Exercice 1.

1) a) $\ln$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ aussi donc par produit, g l'est, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x^2} > 0$ donc $g'(x)$ est du même signe que $1 - \ln(x)$.

$$1 - \ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq \ln(x)$$
$$\iff e \geq x$$ en composant par exp qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc g est croissante sur $]0; e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$.

$$g(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$ sans indétermination

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$ par croissance comparée

donc :

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & e & & \\ \hline g(x) & & & \frac{1}{e} & & \\ & -\infty & \nearrow & & \searrow & 0^+ \end{array}$$

1) b) $\forall k \geq 3$, $e \sim 2{,}718$ donc $k > e$.

donc d'après le tableau de variations de la (1a), comme g est décroissante sur $[e; +\infty[$, $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k\geqslant 3}$ est décroissante,

donc $\forall k \geqslant 4$, $\frac{\ln(k)}{k} \leqslant \frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$

donc $\forall k \geqslant 4$, $\frac{\ln(k)}{k} \leqslant \frac{\ln(2)}{2}$

2) a) $x \mapsto x-n$ est polynomiale donc dérivable sur $]n,+\infty[$, de même que $x \mapsto x$.
$\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in]n;+\infty[$, $x-n>0$
donc $x \mapsto \ln(x-n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée.

Donc par produit, différence et composée, f_n est dérivable sur $]n;+\infty[$

et $\forall x>n$,

$$f_n'(x) = \ln(x) + \frac{x-n}{x} + \ln(x-n) - \frac{x}{x-n}$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n}$$

donc $\forall x>n$, $f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n}$

2) b) étudions $h : t \mapsto t-1-\ln(t)$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence.
et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

$h'(x) \geqslant 0 \iff t-1 \geqslant 0$ (car $t>0$ donc $\frac{1}{t}>0$)
$\iff t \geqslant 1$.

donc t est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.
or $h(1) = 1-1-\ln(1) = 0$.
donc $\forall t>0$,
$h(t) \geqslant 0 \iff \ln(t) \leqslant t-1$.

donc $\forall t>0,\ \ln(t) \leq t-1$

$\forall x>n,\quad x-n>0 \Rightarrow \frac{x}{x-n}>0 \qquad (x>n>0)$:

donc en reprenant l'inégalité que nous venons d'établir,
$\forall x>n,$

$$\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) \leq \frac{x}{x-n}-1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{x}{x-n}+1 \leq 0$$

or $\forall x<n,\quad x-n<x \Rightarrow \frac{x-n}{x}\in\,]0;1[$. donc $\frac{x-n}{x}<1$

donc $\ln\left(\frac{x}{x-n}\right)-\frac{x}{x-n}+\frac{x-n}{x} < \ln\left(\frac{x}{x-n}\right)-\frac{x}{x-n}-1 \leq 0.$

donc $f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right)+\frac{x-n}{x}-\frac{x}{x-n}<0.$

donc f_n est strictement décroissante sur $]n;+\infty[$

2) c) d'après la question (2a), f_n est dérivable, donc C^0, sur $]n;+\infty[$ et d'après la question (2b), f_n est strictement décroissante sur $]n;+\infty[$.

donc f_n est une bijection de $]n;+\infty[$, sur $]\lim\limits_{x\to n^+} f_n(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[$.

$$\lim_{x\to n^+} f_n(x) = \lim_{x\to n^+}(x-n)\ln(x)-x\ln(x-n) = +\infty$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-n)\ln(x)-x\ln(x-n)$

or $(x-n)\ln(x)+x\ln(x-n) = x\ln\left(\frac{x}{x-n}\right)-n\ln(x)$

$= -x\ln\left(1-\frac{n}{x}\right)-n\ln(x).$

$-x\ln\left(1-\frac{n}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ et $n>0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -n\ln(x) = -\infty$.

