \geq 0$ car $n \geq 1 \Rightarrow n+1 > 1$

$f_n(n+2) = (n+2-n)\ln(n+2) - (n+2)\ln(n+2-n)$

$= 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2)$

$= 2\ln\left(\frac{n+2}{2}\right) - n\ln(2)$

admettons que cela soit inférieur à 0

$\boxed{\text{Bilan : } \exists!\ x_n \in [n+1, n+2] \text{ tq } f_n(x) = 0}$

3. $x_n \in [n+1, n+2] \Rightarrow n+1 \leq x_n \leq n+2$

$\Rightarrow \frac{n+1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{n+2}{n}$

$\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ $\frac{n+2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Donc par encadrement $\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\boxed{\text{Bilan : } x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$

4.b. $\cancel{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$ $\cancel{\lim_{n\to+\infty}}$

6. En admettant $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$

$\forall n \geqslant 1$, $n^{1/2}\frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées

donc $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge d'après Riemann ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

$\boxed{\text{Par négligeabilité } \sum u_n \text{ diverge}}$

$u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$ (composition par $x \mapsto x^2$)

$n^{3/2}\frac{\ln(n)^2}{n^2} = \frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées

donc $u_n^2 \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

$\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^{3/2}} > 0$

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge d'après Riemann ($\frac{3}{2} > 1$)

$\boxed{\text{Bilan: Par négligeabilité } \sum u_n^2 \text{ converge}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 359301

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 29 | Session : 2025

Épreuve de : Maths. appro

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 2 :

1. a. Soit $x \in F$

F sev de E donc $x \in E$
(sous espace vectoriel)

$x \in F$ $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), p(x) \rangle$

$= \langle x, p \circ p(x) \rangle$ car p symétrique car projection orthogonale

$= \langle x, x \rangle$ car p projecteur

$= \|x\|^2$

Par strict $\searrow$ de $x \mapsto \sqrt{x}$

$x \in F, \|p(x)\| = \|x\|$

$$\boxed{\text{Bilan : } F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|}$$

b. $\forall x \in E$, $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)}$

car $p(x - p(x)) = p(x) - p\circ p(x) = p(x) - p(x)$ (p projection)
p endomorphisme $= 0$

et $\ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)$

donc d'après Pythagore,

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\boxed{\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2}$$

c. $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \underbrace{\|x - p(x)\|^2}_{\geq 0} + \|p(x)\|^2$

$\Rightarrow \|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2$

$\Rightarrow \|x\| \geq \|p(x)\|$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ strict ↓ sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall x \in E \quad \|x\| \geq \|p(x)\|}$$

2.a. Soit $x \in F_1 \cap F_2$

d'où $p_1 \circ p_2(x) = p_3(x)$ donc $x \in F_3$

$$\boxed{\text{Bilan : } F_1 \cap F_2 \subset F_3}$$

b. $x \in F_3 = \{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\}$

c. En admettant 2. b. on a $x \in F_3 \Rightarrow x \in F_2 \Rightarrow x \in F_1$

~~Donc $F_3 \subset F_2$~~ $\subset$ ~~F_1~~ donc $x \in F_3 \Rightarrow x \in F_1 \cap F_2$

d'où $F_3 \subset F_2 \cap F_1$

$$\boxed{\text{Donc avec 2.a par double inclusion } F_1 \cap F_2 = F_3}$$

d. $\forall (x, y) \in E^2,$

~~$< p_3(x), y > = < x, p_3(y) >$ car p_3 projecteur orthogonal de E ~~sur~~ p_3 endomorphisme symétrique de E~~

~~F_3 étant un sev de E, p_3 étant un projecteur orthogonal~~

~~$x \in F_3 = \{ x \in E, \| p_3(x) \| = \| x \| \}$~~

En admettant $< p_3(x), y > = < x, p_3(y) >$ $\forall x, y\ (E^2)$

On a $< p_1 o p_2 (x), y > = < x, p_1 o p_2 (y) >$

$= < p_1(x), p_2(y) >$ p_1 symétrique

$= < p_2 o p_1 (x), y >$ p_2 symétrique

en admettant que $p_1 \in S(F_1)$

$\underbrace{p_2 \in S(F_2)}$,

$\Rightarrow p_1 \in S(E), p_2 \in S(E)$

$$\boxed{\text{Bilan: } \forall (x, y) \in E^2, < p_1 o p_2 (x), y > = < p_2 o p_1 (x), y >}$$

e. $\forall (x, y) \in E^2$

~~$< p_1 o p_2 (x), y > = < p_2 o p_1 (x), y >$~~

~~$\Rightarrow < p_1 o p_2 (x), y > - < p_2 o p_1 (x), y > = 0$~~

~~$\Rightarrow < p_1 o p_2 (x) - p_2 o p_1 (x), y > = 0$~~

3. a.

