Copie anonyme - n°anonymat : 745065

T1-00162
745065
Mat Appro

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

PROBLÈME 1

Partie 1

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ donc $t \mapsto t^n$ est C^0 sur $\mathbb{R}$. $t \mapsto 1-t^2$ étant polynomiale donc C^0 sur $[0;1]$ et $[-1;1]$, par composée, $t \mapsto (1-t^2)^n$ est C^0 sur $[0;1]$ et $[-1;1]$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont bien définies

et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\forall t \in [-1,1]$, $-t \in [-1,1]$ et en notant $g : t \mapsto (1-t^2)^n$,

$g(-t) = (1-(-t)^2)^n = (1-t^2)^n = g(t)$.

donc g est paire sur $[-1,1]$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, avec l'existence de I_n et J_n, $J_n = 2I_n$

2) I_0 existe d'après la question (1).

et $I_0 = \int_0^1 1\,dt = [t]_0^1 = 1-0 = 1$

Donc $I_0 = 1$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;1]$,

$1 \geq 1-t^2 \geq 0$ donc $n+1 \geq n \Rightarrow (1-t^2)^n \geq (1-t^2)^{n+1}$

I_n et I_{n+1} existent d'après la question (1), et $1 > 0$ donc les bornes sont dans le bon sens,

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc par croissance de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$.

$\boxed{\text{Donc } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, I_n et I_{n-1} existent ($n \geq 1 \Rightarrow n-1 \geq 0$)
et $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto (1-t^2)^n$ sont C^1 sur $[0;1]$ donc par intégration par parties,

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \left[t(1-t^2)^n\right]_0^1 - \int_0^1 t(-2t)n(1-t^2)^{n-1} dt$$

$$= 2n \int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1} dt$$

$$= 2n \int_0^1 (1-(1-t^2))(1-t^2)^{n-1} dt$$

$$= 2n \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} - (1-t^2)^n dt$$

$= 2n(I_{n-1} - I_n)$ par linéarité des intégrales convergentes

donc $I_n = 2nI_{n-1} - 2nI_n \Rightarrow (2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$

$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ $\quad (n \geq 1 \Rightarrow 2n+1 \geq 3 > 0)$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}}$

5) Démontrons par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ ".

Initialisation : pour $n=0$

d'après la question (2), $I_0 = 1$.

et $\frac{(2^0 0!)^2}{(0+1)!} = 1$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie, et montrons alors que P_{n+1} est vraie

i.e : $I_{n+1} = \dfrac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}$

d'après la question (4), comme $n+1 \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{2n+2}{2n+2}$$

(par hypothèse de récurrence)

$$I_n = \frac{2^2((n+1)!)^2}{(2n+2)(2n+3)} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

$$\boxed{\text{Donc, par principe de récurrence, } \forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$$

6)
```
def I(n):
    i = 1
    for k in range(1, n+1):
        i = 2*k*i / (2*k+1)
    return i
```

7)

PARTIE 2

8) notons déjà $\langle \cdot,\cdot \rangle$ cette application,

8) · $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[x])^2$,

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

$t \mapsto P(t)$ et $t \mapsto Q(t)$ sont polynomiales donc $t \mapsto P(t)Q(t)$ est C^0 sur $[-1;1]$.

donc $\langle P,Q\rangle$ existe et donc est un réel.

· $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[x])^2$,

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\,dt = \langle Q,P\rangle$$

donc $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est symétrique.

· $\forall (P,Q,R) \in (\mathbb{R}[x])^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle P+\lambda Q, R\rangle = \int_{-1}^{1} (P+\lambda Q)(t)R(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} P(t)R(t) + \lambda Q(t)R(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} P(t)R(t)\,dt + \lambda\int_{-1}^{1} Q(t)R(t)\,dt$$

(par linéarité des intégrales convergentes)

$$= \langle P,R\rangle + \lambda\langle Q,R\rangle.$$

donc $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est bilinéaire par rapport à la première variable, et avec la symétrie aussi par rapport à la deuxième.

· $\forall P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,P\rangle = \int_{-1}^{1} (P(t))^2\,dt.$$

$\forall t \in [-1;1]$, $(P(t))^2 \geqslant 0$. et $t \mapsto (P(t))^2$ est C^0 sur $[-1;1]$ car $t \mapsto P(t)$ est polynomiale et $2 \geqslant 0$. et $1 > -1$.

donc par croissance de l'intégrale,

$\langle P,P\rangle \geqslant 0$.

et $\langle P,P\rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} (P(t))^2\,dt = 0$.