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

donc f_n est une bijection de $]n;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

donc $\exists !\, x \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x) = 0$.

or $f_n(n+1) = 1\ln(n+1) - (n+1)\ln(1)$
$= \ln(n+1)$

$n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow \ln(n+1) \geq \ln(2) > 0$
par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

donc $f_n(n+1) > 0$.

et $f_n(n+2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2)$
$= 2\ln\left(\frac{n+2}{2}\right) - n\ln(2)$

~~or d'après la question (2b), comme $\frac{n+2}{2} > 0$,~~

~~$2\ln\left(\frac{n+2}{2}\right) \leq n+2-2 = n$~~

~~donc~~

$f_n(n+2) = 2\ln(n+2) - 2\ln(2) - n\ln(2)$
$= 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2)$

d'après la question (1b), $n+2 \geq 4$ donc, $\frac{\ln(n+2)}{n+2} \leq \frac{\ln(2)}{2} \Rightarrow \ln(n+2) \leq \frac{n+2}{2}\ln(2)$

donc $f_n(n+2) \leq (n+2)\ln(2) - (n+2)\ln(2) = 0$

~~Il vient que $f_n(n+2) \leq 0$~~ donc $f_n(n+2) \leq 0$

$f_n(n+1) \geq 0$ et $f_n(n+2) \leq 0$
donc $\exists !\, x \in [n+1, n+2]$ tel que $f(x) = 0$

donc $f_n(x) = 0$ d'inconnu $x \in [n+1, n+2]$ admet une unique solution x_n

3) $n+1 \leq x_n \leq n+2$
$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq 1 + \frac{2}{n}$ $\quad (n \geq 2 > 0)$

or $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $1 + \frac{2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

donc par encadrement, $\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Donc $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n$

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

4) a) $\forall n \geq 2,$

$f(x_n) = 0 \Rightarrow (x_n - n)\ln(x_n) = x_n \ln(x_n - n)$

$\Rightarrow (x_n - n)\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} = \ln(x_n - n)$ $\quad (x_n \geq n+1 > 0).$

Donc $\forall n \geq 2, \ln(x_n - n) = (x_n - n)\dfrac{\ln(x_n)}{x_n}$

4) b) $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ car $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n$.

donc par croissance comparée, $\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

5) a) d'après la question précédente que j'admet, $x_n - n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 - 1 = 0$

donc $\ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$

et $\forall n \geq 2$, $\ln(1 + n - x_n) =$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5)b) d'après la question (5a), $\ln(1+U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$

or $\forall n \geq 2$, $\ln(1+U_n) = \ln(1+x_n-n-1) = \ln(x_n-n)$.

et $\forall n \geq 2$, $\ln(1+n+U_n) = \ln(1+n+x_n-n-1) = \ln(x_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

donc avec la question (4a),

$$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (x_n-n)\frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$ car $\lim_{n\to+\infty}(x_n-n)=1$ (question (4b)).

donc $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$

6) $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$. $\forall n \geq 1$, $\frac{\ln(n)}{n} \geq 0$.

$\forall n \geq 1$, $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$. et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge comme série de Riemann divergente ($\alpha = 1$).

donc par théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

et donc par critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 1} U_n$ diverge

$$U_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \times \frac{\ln^2(n)}{n^{1/2}}$$

or par croissance comparée, $\frac{\ln^2(n)}{n^{1/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

donc $U_n^2 \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

$\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$.

et en reconnaissant une série de Riemann où $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

Donc par critère de négligeabilité, $\sum_{n\geq 1} U_n^2$ converge

Exercice 2

1) a) $\forall x \in F$, $x \in E$ car $F \subset E$

~~[illegible]~~

or $x \in F$ donc p étant la projection orthogonale sur F,

$p(x) = x$. donc $\|p(x)\| = \|x\|$

donc $x \in \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.

$$\boxed{\text{Donc } F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}}$$

1) b) $\forall x \in E$,

$\|x\|^2 = \|x - p(x) + p(x)\|^2$

or $x - p(x) \in F^\perp$ et $p(x) \in F$ donc par Pythagore,

$\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in E, \|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2}$$

1) c) $\forall x \in E$ où $\|p(x)\| = \|x\|$,

d'après la question (1b),

$\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$.

or $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2$ (la fonction carrée est C° sur $\mathbb{R}$)

donc $\|p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$

$\Rightarrow \|x - p(x)\|^2 = 0$

$\Rightarrow x - p(x) = 0$

$\Rightarrow x = p(x)$. et p est la projection orthogonale sur F.

