Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 12	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

T1-00162 745065 Mat Appro

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

PARTIE I :

1) supposons qu'il existe $b \in E$ tel que $\forall x \in E, l(x) = \langle b, x \rangle$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} l(x) = \langle a_0, x \rangle \\ l(x) = \langle b, x \rangle \end{cases}$

$\Rightarrow \langle a_0, x \rangle = \langle b, x \rangle$

$\Rightarrow \langle a_0, x \rangle - \langle b, x \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle a_0 - b, x \rangle = 0$

et ce $\forall x \in \mathbb{R}$

donc $a_0 - b = 0$

$\Rightarrow a_0 = b$

donc si ce a_0 existe, il est unique

or l est valeur dans $\mathbb{R}$

donc soit $y \in E$,

$l(y) = a$ où $a \in \mathbb{R}$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est aussi à valeur dans $\mathbb{R}$

donc $\exists a_0 \in E$ tel que $\langle a_0, y \rangle = a = l(y)$

$\forall x \in E, l(x) \in \mathbb{R}$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $l(x) = \lambda l(y)$

(car l est linéaire)

$= \lambda \langle a_0, y \rangle = \langle a_0, \lambda y \rangle = \langle a_0, x \rangle$

donc $\forall x \in E, l(x) = \langle a_0, x \rangle$

donc $\exists ! a_0 \in E$ tel que $\forall x \in E, l(x) = \langle a_0, x \rangle_E$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) $\forall y \in F$, ~~$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$~~,

$\forall (x,z) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\langle u(x+\lambda z), y\rangle_F = \langle u(x)+\lambda u(z), y\rangle_F$ car u est linéaire

$= \langle u(x), y\rangle_F + \lambda \langle u(z), y\rangle_F$ car $\langle .,. \rangle_F$ est bilinéaire

donc $x \mapsto \langle u(x), y\rangle_F$ est linéaire

donc d'après la question (1),

$\exists ! z_y \in E$ tel que $\forall x \in E$, $\langle u(x), y\rangle_F = \langle z_y, x\rangle_E$

$\boxed{\text{Donc } \forall y \in F, \text{ il existe un seul } z_y \in E \text{ tel que } \forall x \in E,\ \langle u(x), y\rangle_F = \langle z_y, x\rangle_E}$

3) $\forall (y_1, y_2) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

d'après la question (2), $\exists ! (z_{y_1}, z_{y_2}) \in E^2$ tel que

$\forall x \in E, \begin{cases} \langle u(x), y_1\rangle_F = \langle z_{y_1}, x\rangle_E \\ \langle u(x), y_2\rangle_F = \langle z_{y_2}, x\rangle_E \end{cases}$

donc $\langle u(x), y_1\rangle_F + \lambda \langle u(x), y_2\rangle_F = \langle u(x), y_1+\lambda y_2\rangle_F$ par linéarité

or $\langle u(x), y_1\rangle_F + \lambda\langle u(x), y_2\rangle_F = \langle z_{y_1}, x\rangle_E + \lambda \langle z_{y_2}, x\rangle_E$

$= \langle z_{y_1} + \lambda z_{y_2}, x\rangle_E$ par linéarité

donc $\forall x \in E$, $\langle u(x), y_1+\lambda y_2\rangle_F = \langle z_{y_1} + \lambda z_{y_2}, x\rangle_E$

or d'après la question (2), y_1 et y_2 sont dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$ donc $y_1 + \lambda y_2 \in F$

donc $\exists !\ z_{y_1+\lambda y_2} \in E$ tel que

$\forall x \in E$, $\langle u(x), y_1+\lambda y_2\rangle_F = \langle z_{y_1+\lambda y_2}, x\rangle_E$

donc $\forall x \in E$, $\langle z_{y_1} + \lambda z_{y_2}, x\rangle_E = \langle z_{y_1+\lambda y_2}, x\rangle_E$

$\Leftrightarrow \langle z_{y_1+\lambda y_2} - (z_{y_1} + \lambda z_{y_2}), x\rangle_E = 0$

$\Leftrightarrow z_{y_1+\lambda y_2} = z_{y_1} + \lambda z_{y_2}$

donc $\forall (y_1, y_2) \in F^2, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$u^*(y_1 + \lambda y_2) = u^*(y_1) + \lambda u^*(y_2)$$