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$t \mapsto (P(t))^2$ est C^0 et positive sur $[-1;1]$ et $1 > -1$,
donc par théorème de l'intégrale nulle,
$\forall t \in [-1;1]$, $(P(t))^2 = 0 \Rightarrow P(t) = 0$.
donc $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

Donc $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est bien un produit scalaire

9) $\langle e_0, e_2 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \neq 0$.

Donc non, les polynômes de B_n ne sont pas deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire

10) $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(u(P+\lambda Q))(x) &= \left((1-x^2)(P+\lambda Q)'(x)\right)' \\ &= \left((1-x^2)P'(x) + \lambda(1-x^2)Q'(x)\right)' \quad \text{par linéarité de la dérivée} \\ &= \left((1-x^2)P'(x)\right)' + \lambda\left((1-x^2)Q'(x)\right) \quad \text{encore par linéarité de la dérivée} \\ &= u(P)(x) + \lambda u(Q)(x).\end{aligned}$$

et ce $\forall x \in \mathbb{R}$.
donc $u(P+\lambda Q) = u(P) + \lambda u(Q)$.
donc u est linéaire.

et $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P'(x)) \leq n-1$ et $\deg(1-x^2) = 2$
donc $\deg((1-x^2)P'(x)) \leq n+1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\deg\left(\left((1-x^2)P'(x)\right)'\right) \leq n$. donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.

Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$

11) a) e_0 est la fonction polynomiale qui à $x \in \mathbb{R}$ associe 1.

donc $e_0' = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

donc $x \mapsto (1-x^2)e_0'(x) = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

donc $u(e_0) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e_1'(x) = 1$.

donc $(1-x^2)e_1'(x) = 1-x^2$

donc $u(e_1) = -2x = -2e_1$.

Donc $u(e_1) = -2e_1$

11) b) $e_k : x \mapsto x^k$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ e_k'(x) = kx^{k-1}$

donc $(1-x^2)e_k'(x) = (1-x^2)kx^{k-1}$

$= kx^{k-1} - kx^{k+1}$

donc $u(e_k) = k(k-1)x^{k-2} - k(k+1)x^k$

$= k(k-1)e_{k-2} - k(k+1)e_k$

Donc $u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}$

11) c) $e_0 \neq 0$ et $u(e_0) = 0 \cdot e_0 = 0$. d'après la question (11a)

donc $0 \in Sp(u)$

$e_1 \neq 0$ et $u(e_1) = -2e_1$

donc $-2 \in Sp(u)$

et avec la question (11b), $Sp(\mathcal{U}) = \{-k(k+1) ; k \in \mathbb{N}\}$.

donc $\mathrm{card}(Sp(\mathcal{U})) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$.
donc chacun des sous espaces propres de $\mathcal{U}$ est de dimension 1.

Donc $Sp(\mathcal{U}) = \{-k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$ et chaque sous espace propre de $\mathcal{U}$ est de dimension 1.

13) a) notons $p_{\mathbb{R}_n[x]}$ le projeté orthogonal sur $\mathbb{R}_n[x]$.

alors par théorème de minimisation de la norme,
$\min_{g \in \mathbb{R}_n[X]} \|f-g\| = \|f - p_{\mathbb{R}_n[x]}(f)\|$. et $p_{\mathbb{R}_n[x]}(f)$ est unique

donc en notant $T_n = p_{\mathbb{R}_n[x]}(f)$, $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\mathrm{Im}(p_{\mathbb{R}_n[x]}) = \mathbb{R}_n[x]$

donc il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\|f - T_n\| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[x]} \|f-g\|$$

T_n appartient donc à $\mathbb{R}_n[x]$, donc en admettant la question (12), $(L_0, \dots, L_n)$ étant une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$,
donc en posant $\forall k \in [0;n]$, $c_k = \langle T_n, L_k \rangle = \langle f(L_k), L_k \rangle$
$\exists (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $T_n = \sum_{i=0}^{n} c_k L_k$

14) a) Démontrons par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k)$: " Q_k est de degré k et son coefficient de plus haut degré vaut $\frac{(2k)!}{k!}$ "

Initialisation : pour $n=0$

$Q_0 = P_0 = x \mapsto 1$
donc Q_0 est de degré 0 et son coefficient de plus haut degré vaut $\frac{(2\times 0)!}{0!} = 1$.