donc $x \in F$

donc $\{x \in E, \|x\| = \|p(x)\|\}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{donc, avec l'inclusion établie à la question (1a), par double inclusion,} \\ F = \{x \in E, \|x\| = \|p(x)\|\}\end{array}}$$

et avec la question (1b),

$$\forall x \in E, \ \|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$$

or $\|x - p(x)\|^2 \geqslant 0$ donc $\|x\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$.

et $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\|x\| \geqslant \|p(x)\|$ par composition

donc $\forall x \in E, \ \|x\| \geqslant \|p(x)\|$

2) a) $\forall x \in F_1, \ p_1(x) = x$
et $\forall y \in F_2, \ p_2(y) = y$

donc $\forall x \in F_1 \cap F_2, \ \begin{cases} x \in F_1 \text{ donc } p_1(x) = x \\ x \in F_2 \text{ donc } p_2(x) = x \end{cases}$

donc $x = p_2(x) = p_1(p_2(x))$
$= (p_1 \circ p_2)(x)$
$= p_3(x) \in F_3$.

Donc $\forall x \in F_1 \cap F_2, \ x \in F_3$.

Donc $F_1 \cap F_2 \subset F_3$

2) b) $x \in F_3$ donc $x = p_3(x) = (p_1 \circ p_2)(x)$

or $\forall x \in F_3, \ p_1(x) \in E$ ~~####~~
et p_1 est la projection orthogonale sur F_1 un sous espace vectoriel de E

donc d'après la question (1c),
$\|p_1(p_2(x))\| \leqslant \|p_2(x)\|$
$\Rightarrow \|x\| \leqslant \|p_2(x)\|$.

Donc $\|x\| \leqslant \|p_2(x)\|$

$\|x\| \leqslant \|p_2(x)\|$ or d'après la question (1c), comme $x \in E$ (car $F_3 \subset E$) et p_2 est la projection orthogonale sur F_2 un sous-espace vectoriel de E,
$\|x\| \geqslant \|p_2(x)\|$

donc par double inégalité, $\|x\| = \|p_2(x)\|$ (*) $x = p_2(x)$.
or $p_2(x) \in F_2$. donc $x \in F_2$

donc $x \in F_2$

$x \in F_3$ donc $p_3(x) = x$ or $p_1 \circ p_2 = p_3$

donc $x = p_1(p_2(x))$
et p_1 est la projection orthogonale sur F_1
donc $x = p_1(p_2(x)) \in F_1$.

Donc $x \in F_1$

2) c) si $x \in F_3$, alors $x \in F_1$ et $x \in F_2$ d'après la question (2b).
donc $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.
or d'après la question (2a), $F_1 \cap F_2 \subset F_3$.

donc $F_3 = F_1 \cap F_2$

2) d) p_3 est un projecteur orthogonal donc p_3 est symétrique.

Donc $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p_3(x), y\rangle = \langle x, p_3(y)\rangle$

or $p_3 = p_1 \circ p_2$ donc $\langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle = \langle x, p_1 \circ p_2(y)\rangle$

$= \langle p_2(x), p_1(y)\rangle = \langle (p_1 \circ p_2)(x), y\rangle$ car p_1 et p_2 sont symétriques donc $\langle (p_1 \circ p_2)(x), y\rangle = \langle (p_2 \circ p_1)(x), y\rangle$

2) c) $\forall (x,y) \in E^2$, d'après la question (2d),

$\langle (p_1 \circ p_2)(x), y\rangle = \langle (p_1 \circ p_2)(x), y\rangle$

$\Rightarrow \langle (p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x), y\rangle$ par bilinéarité du produit scalaire

et ce $\forall y \in E$.

donc $(p_1 \circ p_2)(x) - (p_1 \circ p_2)(x) = 0$

$\Rightarrow (p_1 \circ p_2)(x) = (p_2 \circ p_1)(x)$.

et ce $\forall x \in E$.

donc $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$

3) a) p_1 et p_2 sont des endomorphismes de E donc $p = p_1 \circ p_2$ aussi

et $p^2 = (p_1 \circ p_2)^2 = p_1 \circ (p_2 \circ p_1) \circ p_2$

$= p_1 \circ (p_1 \circ p_2) \circ p_2$

$= (p_1 \circ p_1) \circ (p_2 \circ p_2)$

$= p_1^2 \circ p_2^2$

$= p_1 \circ p_2$ car p_1 et p_2 sont des projecteurs.