Donc u^* est linéaire

4) Les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases orthonormales de E et F,

donc par théorème, $MAT_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u) = (\langle u(e_j), f_i \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$

$$= (\langle e_j, u^*(f_i) \rangle)_{1 \leq i,j \leq n} = A$$

or de même manière, $MAT_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*) = (\langle u^*(f_j), e_i \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$

$$= {}^t(\langle e_j, u^*(f_i) \rangle)_{1 \leq i,j \leq n} = {}^tA$$

Donc $MAT_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*) = {}^tA$

une matrice et sa transposée on le même rang,

or ${}^t(MAT_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u)) = {}^tA = MAT_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*)$

donc $rg(u^*) = rg(MAT_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*)) = rg(MAT_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u)) = rg(u)$

Donc $rg(u^*) = rg(u)$

on a montré que $MAT_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^*) = {}^tA$

donc $MAT_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}((u^*)^*) = {}^t({}^tA) = A = MAT_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u)$.

et les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$ étant orthonormales, on a donc bien que $(u^*)^* = u$

5) $\forall x \in Im(u^*)$, $\exists z \in E$ tel que $u^*(z) = x$

$\forall y \in Ker(u)$, $\langle x, y \rangle = \langle u^*(z), y \rangle = \langle z, u(y) \rangle = 0$ car $u(y) = 0$

donc $x \in Ker(u)^\perp$

Donc $Im(u^*) \subset Ker(u)^\perp$

d'après la question précédente, $rg(u^*) = rg(u)$.

or $Ker(u)$ est un sous espace vectoriel de E
donc $Ker(u)^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $Ker(u)$

donc par théorème, $\dim(Ker(u)^\perp) + \dim(Ker(u)) = \dim(E)$
$\Rightarrow \dim(Ker(u)) = \dim(E) - \dim(Ker(u)^\perp)$.

par théorème du rang, $\dim(E) = rg(u) + \dim(Ker(u))$
$= rg(u^*) + \dim(Ker(u))$.
$= rg(u^*) + \dim(E) - \dim(Ker(u)^\perp)$

donc $rg(u^*) = \dim(Ker(u)^\perp)$.
et $Im(u^*) \subset Ker(u)^\perp$.

Donc $Im(u^*) = Ker(u)^\perp$

6) $\forall x \in Ker(u)$, $u(x) = 0$
donc $(u^* \circ u)(x) = u^*(u(x)) = u^*(0) = 0$
donc $x \in Ker(u^* \circ u)$.
donc $Ker(u) \subset Ker(u^* \circ u)$.

$\forall x \in Ker(u^* \circ u)$, alors $(u^* \circ u)(x) = 0$

$\forall y \in E$, $\langle u(y), u(x) \rangle = \langle y, (u^* \circ u)(x) \rangle = 0$ car $(u^* \circ u)(x) = 0$

et ce $\forall y \in E$. donc $u(x) = 0$. donc $x \in Ker(u)$.
donc $Ker(u^* \circ u) \subset Ker(u)$.

Donc, par double inclusion, $Ker(u^* \circ u) = Ker(u)$

par théorème du rang, $\begin{cases} \dim(E) = rg(u) + \dim(Ker(u)) \\ \dim(E) = rg(u^* \circ u) + \dim(Ker(u^* \circ u)) \end{cases}$

donc $rg(u) + \dim(Ker(u)) = rg(u^* \circ u) + \dim(Ker(u^* \circ u))$
$\Rightarrow rg(u) - rg(u^* \circ u) = \dim(Ker(u^* \circ u)) - \dim(Ker(u))$

or $\ker(u) = \ker(u^* \circ u)$ donc $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^* \circ u))$

$\Rightarrow \dim(\ker(u^* \circ u)) - \dim(\ker(u)) = 0$

donc $rg(u) - rg(u^* \circ u) = 0 \Rightarrow rg(u) = rg(u^* \circ u)$

Donc $rg(u) = rg(u^* \circ u)$ et $rg(u^*) = rg(u)$

donc $rg(u^*) = rg(u^* \circ u)$

et $\forall x \in Im(u^* \circ u)$,

$\exists z \in E$ tel que $(u^* \circ u)(z) = x$

$\Rightarrow u^*(u(z)) = x$

donc $x \in Im(u^*)$.

donc $Im(u^* \circ u) \subset Im(u^*)$

et $rg(u^* \circ u) = rg(u^*)$

$\boxed{\text{Donc } Im(u^* \circ u) = Im(u^*)}$

7) $\forall (x,y) \in Im(u^*)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$w(x+\lambda y) = u^* \circ u(x+\lambda y)$

$= u^*(u(x) + \lambda u(y))$ car u est linéaire

$= (u^* \circ u)(x) + \lambda (u^* \circ u)(y)$ car u^* est linéaire.