Donc $P(0)$ est vraie

Hérédité :

Supposons qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ soit vraie et montrons alors que $P(k+1)$ est vraie.

par hypothèse de récurrence, Q_k est de degré k.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{k+1}(x) = (x^2-1)P_k(x)$.

donc P_{k+1} est de degré $2k+2$.

et $Q_{k+1} = P_{k+1}^{(k+1)}$ donc $\deg(Q_{k+1}) = \deg(P_{k+1}) - (k+1) = k+1$.

donc Q_{k+1} est bien de degré $k+1$.

par hypothèse de récurrence, Q_k est de coefficient dominant $\frac{(2k)!}{k!}$.

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q_{k+1}(x)$ $P_{k+1}^{(k+1)}(x) = \left((x^2-1)P_k\right)^{(k+1)}$

donc Q_{k+1} est de même coefficient dominant que celui de $x \mapsto \left((x^2-1)P_k\right)^{(k+1)}$

de coefficient dominant celui de $\left(\left((x^2-1)P_k\right)^{(k)}\right)'$

donc celui de $2(2k+1)Q_k$

qui est donc $2(2k+1)\frac{(2k)!}{k!} \times \frac{k+1}{k+1} = \frac{(2k)!}{k!}\frac{2k+1}{k+1}(2k+2)$

$= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!}$ donc $P(k+1)$ est vraie.

Donc, par principe de récurrence,

$\forall k \in \mathbb{N}$, Q_k est de degré k et de coefficient de plus haut degré $\frac{(2k)!}{k!}$

(4)b) $Q_0 = P_0 = x \mapsto 1$

$Q_1 = P_1' = x \mapsto 2x$

$Q_2 = P_2'' = \left((x^2-1)^2\right)'' = \left(4x(x^2-1)\right)' = x \mapsto 12x^2-4$

donc $Q_0 : x \mapsto 1$; $Q_1 : x \mapsto 2x$ et $Q_2 : x \mapsto 12x^2-4$

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

14)c)ii) en admettant la première partie de la question,

$$\mathcal{U}(Q_k) : x \mapsto \left((1-x^2)Q_k'(x)\right)'$$

donc $\mathcal{U}(Q_k) : x \mapsto (1-x^2)Q_k''(x) - 2xQ_k'(x)$.

or d'après la première partie de la question,

$\forall x \in \mathbb{R},\ -k(k+1)Q_k(x) = (1-x^2)Q_k''(x) - 2xQ_k'(x)$.

donc $\mathcal{U}(Q_k) = -k(k+1)Q_k$.

et $Q_k \neq 0$ car son coefficient dominant est $\frac{(2k)!}{k!} \neq 0$

Donc Q_k est le vecteur propre de $\mathcal{U}$ associé à la valeur propre $-k(k+1)$

14)c)iii) $\forall k \in [\![0;n]\!]$, Q_k est donc un vecteur propre de $\mathcal{U}$ associé à la valeur propre $-k(k+1)$.

or d'après la question (11c), le sous espace propre de $\mathcal{U}$ associé à la valeur $-k(k+1)$ est de dimension 1, L_k y appartient et est non nul, donc L_k en est une base.

donc comme Q_k appartient à ce sous espace propre, $Q_k \in \mathrm{Vect}(L_k)$.

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q_k = \lambda L_k$

$Q_k \neq 0$ donc $\lambda \neq 0$.

donc en divisant par λ, $L_k = \frac{1}{\lambda} Q_k$

· or d'après la question (12) que j'admet, L_k est de coefficient du terme de plus haut degré 1, et d'après la question (14a), Q_k est de coefficient du terme de plus haut degré $\frac{(2k)!}{k!}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $Q_k = \frac{(2k)!}{k!} L_k \Rightarrow L_k = \frac{k!}{(2k)!} Q_k$ $\quad ((2k)! \neq 0)$

$\boxed{\text{Donc } \forall k \in [\![0;n]\!],\ L_k = \frac{k!}{(2k)!} Q_k}$

14) d) Démontrons par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, P_k : " $\forall (f,g) \in (\mathbb{R}[x])^2$,
$\int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)\, g(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t) g^{(j)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t) g^{(k)}(t)\, dt$ ".