$= p$

Donc p est un projecteur de E

3) b) $\forall (x,y) \in E^2$, p est un projecteur donc est un endomorphisme,

et $\langle p(x), y\rangle = \langle (p_1 \circ p_2)(x), y\rangle$

$= \langle p_2(x), p_1(y)\rangle$ car p_2 est un projecteur orthogonal donc est symétrique

$= \langle x, (p_2 \circ p_1)(y)\rangle$ car p_2 l'est aussi

$= \langle x, (p_1 \circ p_2)(y)\rangle$ car $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$

$= \langle x, p(y)\rangle$.

donc p est un endomorphisme symétrique de E

3) c) $p = p_1 \circ p_2$ est un projecteur de E, et est un endomorphisme symétrique de E.

donc $p_1 \circ p_2$ est un projecteur orthogonal.

et, $\forall x \in F_1 \cap F_2$, $x \in F_2$ donc $p_2(x) = x$
et $x \in F_1$ donc $p_1(x) = x$
donc $(p_1 \circ p_2)(x) = p_1(x) = x$.

et $\forall x \notin F_1 \cap F_2$.
donc $x \notin F_2$ et donc $p_2(x) = 0 \Rightarrow (p_1 \circ p_2)(x) = p_1(0) = 0$
ou $x \notin F_1$ et donc $p_1(x) = 0 \Rightarrow (p_2 \circ p_1)(x) = p_2(0) = 0$
or $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ donc $(p_1 \circ p_2)(x) = 0$.
donc si $x \notin F_1 \cap F_2$, $(p_1 \circ p_2)(x) = 0$.

Donc $p_1 \circ p_2$ est la projection orthogonale sur $F_1 \cap F_2$

4) en question (2), on a démontré que si $p_1 \circ p_2 = p_3$, alors $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$
et en question (3), on a démontré que si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$, alors $p_1 \circ p_2$ est la projection orthog^{al} sur $F_1 \cap F_2$

or dans la question (2) on a montré aussi que $F_1 \cap F_2 = F_3$.
donc p_3 était la projection orthog^{al} sur $F_1 \cap F_2$.

Donc par double implication, on a démontré avec les questions (2) et (3) que
$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ si et seulement si $p_1 \circ p_2 = p_3$

Exercice 3

PARTIE I

1) $\forall x \leq 0$, $-2x \geq 0$, et exp est à valeurs (strictement positives) donc $f(x) \geq 0$.
$\forall x > 0$, $f(x) = 0 \geq 0$.
donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car constante, et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme produit et composée (exp est C^0 sur $\mathbb{R}$).

Donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} -2xe^{-x^2}\,dx$$

soit $\beta<0$,

$$\int_{\beta}^{0} -2xe^{-x^2}\,dx = \left[e^{-x^2}\right]_{\beta}^{0} = 1-e^{-\beta^2}$$

or $-\beta^2 \xrightarrow[\beta\to-\infty]{} -\infty$ et $e^{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

donc $\int_{\beta}^{0} -2xe^{-x^2}\,dx \xrightarrow[\beta\to-\infty]{} 1$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Donc f peut être considérée comme une densité de probabilité

2) $\forall x\in\mathbb{R}$,

si $x>0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} 0\,dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0+1=1$

si $x\leq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

soit $\beta<x$, $\int_{\beta}^{x} f(t)\,dt = \int_{\beta}^{x} -2te^{-t^2}\,dx = \left[e^{-t^2}\right]_{\beta}^{x} = e^{-x^2}-e^{-\beta^2}$

$\xrightarrow[\beta\to-\infty]{} e^{-x^2}$.

donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ e^{-x^2} & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$

3) une densité de $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$ est f_Z où $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$