$p o p = p_1 o p_2 o p_1 o p_2$

$= p_1 o \underbrace{p_2 o p_2} o p_1$

$= p_1 o p_2 o p_1$

$p \circ p = p_1 \circ p_1 \circ p_2$

$= p_1 \circ p_2$

$= p$

Bilan : p est un projecteur de E

b. $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p(x), y \rangle$

$= \langle p_1 \circ p_2 (x), y \rangle$

$= \langle p_2(x), p_1(y) \rangle$ p_1 symétrique

$= \langle x, p_2 \circ p_1 (y) \rangle$ p_2 symétrique

$= \langle x, p_1 \circ p_2 (y) \rangle$

$= \langle x, p(y) \rangle$

Bilan : p endomorphisme symétrique de E

c. p est un endomorphisme symétrique de E

$\Leftrightarrow$ p est un projecteur orthogonale de E (car p projection de E) (admettons que cela soit sur $F_1 \cap F_2$)

Bilan : $p_1 \circ p_2 = p$ est un projecteur orthogonale

4. Soit p_1 et p_2 les projections orthogonales sur F_1 et F_2 où F_1, F_2 sont des sev de E. Alors $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ est la projection orthogonale sur $F_1 \cap F_2$

Copie anonyme - n°anonymat : 359301

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 29 | **Session :** 2025

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{4^n}\, \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}$