Initialisation : pour $k=0$
$\forall (f,g) \in (\mathbb{R}[x])^2$, $\int_{-1}^{1} g(t) f^{(0)}(t)\, dt = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt$.

et de l'autre côté on a $(-1)^0 \int_{0}^{1} f(t) g^{(k)}(t)\, dt = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k soit vraie, et démontrons alors que P_{k+1} est vraie.

$\forall (f,g) \in (\mathbb{R}[x])^2$, f et g sont polynomiale donc
$f^{(k+1)}$ et $g^{(1)}$ sont C^1 sur $[-1;1]$.
donc par intégration par parties,

$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t) g(t)\, dt = \left[f^{(k+1)}(t) g^{(1)}(t) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(k)}(t) g^{(1)}(t)\, dt$.

or par hypothèse de récurrence, comme f et $g^{(1)}$ sont dans $\mathbb{R}[x]$,

$\int_{-1}^{1} f^{(k)}(t) g^{(1)}(t)\, dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t) g^{(j+1)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t) g^{(k+1)}(t)\, dt$

$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left[f^{(k-j)}(t) g^{(j)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t) g^{(k+1)}(t)\, dt$

donc $\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t) g(t)\, dt = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left[f^{(k+1-1-j)}(t) g^{(j)}(t) \right]_{-1}^{1} - (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t) g^{(k+1)}(t)\, dt$

$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left[f^{(k+1-1-j)}(t) g^{(j)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} f(t) g^{(k+1)}(t)\, dt$

Donc P_{k+1} est vraie.

Donc, par principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall (f,g) \in (\mathbb{R}[x])^2$,
$$\int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)g(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t)g^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t)g^{(k+1)}(t)dt$$

(4)e)i) En dérivant 2k fois P_k, qui est de degré 2k,
il ne va rester que le coefficient dominant de P_k, dérivé 2k fois
le coefficient est la dérivée (2k) ième de x^{2k}, c'est-à-dire $(2k)!$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_k^{(2k)}(x) = (2k)!$

PROBLÈME 2

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^2 \geq 1 \Rightarrow \pi(1+x^2) \geq \pi > 0$.
donc f est positive sur $\mathbb{R}$, et C^0 sur $\mathbb{R}$ par quotient.

soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A > B$,

$$\int_B^A f(t)dt = \int_B^A \frac{1}{\pi(1+x^2)} dt = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_B^A$$

$$= \frac{1}{\pi}(\arctan(A) - \arctan(B)).$$

or $\arctan(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$. et $\arctan(B) \xrightarrow[B \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2}$.

donc en faisant tendre A vers $+\infty$ et B vers $-\infty$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Donc f peut être considéré comme une densité de probabilité

2) $tf(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\frac{1}{t}$. $\forall t \geq 1$, $\frac{1}{\pi t} \geq 0$.

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge comme intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1 \ngtr 1$).
donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t} dt$ diverge $\left(\frac{1}{\pi} \neq 0\right)$
Donc par critère d'équivalence, $\int_1^{+\infty} tf(t)dt$ diverge.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ diverge. donc X n'admet pas d'espérance

De même manière,

$t^2 f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}$. $\forall t \geq 1$, $\frac{1}{\pi} \geq 0$.

et $\int_1^{+\infty} 1\, dt$ diverge grossièrement donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi} dt$ aussi ($\frac{1}{\pi} \neq 0$).

donc par critère d'équivalence, $\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$ diverge.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$ diverge.

donc X n'admet pas de moment d'ordre 2 donc pas de variance.

Donc X n'admet pas de variance ni d'espérance

3) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.

soit $B < x$, $\int_B^x f(t)\, dt = \int_B^x \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_B^x$

$= \frac{1}{\pi}(\arctan(x) - \arctan(B)) \xrightarrow[B \to -\infty]{} \frac{1}{\pi}(\arctan(x) + \frac{\pi}{2})$

$= \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$

f est la dérivée de F. or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1+x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \pi(1+x^2) \geq \pi > 0$

donc $\frac{1}{\pi(1+x^2)} = f(x) > 0$. donc F est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

et f est C^0 sur $\mathbb{R}$, donc F est C^1, donc C^0, sur $\mathbb{R}$.