4) sous réserve de convergence, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} -2t^2e^{-t^2}\,dt$

l'intégrande est paire sur $\mathbb{R}$ donc $E(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} -2t^2e^{-t^2}\,dt$

donc $E(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt$ par linéarité

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $E(X) = -\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$

$= -\sqrt{\pi}\, E(Z^2)$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\frac{1}{2})$

$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc $E(X)$ existe et vaut $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5) $Z = X^2$ et $X(\Omega) = \mathbb{R}_-^*$. donc $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

si $x \leq 0$, $G(x) = 0$

si $x > 0$, $G(x) = P(X^2 \leq x) = P(|X| \leq \sqrt{x})$

$= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$

$= P(-\sqrt{x} < X \leq \sqrt{x})$ car X est à densité

$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$

$= -F(-\sqrt{x})$ car $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 0 \Rightarrow F(\sqrt{x}) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -F(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

~~[illegible]~~ $x \mapsto x^2$ est polynomiale et est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par composée, F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

donc comme $\sqrt{\cdot}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée et différence, G est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. G est aussi C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ car constante.

et $\lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0^+} -F(-\sqrt{x}) = 0 = G(0) = \lim_{x\to 0^-} G(x)$

donc G est continue en 0 donc continue sur $\mathbb{R}$, et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point

donc Z est à densité, et par dérivation, une densité de Z est g où,

$\forall t \in \mathbb{R}$,

si $t \leq 0$, $g(t) = 0$

si $t > 0$, $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} f(\sqrt{t})$

$= e^{-t}$

on reconnaît alors une densité d'une loi exponentielle de paramètre 1.

donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

6) $X^2 = Z$ donc $E(X^2)$ existe et $E(X^2) = E(Z) = 1$

donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

donc $V(X) = 1 - \frac{\pi}{4}$

7)
```
def simulX(n):
    R = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        R(i) = rd.exponential(1)**2
    return R
```

PARTIE 2

8) h est positive sur $\mathbb{R} \setminus [0;1]$ car nulle.
et $\forall x \in [0;1]$, $1-x \geq 0 \Rightarrow 2(1-x) = h(x) \geq 0$

donc h est positive sur $\mathbb{R}$.

h est polynomiale donc C^∞ sur $]0;1[$.
et h est constante donc C^0 sur $\mathbb{R} \setminus [0;1]$.
donc h est C^0 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et 1

et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \int_0^1 2-2x\,dx = \left[2x - x^2\right]_0^1 = 2-1 = 1.$

Donc h peut être considérée comme une densité de probabilité

9) $Y(\Omega) = [0;1]$
donc $\forall x \in \mathbb{R}$,
si $x < 0$, $H(x) = 0$
si $x > 0$, $H(x) = 1$
si $x \in [0;1]$, $H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^x 2-2t\,dt$

$$= 0 + \left[2t - t^2\right]_0^x = 2x - x^2.$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2x - x^2 \text{ si } x \in [0;1] \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

10) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_n(x) = P\left(\sqrt{n}\,(M_n - 1) \leq x\right)$$
$$= P\left(M_n - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}x\right) \qquad (\sqrt{n} > 0)$$
$$= P\left(M_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)$$
$$= P\left(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)$$
$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \left(Y_i \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P\left(Y_i \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right) \quad \text{par indépendance des } (Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} H\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right) \quad \text{car les } (Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ suivent tous la même loi que } Y$$
$$= \left(H\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)\right)^n.$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \left(H\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)\right)^n$

11) $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$,

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1+\frac{y}{n}\right)\right).$$

$\frac{y}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $n \ln\left(1+\frac{y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{y}{n} = y. \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$

donc par C^0 de exp sur $\mathbb{R}$ donc en y,

$$\left(1+\frac{y}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^y.$$

donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^y$

12)

PROBLÈME

PARTIE I

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k} = \frac{1}{4^n} \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k} = \frac{1}{4^n} \frac{n\times(n+1)\times\dots\times(2n)}{1\times\dots\times n}$

$$= \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = B_n.$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}$

```
def B(n):
    p = (n+1)/4
    for k in range(2, n+1):
        p = p*(k+n)/(4*k)
    return p
```

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

PARTIE II

2) $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont C^0 sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ donc W_0 et W_1 existent.