$= w(x) + \lambda w(y)$.

donc w est linéaire.

et soit $y \in \ker(w)$, alors $w(y) = (u^* \circ u)(y) = 0$

donc $y \in \ker(u^* \circ u)$

or $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$ (question (6))

donc $y \in \ker(u)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $y \in \mathrm{Im}(u^*)$ et $y \in \ker(u)$.

d'après la question (5), $\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$

donc $y \in \ker(u)$ et $y \in \ker(u)^\perp \Rightarrow y \in \ker(u) \cap \ker(u)^\perp$

or $\ker(u)^\perp$ est le supplémentaire de $\ker(u)$.

donc $\ker(u) \cap \ker(u)^\perp = \{0\}$.

donc $y = 0$

donc $\ker(w) = \{0\}$.

donc w est injective. Et comme nous sommes en dimension finie, w est bijectif,

et donc w étant linéaire et bijectif, c'est un isomorphisme.

Donc w est un isomorphisme

on en déduit donc que $\mathrm{MAT}_{B_E, B_F}(w)$ est inversible

8) a) ${}^tA$ est la matrice de u^* dans B_F.

et ${}^tAQ$ est la matrice de $u^* \circ \pi$ dans B_F

or π est le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(u)$, qui est l'espace de départ de u^*,

donc dans la base ~~orthogonale~~ orthonormale B_F de F,

la matrice de $u^* \circ \pi$ est simplement celle de u^*.

Donc ${}^tAQ = {}^tA$

8) b) π est le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(u)$

π étant un projecteur orthogonal, il est symétrique donc orthodiagonalisable,

et $\pi^2 = \pi$ donc $X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur de π donc

par théorème, $\mathrm{Sp}(\pi) \subset \{0;1\}$.

donc, Q est semblable à une matrice diagonale,

avec des 0 et des 1 sur cette diagonale
et π est le projecteur orthogonal de f sur $\mathrm{Im}(u)$
donc le nombre de 1 sur cette diagonale est égal au rang de u.
or la trace de Q est égale à la trace de cette matrice semblable qui a $rg(u)$ un et $(1-rg(u))$ zéro sur sa diagonale donc qui a une trace égale à $rg(u)$

Donc $Tr(Q) = rg(u)$

9) si $rg(A) = p$. alors A est inversible car $p = \dim(E)$.

donc $\Omega(A^{-1}\,{}^t(A^{-1})) = {}^tA(AA^{-1})\,{}^t(A^{-1})$ en notant A^{-1} l'inverse de A.

$$= {}^tA\,{}^t(A^{-1})$$
$$= {}^t(A^{-1}A)$$
$$= {}^tI$$
$$= I$$

donc Ω est inversible, avec $A^{-1}\,{}^t(A^{-1})$ son inverse.

si $rg(A) \neq p$. alors par théorème du rang,
$\dim(\ker(A)) \geq 1$.

donc $\exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\begin{cases} AX = 0 \\ X \neq 0 \end{cases}$

donc $\Omega X = {}^tAAX = {}^tA.0 = 0$
et $X \neq 0$.

donc $\dim(\ker(\Omega)) \geq 1$.
donc par théorème du rang, $rg(\Omega) < p$.
donc Ω n'est pas inversible

Donc, par exhaustivité, Ω est inversible si et seulement si $rg(A) = p$

10) a) avec la question (8a), ${}^tAQ = {}^tA$

or ${}^tA(A(\Omega)^{-1}\,{}^tA) = {}^tAA({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$

$$= {}^tAA\,A^{-1}({}^tA)^{-1}\,{}^tA$$
$$= {}^tA({}^tA)^{-1}\,{}^tA$$
$$= {}^tA$$

donc $(Q - A(\Omega)^{-1}\,{}^tA) \in \ker({}^tA)$

A est de rang p donc ${}^tA$ aussi (une matrice et sa transposée ont même rang).
donc par théorème du rang, $\dim(\ker({}^tA)) = 0 \Rightarrow \ker({}^tA) = \{0\}$.
donc $Q - A(\Omega)^{-1}\,{}^tA = 0$ Donc $Q = A(\Omega^{-1})\,{}^tA$

10) b)

```
def Calcule_Q(A):
    q = al.matrix_rank(A)
    if np.shape(A)[0] == q:
        Q = np.dot(A, np.dot(al.inv(np.dot(np.transposee(A), A)), np.transposee(A)))
        return Q
    else:
        return "erreur"
```

11) $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\quad {}^tX\Omega X = {}^tX{}^tAAX$

$= {}^t(AX)AX$

$= \|AX\|^2 \geqslant 0.$

Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX\Omega X \geqslant 0$

PARTIE II

13) soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

si $D(X) = 0$

alors $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, en admettant la question précédente,

$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}{}^tH\Omega H \geqslant 0$

d'après la question (11) car $H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

donc J_0 possède un minimum global en X.

si $X \neq 0$. alors $\exists Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $D(Y) = 0$

donc J_0 possède un minimum global en Y et donc pas en X.

donc J_0 ne possède pas de minimum global en X.