Donc F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{x \to -\infty} F(x) ; \lim_{x \to +\infty} F(x)[$

$=]0;1[$ (car F est une fonction de répartition)

Donc F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$

$\forall y \in]0;1[$, cherchons l'unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = y$.

$F(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2} = y \Leftrightarrow \frac{1}{\pi}\arctan(x) = y - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \arctan(x) = \pi(y - \frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow x = \tan(\pi(y - \frac{1}{2}))$ (tan est C^0 sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ où est $\pi(y-\frac{1}{2})$)

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $\forall y \in]0;1[$, $f^{-1}(y) = \tan(\pi(y-\frac{1}{2}))$

4)a) f^{-1} est à valeur dans $\mathbb{R}$.
donc $\forall x \in \mathbb{R}$, en notant F_Y la fonction de répartition de Y,

$$F_Y(x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x) \quad \text{car } F(x) \in]0;1[.$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = F(x)$. Y a donc même fonction de répartition que X.

Donc $Y = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X

4)b)
```
def cauchy():
    U = rd.random()
    return np.tan(np.pi(U-1/2))
```

5) $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et $Z = \sqrt{|X|}$ donc $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, en notant F_Z la fonction de répartition de Z,
$F_Z(x) = P(\sqrt{|X|} \leq x) = P(|X| \leq x^2)$ car $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$= P(-x^2 \leq X \leq x^2) = P(-x^2 < X \leq x^2)$ car X est à densité

$= F(x^2) - F(-x^2)$.

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -x^2$ sont polynomiales donc C^1 sur $\mathbb{R}$. Et F est C^1 sur $\mathbb{R}$. donc par différence et composée,
F_Z est C^1 sur $\mathbb{R}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc par dérivation, une densité de Z est f_Z où,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_Z(t) = 2tf(t^2) + 2tf(-t^2)$$

$$= 2t\left(\frac{1}{\pi(1+t^4)} + \frac{1}{\pi(1+(-t^2)^2)}\right)$$

$$= 2t\left(\frac{2}{\pi(1+t^4)}\right)$$

$$= \frac{4t}{\pi(1+t^4)}$$

donc Z est à densité et une de ses densités est f_Z où $\forall t \in \mathbb{R},\ f_Z(t) = \frac{4t}{\pi(1+t^4)}$

b) $tf_Z(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi}\frac{1}{t^2}$. $\forall t \geq 1$, $\frac{4}{\pi}\frac{1}{t^2} \geq 0$.

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2 > 1$).
donc $\int_1^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{1}{t^2}\,dt$ aussi

Donc par équivalence, $\int_1^{+\infty} tf_Z(t)\,dt$ converge.

$tf_Z(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{4}{\pi}t^2 \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$. Donc $\int_0^1 tf_Z(t)\,dt$ est faussement

impropre en 0 donc converge.
en notant $g : t \mapsto tf_Z(t)$
$\forall t \in \mathbb{R}, -t \in \mathbb{R}$ et $g(-t) = \frac{4}{\pi}\frac{(-t)^2}{(1+(-t)^4)} = g(t)$
donc g est paire sur $\mathbb{R}$

Par Chasles, $\int_0^{+\infty} tf_Z(t)\,dt$ converge, et avec la parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_Z(t)\,dt$ converge

Donc Z admet une espérance

$t^2 f_2(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi}\frac{1}{t}$. $\forall t \geq 1$, $\frac{4}{\pi}\frac{1}{t} \geq 0$.

et par Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge donc $\int_1^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{1}{t} dt$ aussi $\left(\frac{4}{\pi} \neq 0\right)$.

Donc par équivalence, $\int_1^{+\infty} t^2 f_2(t)\, dt$ diverge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_2(t) dt$ diverge.

Donc Z n'admet pas de moment d'ordre 2 donc pas de variance

7)a) posons $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

alors $\forall x \geq 0$,

$$\frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} x (x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}$$

$$= \frac{0 \times x^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + 0 \times 1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{x^2}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}$$

Donc $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ conviennent

7)b) les intégrandes de ces intégrales tendent vers 1 quand x tend vers 0^+

donc elles sont faussement impropres en 0.

donc $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ convergent.