$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0-(-1) = 1.$

donc $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$,

W_n et W_{n+1} existent car $t \mapsto \sin^n(t)$ et $t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ sont C^0 sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par produit.

et $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(\sin(t)-1)\,dt$, par linéarité des intégrales convergentes.

$\forall t \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \in [0;1]$ donc $\sin^n(t) \geq 0$ et $\sin(t)-1 \leq 0$.

donc $\sin^n(t)(\sin(t)-1) \leq 0$.

les intégrales en jeu convergent et $\frac{\pi}{2} > 0$ donc par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} - W_n \leq 0$.

Donc $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, pareillement qu'avant, W_{n+2} et W_n existent.

$v : t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ et $u : t \mapsto -\cos(t)$ sont C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ (par produit car $n+1 \geq 0$) donc par intégration par parties,

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\,dt = \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^2(t)(n+1)\sin^n(t)\,dt$$

$$= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\,dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\,dt$$

$$= (n+1)(W_n - W_{n+2})$$ par linéarité des intégrales convergentes avec l'existence de W_n et W_{n+2}

donc $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$

$\Rightarrow (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$

$\Rightarrow W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ car $n+2 \geq 2 > 0$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$

5) $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \dots = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\dots\times 1\times W_0}{2n\times(2n-2)\times\dots\times 2}$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{\pi}{2}\beta_n.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{\pi}{2}\beta_n$

et de même, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \dots = \frac{(2n)\times(2n-2)\times\dots\times 2\times W_1}{(2n+1)\times\dots\times 3}$$

$$= \frac{1}{2n+1}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \times 1 = \frac{1}{2n+1} 4^n \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{(2n+1)\beta_n}$$

$\boxed{\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \ W_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)B_n}}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

avec les questions (4) et (5), $(2n-1) \in \mathbb{N}$ donc,

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} \iff W_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} W_{2n+1} \quad (2n > 0)$$

donc $W_{2n-1} = \dfrac{2n+1}{2n} \times \dfrac{1}{(2n+1)B_n} = \dfrac{1}{2nB_n}$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ W_{2n-1} = \dfrac{1}{2nB_n}}$

7) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

comme $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante d'après la question (3),

$$W_{2n-1} \geq W_{2n} \geq W_{2n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2nB_n} \geq \frac{\pi}{2} B_n \geq \frac{1}{(2n+1)B_n} \qquad \text{(d'après les questions (5) et (6))}$$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{2nB_n} \geq \dfrac{\pi}{2} B_n \geq \dfrac{1}{(2n+1)B_n}}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, en multipliant par B_n qui est positive $\left(\frac{1}{4^n} > 0 \text{ et } \binom{2n}{n} > 0\right)$,

$$\frac{1}{2n} \geq \frac{\pi}{2} B_n^2 \geq \frac{1}{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \frac{1}{2n} \geq B_n^2 \geq \frac{2}{\pi} \frac{1}{2n+1} \qquad (\pi > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n\pi} \geq B_n^2 \geq \frac{1}{\pi} \frac{2}{2n+1}$$

or $0 < 2n+1 \leq 2n+2 \Rightarrow \dfrac{1}{2n+1} \geq \dfrac{1}{2n+2} \Rightarrow \dfrac{1}{\pi} \dfrac{2}{2n+1} \geq \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{n+1}$

donc $\dfrac{1}{n\pi} \geq B_n^2 \geq \dfrac{1}{(n+1)\pi}$

composons alors par $\sqrt{\cdot}$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \geqslant \beta_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}$ (les termes sont positifs)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \geqslant \beta_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}$

8) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \geqslant \beta_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}$

$\Rightarrow 1 \geqslant \sqrt{\pi}\sqrt{n} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n+1}}$

or $\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc en composant par $\sqrt{\cdot}$ qui est C^0 en 1,

$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\pi}\sqrt{n}\,\beta_n = 1$

Donc $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$

9) a) pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$X_k(\Omega) = \{-1;1\}$ et $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$

donc $Y_k(\Omega) = \{0,1\}$.

et $P(Y_k=0) = P\left(\frac{X_k+1}{2}=0\right) = P(X_k+1=0) = P(X_k=-1)$

$P(Y_k=1) = P\left(\frac{X_n+1}{2}=1\right) = P(X_n+1=2) = P(X_n=1)$

donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(P(X_k=1))$

or $X_k(\Omega) = \{-1,1\}$ donc $P(X_n=1) + P(X_n=-1) = 1$

et $P(X_k=1) = P(X_k=-1)$.

donc $P(X_k=1) = P(X_k=-1) = \frac{1}{2}$.

donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$

$E(Y_k) = \frac{1}{2}$ et $V(Y_k) = \frac{1}{4}$

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9)b) $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+X_k}{2} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

or les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes donc les $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ aussi, et suivent toutes la loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Donc $T_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

$T_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $P(T_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

9)c) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = \{-1;1\}$.

~~Résultons~~ $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} S_n$

$\iff T_n - \frac{n}{2} = \frac{1}{2} S_n$

$\iff 2T_n - n = S_n$

et T_n prend ses valeurs dans $[\![0;n]\!]$.

donc $S_n(\Omega) = \{2j - n, j \in [\![0;n]\!]\}$

$S_n(\Omega) = \{2j - n, j \in [\![0;n]\!]\}$.

et $\forall j \in [\![0;n]\!]$,

$P(S_n = 2j - n) = P(T_n = j)$ (car nous avons raisonné par équivalence)

$= \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $S_n(\Omega) = \{2j-n,\ j \in [\![0;n]\!]\}$ et $\forall j \in S_n(\Omega)$, $P(S_n = 2j-n) = \binom{n}{2j-n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

10) a) ~~$R_n = \text{card}\{k \in [\![1;2n]\!],\ S_k = 0\}$~~

~~or $\forall k \in [\![1;2n]\!]$,~~
~~$\forall l \in S_k(\Omega) = \{2j-k,\ j \in [\![0;k]\!]\}$,~~

~~$l \in [\![-k, k]\!]$~~

~~et $\forall k \in [\![1;n]\!]$,~~
~~$\forall l \in S_{2k}(\Omega) = \{2j-2k,\ j \in [\![0;2k]\!]\}$,~~

~~$l \in [$~~

10) b) $P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$ (question (9c))
$= \beta_k$

donc $P(S_{2k} = 0) = \beta_k$

10) c) $R_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ (en admettant la question (10a))

10) d) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A_k \hookrightarrow \mathcal{B}(P(S_{2k} = 0))$

donc $A_k \hookrightarrow \mathcal{B}(\beta_k)$ (question (10b))

donc par linéarité,

puisque, $R_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$,

$E(R_n) = \sum_{k=1}^{n} E(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$

13) a) d'après la PARTIE II, $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n = \dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$

donc $\dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \Rightarrow \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$

($4^n>0$ et $\binom{2n}{n}>0$)

donc $\dfrac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$

13) b) $\forall x \in [0;4[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question (13a)

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{4}\right)^n \sqrt{n\pi}$$

$0 \leq \left(\frac{x}{4}\right) < 1$ donc en reconnaissant une série géométrique,

$\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{x}{4}\right)^n$ converge

donc on montrerait par négligeabilité que $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n$ converge.

et donc $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n$ converge.

et $\forall n\geq 1$, $\sqrt{n\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \geq 0$.

donc par critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge

14) $\forall (x,y) \in [0;4[$ tel que $x \geq y$,

$\forall n\geq 1$, $x^n \geq y^n$ par croissance de $t \mapsto t^n$ $(n>0)$

$\Rightarrow \dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}} \geq \dfrac{y^n}{\binom{2n}{n}}$

$\Rightarrow f(x) \geq f(y)$ car $f(x)$ et $f(y)$ existent. (question (13b))

Donc f est croissante sur $[0;4[$

15) b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\pi}\, \frac{x}{4-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4} \times \frac{1}{\left(\frac{(1-x)}{4}\right)^2} + \frac{x}{4-x} \right) = 0$

donc par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (en admettant la (15a))