Donc, par exhaustivité, J_0 possède un minimum global en $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $D(X) = 0$

15) a) $X \in S_0$ donc $D(X) = 0$

$\Rightarrow \Omega X - {}^tAY = 0 \Rightarrow \Omega X = {}^tAY$

donc ${}^tAAX = {}^tAY \Rightarrow {}^tAAX = {}^tAQY$ (question (8a))

$\Rightarrow {}^tA(AX - QY) = 0$

$\Rightarrow (AX - QY) \in \ker({}^tA)$

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 12

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~or A est de rang p, donc ${}^tA$ sa transposée aussi ; (une matrice et sa transposée ont même rang).~~

~~donc $rg({}^tA) = p$ donc par théorème du rang, $\dim(\ker({}^tA)) = 0$.~~

~~donc $\ker({}^tA) = \{0\}$.~~

~~donc comme $(AX - QY) \in \ker({}^tA)$, $AX - QY = 0$~~
~~$\Rightarrow AX = QY$.~~

~~$\boxed{\text{Donc } AX = QY}$~~

~~j'admets que $X - X_0 \in \ker(A)$~~
~~alors si $X \neq X_0$,~~

~~$D(X_0) = 0$ donc d'après~~

15) c) A est de rang p donc d'après la question (8), M est inversible :

donc $X \in S_0 \iff D(X) = 0$
$\iff MX = AY$
$\iff M^{-1}MX = M^{-1}AY$
$\iff X = M^{-1}AY$

$\boxed{\text{donc } S_0 = \{M^{-1}AY\}}$

16) b)
```
def simuleT(A, sigma):
    y = rd.normal(0, sigma, np.shape(A))
    z = np.transposée(y)
    Q = calcule_Q(A)
    T = np.dot(y, np.dot(Q, z))
```

16) c)
```
def esperance(A, sigma):
    n = 1000
    u = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        u[i] = simuleT(A, sigma)
    return np.sum(u) / n
```

16) d) On peut conjecturer que l'espérance de T est égale au nombre de colonnes de A

On peut conjecturer, pour le deuxième graphique, que l'espérance de T est égale au nombre de colonne de A multiplié à σ^2, c'est-à-dire à la variance des $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent la loi $\mathcal{N}(0;\sigma^2)$

16) e) $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

donc $E(Z_1^2) = V(Z_1) + E(Z_1)^2 = \sigma^2$

$t \mapsto t^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est impaire sur $\mathbb{R}$, donc en cas de convergence,

$E(Z_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0.$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ converge car $\int_0^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ converge.

$t \mapsto t^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est C^0 sur $[0;1]$ donc $\int_0^1 t^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ converge.

et en effectuant le changement de variable $\frac{t^2}{2} = u$ qui est C^1 et strictement croissant sur $[1;+\infty[$,

on trouverait que $\int_1^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ en nous ramenant à une intégrale gamma convergente.

Donc $\int_0^1 t^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ et $\int_0^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ convergent.

donc par Chasles, $\int_0^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge.

Donc $E(2,3)$ existe et vaut 0.

sous réserve de convergence, $E(2,4) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ car l'intégrande est paire sur $\mathbb{R}$.

soit $A > 0$,

$v : t \mapsto t^3$ et $u : t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$ sont C^1 sur $[0;A]$ donc par intégration par parties,

$$\int_0^A t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[-t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A - \int_0^A -3t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 3\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$\left(\begin{array}{l} A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 \text{ par croissances comparées, et} \\ \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ existe car } E(2,2) \text{ existe} \end{array}\right)$

$$= \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

car l'intégrande est paire.

donc $E(2,4) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 3E(2,2) = 3\sigma^2$.

Donc $E(2,2) = \sigma^2$; $E(2,3) = 0$ et $E(2,4) = 3\sigma^2$

16) i) en admettant la question (16h).

les $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes donc les $(Z_i^2)_{i \in \mathbb{N}^*}$ aussi.

donc par lemme des coalitions, T_1 et T_2 sont indépendantes.

et donc T_1 et $2T_2$ le sont aussi

donc $V(T) = V(T_1 + 2T_2) = V(T_1) + V(2T_2)$

$= V(T_1) + 4V(T_2)$

23) d) i)
```
def FoncSom (alpha, Y, lda):
    u = np.zeros (np.shape (Y) [0] + 1)
    for i in range (np.shape (Y) [0] + 1):
        u[i] = alpha[i]**2 * Y[i]**2 / (lda + alpha[i]**)**2
    q = np.sum (u)
    return -1 + q
```


IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751