$\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. $\forall x \geq 1$, $\frac{1}{x^2} \geq 0$.

et par Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge. Donc par critère d'équivalence,

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$ converge. donc par Chasles, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ converge.

de même manière, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ converge

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ convergent

Le changement de variable $x = u - \frac{1}{\sqrt{2}}$ est affine donc licite, ne changeant ni la nature, ni la valeur (en cas de convergence) de l'intégrale.

① $x = u - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ② $dx = du$ ③ $\begin{cases} (x \to +\infty) \iff (u \to +\infty) \\ (x = 0) \iff (u = \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{cases}$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{du}{u^2-\sqrt{2}u+\frac{1}{2}+\sqrt{2}u-1+1}$

$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{du}{u^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{du}{(\frac{u}{\sqrt{2}})^2+1}$

soit $A > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\int_0^A \frac{du}{(\frac{u}{\sqrt{2}})^2+1} = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^A$

$= \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

8) le script python présenté approche la valeur de $E(Z)$, avec différents degrés de précision, le coefficient en bas à droite étant le plus précis.

On peut conjecturer que met beaucoup de temps à atteindre les valeurs proche de $\sqrt{2}$, qui est son espérance (j'admet la question (7a)).

Le résultat nous fait penser à la méthode de Monte-Carlo, mais nous ne pouvons pas l'appliquer car nous avons montré à la question (6), que Z n'admet pas de variance

PARTIE 2 :

9) la loi de $\mathbb{1}_A$ est la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
donc $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ et $V(\mathbb{1}_A) = P(A)(1-P(A))$

10) a) si $\omega \leq s$, alors $\mathbb{1}_{(X>s)}(\omega) = 0$
et $\chi_{]s;+\infty[}(X(\omega)) = 0$ car la probabilité que $X(\omega)$ soit inférieure à s sachant qu'elle est strictement supérieur à s est nulle.
donc $\mathbb{1}_{(X>s)}(\omega) = \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega))$.
et si $\omega > s$, $\mathbb{1}_{(X>s)}(\omega) = 1$.
et $\chi_{]s;+\infty[}(X(\omega)) = 1$. donc $\mathbb{1}_{(X>s)}(\omega) = \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega))$
Donc, dans tous les cas, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{(X>s)}(\omega) = \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega))$

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11) si $X_k \leq n$ alors $Y_k = X_k$ et $Z_k = 0$ donc $X_k = Y_k + Z_k$
si $X_k > n$ alors $Y_k = 0$ et $Z_k = X_k$. donc $X_k = Y_k + Z_k$

Donc on a la relation $X_k = Y_k + Z_k$

13) b) en admettant la question (13a),
$\lim_{n \to +\infty} E(|Z_k|) = 0$

or $-E(|Z_k|) \leq E(Z_k) \leq E(|Z_k|)$.
et $\lim_{n \to +\infty} E(|Z_k|) = \lim_{n \to +\infty} -E(|Z_k|) = 0$

Donc par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} E(Z_k) = 0$

13) c) X_k a une espérance qui est égale à 0 car elle suit la même loi que X.
et $\lim_{n \to +\infty} E(Z_k) = 0$ (question (13b)).

or $X_k = Y_k + Z_k$ donc par linéarité,

$E(X_k) = E(Y_k + Z_k) = E(Y_k) + E(Z_k) \Rightarrow E(Y_k) = -E(Z_k) + E(X_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} E(Y_k) = E(X_k) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

14) si $(|x| \leq \frac{t}{2}) \cap (|y| \leq \frac{t}{2})$ est réalisé

alors par inégalité triangulaire,

$|x+y| \leq |x| + |y| \leq \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t$. donc $|x+y| \leq t$ est réalisé

Donc en prenant le complémentaire,
$|x+y| > t \Rightarrow (|x| > \frac{t}{2})$ ou $(|y| > \frac{t}{2})$

17) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$E(\bar{Y}_n^2) = E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} E(Y_iY_j) + \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{k=1}^{n} E(Y_k^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_iY_j)\right)$$ par linéarité de l'espérance

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(\bar{Y}_n^2) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(Y_k^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_iY_j)\right)$.

17) b) donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 E(\bar{Y}_n^2) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_iY_j)$

$\Rightarrow n^2 E(\bar{Y}_n^2) - \sum_{k=1}^{n} E(Y_k^2) = 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_iY_j)$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

/