$$= \frac{1}{4^n}\, \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$= \frac{1}{4^n (n!)} \times \frac{(2n)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \times \frac{(2n)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \times 2n \times \dots \times 2n-(n-1)$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \times \prod_{k=1}^{n} (k+n)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}$$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}}$$

```
def B(n):
    P=(1+n)/4
    for k in range(2,n+1):
        P= P* ((k+n)/4*k)
    return P
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 2 :

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \, dt$ $t \mapsto \sin(t)^n$ C^0 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0(t) \, dt = \int_0^{\pi} 1 \, dt$$
$$= [t]_0^{\pi}$$
$$= \pi - 0$$
$$= \pi$$

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \, dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2}$$
$$= -\cos(\pi/2) + \cos(0)$$
$$= 1$$

$$\boxed{\text{Bilan : } W_0 = \pi \quad W_1 = 1}$$

3. $\forall t \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq (\sin(t))^{n+1} \leq \sin^n(t)$ $(\times \sin^n(t) \geq 0)$

en intégrant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ $(0 < \frac{\pi}{2})$, intégrales unies

$$0 \leq W_{n+1} \leq W_n$$

$$\boxed{\text{Bilan : } (W_n)_{n \geq 0} \text{ décroissante}}$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\,dt$.

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\sin(t)\,dt$$

Posons $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u(t) = \sin^{n+1}(t)$ $u'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t)$
$v(t) = -\cos(t)$ $v'(t) = \sin(t)$

u et v étant C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par intégrations par parties,

$$W_{n+2} = \left[-\sin^{n+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\cos^2(t)\sin^n(t)\,dt$$

$$= -\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\sin^{n+1}(0)}_{=0}\cos(0) + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)\,dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\,dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt - (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\,dt \quad \text{(linéarité)}$$

$$= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$$

$$\Rightarrow W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

$$\Rightarrow (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

$$\Rightarrow W_{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+2)} W_n \quad (n+2 > 0)$$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

5. Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n " $W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$ "

$\underline{n=0}$: $W_0 = \frac{\pi}{2}$ d'après 1

$$\frac{\pi}{2} B_0 = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

Donc P_0 vraie

$$W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \quad \text{d'après } 4°$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2} B_n \leftarrow HR$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2n+1}{2(n+1)} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2n+1}{2(n+1)} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{2(n+1)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{2n+1}{4(n+1)^2} \times \frac{1}{4^n} \times (2n+2) \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= B_{n+1} \times \frac{\pi}{2}$$

Donc P_{n+1} vraie

Bilan : Par le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$,
$W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n « $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$ »

n = 0 : $W_1 = 1$ avec 2°

$$\frac{1}{(2\times 0+1)} \times \frac{1}{B_0} = 1$$

Donc H_0 vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq H_n soit vraie

$$W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} = W_{(2n+1)+2}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} W_{2n+1} \leftarrow \text{d'après } 4°$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{1}{(2n+1)B_n} \leftarrow HR$$

Copie anonyme - n°anonymat : 359301

Code épreuve : 297	**Nombre de pages :** 29	**Session :** 2025
Épreuve de : Maths. appro EDHEC		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$$W_{2(n+1)+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times 4^n \times \frac{1}{(2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times 4^n \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times 4^n \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \times \frac{2n+2}{2n+2}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times 4^n \times \frac{(n!)^2}{(2(n+1))!} \times 2(n+1)$$

$$= 4^{n+1} \times \frac{n}{2n+1} \times \frac{(n!)^2}{(2(n+1))!} \times (n+1)$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{1}{(2n+1)\frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{4^n}}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{1}{(2n+1)4^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)4^n(2n)!}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{1}{2n+1} \times \frac{(n!)^2}{4^n(2n)!} \times \frac{2(n+1)}{2n+3}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6. En admettant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

on a $W_{2n+1} = W_{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1}$ d'après 4)

$\Rightarrow \frac{1}{(2n+1)B_n} = W_{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1}$

$\Rightarrow 1 = W_{2n-1} \times 2n B_n$ $\quad (2n+1)B_n > 0$

$\Rightarrow W_{2n-1} = \frac{1}{2n B_n}$ $\quad 2n B_n > 0$ car $n \geq 1 > 0$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ W_{2n-1} = \frac{1}{2n B_n}}$$

7. $(W_n)_{n \geq 0}$ décroissante donc

$W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2n B_n}$ d'après 5 et 6

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2n B_n}}$$

d'où $\frac{1}{(2n+1)} \leq \frac{\pi}{2} B_n^2 \leq \frac{1}{2n}$ $\quad B_n > 0$

$\Rightarrow \frac{2}{\pi(2n+1)} \leq B_n^2 \leq \frac{1}{\pi n}$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi 2(n+2)} \leqslant \frac{2}{\pi(2n+1)} \leqslant B_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leqslant \underbrace{|B_n|}_{=B_n \text{ car } B_n > 0} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \qquad x \mapsto \sqrt{x} \text{ strict } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leqslant B_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}}$$

8. $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}} = 1$ $\qquad \dfrac{\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

or $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$

donc $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Par encadrement $\dfrac{B_n}{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$$\boxed{\text{Bilan : } B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}}$$

Partie 3 :

9. a. $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\quad Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$

$X_k(\Omega) = \{-1 ; 1\}$

d'où $Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$

$P(Y_k = 0) = P(X_k = -1)$
$P(Y_k = 1) = P(X_k = 1)$

donc $P(Y_k = 0) = P(Y_k = 1) = \frac{1}{2}$

et $E(Y_k) = \frac{1}{2}$ $\qquad V(Y_k) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \ Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\tfrac{1}{2}\right) \quad E(Y_k) = \tfrac{1}{2} \quad V(Y_k) = \tfrac{1}{4}}$$

b. $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} X_k$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} X_k$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1+X_k}{2} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$

Les (X_k) étant mutuellement indépendants par lemme des coalitions $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ étant mutuellement indépendants

Donc par théorème de stabilité $T_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$

$\forall k \in [\![0, n]\!], \ P(T_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$

$= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\boxed{\text{Bilan : } T_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \tfrac{1}{2}\right)}$$

c. Si tout les X_k valent 1 alors S_n vaudra n au maximum. Si ils valent tous -1 alors S_n vaudra $-n$ au minimum

et $S_n = 2T_n - n$ et $T_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \Rightarrow S_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$

$$\boxed{\text{D'où } S_n(\Omega) = \{2j - n, \ j \in [\![0, n]\!]\}}$$

$S_n = 2T_n - n \qquad \forall k \in S_n(\Omega), \ P(S_n = k) = P(2T_n - n = k)$

$= P(2T_n = k+n)$

$= P\left(T_n = \frac{k+n}{2}\right) \quad n > 0$

$= \binom{n}{\frac{k+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall k \in S_n(\Omega), \ P(S_n = k) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 359301

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 29	Session : 2025
	Épreuve de : Maths . appro EDHEC		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10. a.

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{\frac{2k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$

$= \binom{2k}{k} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^k$

$= \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$

$= B_k$

$$\boxed{\text{Bilan : } k \in \mathbb{N}^*, \ P(S_{2k} = 0) = B_k}$$

c. $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $A_k = (S_{2k} = 0)$

$R_n = \sum_{k=1}^{n}$ "$(S_{2k} = 0)$ a lieu"

$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$

$$\boxed{\text{Bilan : } R_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}}$$

< linéarité espérance

d. $E(R_n) = \sum_{k=1}^{n} E(\mathbb{1}_{A_k})$

$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

$= \sum_{k=1}^{n} P(S_{2k}=0)$ car $A_k = (S_{2k}=0)$

$= \sum_{k=1}^{n} B_k$ d'après 10.b.

$$\boxed{\text{Bilan : } E(R_n) = \sum_{k=1}^{n} B_k}$$

11. $k \in \mathbb{N}^*$,

$k \geq k-1$

$\Rightarrow \sqrt{k} \geq \sqrt{k-1}$ $x \mapsto \sqrt{x}$ strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow k \geq \sqrt{k}\sqrt{k-1}$

$\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$

$\Rightarrow 1 \leq 2k - 2\sqrt{k}\sqrt{k-1}$

$\Rightarrow 1 \leq 2(k - \sqrt{k}\sqrt{k-1})$

$k \leq k+1$

$\Rightarrow \sqrt{k} \leq \sqrt{k+1}$ $x \mapsto \sqrt{x}$ strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow k \leq \sqrt{k}\sqrt{k+1}$

$\Rightarrow k - \sqrt{k}\sqrt{k+1} \leq 0$

$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\Rightarrow 2(\sqrt{k}\sqrt{k+1} - k) \leq 1$ < vrai car $\sqrt{k}$

Avec 7 et en admettant 12

12. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \leq B_k \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$

en sommant de $k=1$ à n

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}_{=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \leq E(B_n) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})}_{=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times 2\sqrt{n}}$$

(télescopage) (télescopage)

D'où $\frac{2\sqrt{n+2}-2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \leq E(B_n) \leq \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$

$$\frac{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}}{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}} = 1 \qquad \frac{\frac{2\sqrt{n+2}-2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}}{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}} = \frac{2\sqrt{n+2}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$$

$$= \frac{2\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n}} - \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

$\sqrt{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$

d'où $\frac{2\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Donc par encadrement $\frac{E(B_n)}{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$$\boxed{\text{Bilan : } E(B_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}}$$

Partie 4 :

13.a

b.

14. soit $(x, y) \in [0, 4[$ tq $x \leq y$

$$x \leq y$$
$$\Rightarrow x^n \leq y^n \qquad n \geq 1$$
$$\Rightarrow \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \frac{y^n}{\binom{2n}{n}} \qquad \binom{2n}{n} > 0$$

en sommant de $n = 1$ à N

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{y^n}{\binom{2n}{n}}$$

puis en faisant tendre N vers $+\infty$ ($f(x)$ et $f(y)$ existe)

$$f(x) \leq f(y)$$

$$\boxed{\text{Bilan : } f \text{ est croissante sur } [0; 4[}$$

15. a. D'après 7. $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi}\sqrt{n} \leq \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1} \qquad x \mapsto \frac{1}{x} \text{ strict } \searrow \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi}\sqrt{n}\,\frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1}\,\frac{1}{4^n} \qquad \frac{1}{4^n} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi}\sqrt{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1}\left(\frac{x}{4}\right)^n \qquad x^n > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \sqrt{\pi}(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

Copie anonyme - n°anonymat : 359301

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 29	Session : 2025

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Bilan : $\forall x \in [0, 4[, \forall n \geq 1,$
$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\,(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

b. En admettant l'encadrement

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x} = 0$ sans forme indéterminé (FI)

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x}\right) = 0$ sans FI

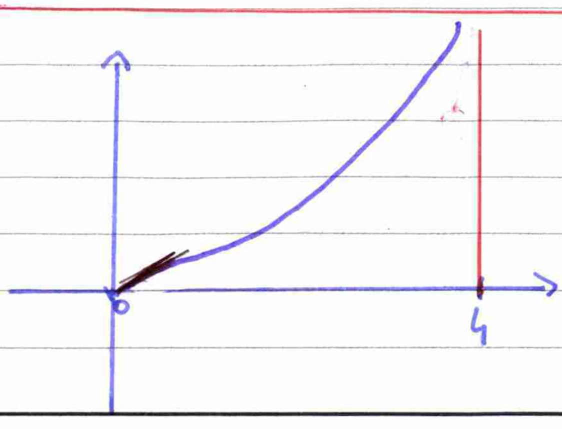
donc par encadrement $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 4^-} \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x} = +\infty$ sans FI

donc par comparaison $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$

Bilan : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$

17.



NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE