Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Première partie :

1) a) $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

donc X_i admet un moment d'ordre 2.

et $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2$

$= 1 + 0$

$= 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité, $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et $E(S_n) = n$

1) b)
```
def simul(n):
    X = rd.normal(0,1,n)
    Y = X ** 2
    return np.sum(Y)
```

1) c) /

2) a) $W_1 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} X_1^2$ où $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

$X_1(\Omega) = \mathbb{R}$ donc $W_1(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

notons F_{W_1} la fonction de répartition de W_1,

$\forall x \in \mathbb{R}$, si $x < 0$,

$F_{W_1}(x) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et si $x \geq 0$,

$$F_{W_1}(x) = P(W_1 \leq x)$$
$$= P\left(\frac{1}{2}X_1^2 \leq x\right)$$
$$= P(X_1^2 \leq 2x) \quad (2>0)$$
$$= P(|X_1| \leq \sqrt{2x}) \quad (2x \geq 0)$$
$$= P(-\sqrt{2x} \leq X_1 \leq \sqrt{2x})$$
$$= P(-\sqrt{2x} < X_1 \leq \sqrt{2x}) \quad \text{car } X_1 \text{ est à densité}$$
$$= \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x}) \quad (\Phi \text{ définie dans l'énoncé})$$
$$= \Phi(\sqrt{2x}) - \left(1 - \Phi(\sqrt{2x})\right) \quad (\text{par propriété de } \Phi)$$
$$= 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{W_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

F_{W_1} est C^1 (donc C^0) sur $\mathbb{R}_-^*$ car constante
F_{W_1} est C^1 (donc C^0) sur $\mathbb{R}_+^*$ par différence, produit et composée car Φ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
donc F_{W_1} est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

et $\lim_{x \to 0^+} F_{W_1}(x) = \lim_{x \to 0^+} 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 = 2\Phi(0) - 1$ par C^0 de Φ en 0

$$= \frac{1}{2}2 - 1 = 0 = F_{W_1}(0) = \lim_{x \to 0^-} F_{W_1}(x)$$

donc F_{W_1} est C^0 en 0 donc C^0 sur $\mathbb{R}$.
donc W_1 est à densité.
et par dérivation, une de ses densités est f où
$\forall t \in \mathbb{R}$,

si $t \geq 0$, $f(t) = \frac{4}{2\sqrt{2t}} \varphi(\sqrt{2t}) = \sqrt{\frac{2}{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}$

si $t < 0$, $f(t) = 0$

Donc W_1 est à densité et une de ses densités est f où $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

2)b) $\Gamma(\frac{1}{2})$ existe car $\frac{1}{2} > 0$.

et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$

$= \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$ par linéarité des intégrales convergentes

$= \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) dt$

$= \sqrt{\pi}$

Donc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

2) c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$W_n = \frac{1}{2} S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2} X_i^2$ où $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

or d'après la question (2a), comme les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivent tous la même loi et sont indépendants, les $(\frac{1}{2}X_i^2)_{i\in\mathbb{N}^*}$ aussi, et cette loi est celle de W_1

or avec la question (2a) et (2b), une densité de W_1 est f où $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} t^{1-\frac{1}{2}} e^{-t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

donc $W_1 \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$.

donc les $(\frac{1}{2}X_i^2)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants et suivent la loi $\gamma(\frac{1}{2})$.

donc comme $W_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} X_i^2$, par théorème de stabilité, $W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$

2) d) donc avec la question (2c), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(W_n) = \frac{n}{2}$.

donc par linéarité,

$E(S_n) = E(2W_n) = 2E(W_n) = n$.

et $W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$ donc $V(W_n) = \frac{n}{2}$.

donc $V(S_n) = V(2W_n) = 4V(W_n) = 2n$.

donc $E(S_n) = n$ et $V(S_n) = 2n$ (on retrouve bien $E(S_n) = n$)

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $W_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{W_n}\right)(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

sous réserve de convergence et par transfert,

$$E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_n(t)\,dt.$$ où f_n est une densité de W_n

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1-1} e^{-t}\,dt$$ par linéarité des intégrales convergentes

$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

et $n \geq 3 \Rightarrow \frac{n}{2} \geq \frac{3}{2} > 1$ donc $\frac{n}{2} - 1 > 0$

donc $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance qui vaut $\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Donc $\forall n \geq 3$, $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance et $E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

$$\frac{1}{S_n} = \frac{1}{2W_n} = \frac{1}{2}\frac{1}{W_n}$$

donc $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = E\left(\frac{1}{2}\frac{1}{W_n}\right) = \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{W_n}\right)$ par linéarité de l'espérance

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{n}{2}-1)}$$

$$= \frac{1}{n-2}$$

Donc $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-2}$

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

3)b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3,$ notons $f_{\frac{1}{n}}$ une densité de $\frac{1}{S_n}$. $S_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \left(\frac{1}{S_n}\right)(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

alors sous réserve de convergence et par transfert,

$E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, f_{\frac{1}{n}}(t)\, dt$

$f_{\frac{1}{n}}$ est une densité donc est C^0 sur $\mathbb{R}$. et $t \mapsto \sqrt{t}$ est C^0 sur $[0;1]$.

donc par produit, $t \mapsto \sqrt{t} f_{\frac{1}{n}}(t)$ est C^0 sur $[0;1]$.

donc $\int_0^1 \sqrt{t} f_{\frac{1}{n}}(t)\, dt$ converge.

$\forall t \geq 1, \quad \sqrt{t} \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{t}} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{t}} t f_{\frac{1}{n}}(t) \leq t f_{\frac{1}{n}}(t)$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{t} f_{\frac{1}{n}}(t) \leq t f_{\frac{1}{n}}(t)$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{\frac{1}{n}}(t)\, dt$ converge car $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance d'après la question précédente

donc $\int_1^{+\infty} t f_{\frac{1}{n}}(t)\, dt$ converge.

donc par comparaison, $\int_1^{+\infty} \sqrt{t} f_{\frac{1}{n}}(t)\, dt$ converge.

$\int_0^1 \sqrt{t} f_{\frac{1}{n}}(t)\, dt$ et $\int_1^{+\infty} \sqrt{t} f_{\frac{1}{n}}(t)\, dt$ convergent

donc par Chasles, $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} f_{\frac{1}{n}}(t)\, dt$ converge.

Donc $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une espérance.

donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$,
$\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une espérance

4) T_n a une densité strictement positive et C^0 sur $\mathbb{R}$.
donc en notant F_n la fonction de répartition de T_n,
F_n est strictement croissante et C^1 (donc C^0) sur $\mathbb{R}$.
donc F_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)\right[$
$=]0;1[$ (car F_n est une fonction de répartition).

$\alpha \in]0;1[\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} \in]\frac{1}{2}, 1[\subset]0;1[$.

donc $\exists! \, t_{n,\alpha} \in \mathbb{R}$ tel que $F_n(t_{n,\alpha}) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

or $P(|T_n| \leq t_{n,\alpha}) = P(-t_{n,\alpha} \leq T_n \leq t_{n,\alpha})$
$= P(-t_{n,\alpha} < T_n \leq t_{n,\alpha})$ car T_n est à densité
$= F_n(t_{n,\alpha}) - F_n(-t_{n,\alpha})$
$= 2F_n(t_{n,\alpha}) - 1$
$= 2(1-\frac{\alpha}{2}) - 1$
$= 2-\alpha-1$
$= 1-\alpha$.

donc $\exists! \, t_{n,\alpha} \in \mathbb{R}$ tel que $P(|T_n| \leq t_{n,\alpha}) = 1-\alpha$

5)a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$,
Y est indépendante des $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ donc par lemme des coalitions,
Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes.

donc par linéarité, $E(T_n) = E\left(\sqrt{n}\frac{Y}{\sqrt{S_n}}\right) = \sqrt{n}\,E(Y)\,E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ (Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admettent des espérances)

or $E(Y) = 0$ donc $E(T_n) = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $E(T_n)$ existe et vaut 0

5)b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, sous réserve d'existence de $V(T_n)$,

$$V(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2$$
$$= E(T_n^2) \quad \text{car d'après la question (5a), } E(T_n) = 0$$
$$= E\left(n \frac{Y^2}{S_n}\right).$$

encore par lemme des coalitions, Y^2 et $\frac{1}{S_n}$ sont indépendantes.

Y admet un moment d'ordre 2 donc Y^2 admet une espérance
et d'après la question (3a), $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance qui vaut $\frac{1}{n-2}$

donc $V(T_n)$ existe
et $V(T_n) = E\left(n \frac{Y^2}{S_n}\right) = n\, E(Y^2)\, E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ par indépendance et linéarité de l'espérance

$$= n \times 1 \times \frac{1}{n-2} = \frac{n}{n-2}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $V(T_n)$ existe et vaut $\frac{n}{n-2}$

5) c) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, sous réserve de d'existence,

$$E\left((T_n - Y)^2\right) = E\left(\left(\frac{\sqrt{n}\, Y}{\sqrt{S_n}} - Y\right)^2\right)$$
$$= E\left(Y^2 \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}} - 1\right)^2\right)$$

encore par lemme des coalitions, Y^2 et $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}} - 1\right)^2$ sont indépendantes

donc $E\left((T_n - Y)^2\right) = E(Y^2)\, E\left(\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}} - 1\right)^2\right)$

$$= E\left(\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}} - 1\right)^2\right) \quad \text{car } E(Y^2) = 1$$
$$= V\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}} - 1\right) + E\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}} - 1\right)^2$$
$$= V\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\right) + E\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\right)^2 - 2E\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\right) + 1$$
$$= n V\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) + n E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)^2 - 2\sqrt{n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) + 1$$
$$= n E\left(\frac{1}{S_n}\right) - 2\sqrt{n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) + 1$$

$$E\left((T_n-Y)^2\right) = nE\left(\frac{1}{\delta n}\right) - 2\sqrt{n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{\delta n}}\right)+1$$

$$= n\frac{1}{n-2} - 2\sqrt{n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2W_n}}\right)+1$$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - 2\sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{2}}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right).$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $E\left((T_n-Y)^2\right) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

6) a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$,

$W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ et sous réserve de convergence, par transfert,
question (3c)

$$u_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_n(t)\,dt$$ (où f_n est une densité de W_n)
($W_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$)

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} e^{-t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

donc u_n existe et vaut $\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}-1\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \leq 0$$ car $\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \geq 0$

donc $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 17 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et $u_2 = \dfrac{\Gamma\left(\frac{2-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \sqrt{\pi}$

donc $u_2 = \sqrt{\pi}$

6) b) $\forall n \geqslant 2$,

$$u_n u_{n+1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{n-1}{2}} = \frac{2}{n-1}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, u_n u_{n+1} = \dfrac{2}{n-1}$

6) c)

```
def suite_u(n):
    u = np.zeros(2,n+1)
    u[2] = np.sqrt(np.pi)
    for i in range(2, n):
        u[i+1] = 2/((n-1)*u[i])
    return u
```

$\left(u_{n+1}u_n = \dfrac{2}{n-1} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}\dfrac{2}{n-1} \right.$ car $\left. u_n > 0 \right)$

6) d) d'après le graphique donné, on peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 2

6) e) d'après la question (6b), $\forall n \geqslant 2$, $u_n u_{n+1} = \dfrac{2}{n-1}$

or $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\forall n \geq 3$, $u_{n-1} \geq u_n \geq u_{n+1}$

$\Rightarrow u_{n-1} u_n \geq u_n^2 \geq u_n u_{n+1}$

$\Rightarrow \frac{2}{n-2} \geq u_n^2 \geq \frac{2}{n-1}$

$\Rightarrow \frac{\frac{2}{n-2}}{\frac{2}{n}} \geq \frac{u_n^2}{\frac{2}{n}} \geq \frac{\frac{2}{n-1}}{\frac{2}{n}}$

$\Rightarrow \frac{n}{n-2} \geq \frac{u_n^2}{\frac{2}{n}} \geq \frac{n}{n-1}$

or $\frac{n}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\frac{n}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

donc par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2}{\frac{2}{n}} = 1$.

donc $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

et donc en composant par $t \mapsto t^{1/2} = \sqrt{t}$,

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$

7) $\forall n \geq 2$, $(T_n - Y)^2$ est à valeur positive et admet une espérance car T_n et Y admettent des moments d'ordre 2

donc par inégalité de Markov, $\forall \varepsilon > 0$,

$0 \leq P\left((T_n - Y)^2 \geq \varepsilon \right) \leq \frac{E((T_n - Y)^2)}{\varepsilon^2}$

or d'après la question ( ),

$E((T_n - Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, u_n$.

or $\frac{2n-2}{n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

et $\sqrt{2n}\, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n} \sqrt{\frac{2}{n}} = 2$ (d'après la question (6e)) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E((T_n - Y)^2) = 2-2 = 0$.

donc en revenant à l'inégalité de Markov énoncée,
par encadrement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{E((T_n-Y)^2)}{\varepsilon^2} = 0$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} P((T_n - Y)^2 \geq \varepsilon^2) = 0$

or $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
donc $P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) = P((T_n - Y)^2 \geq \varepsilon^2)$.

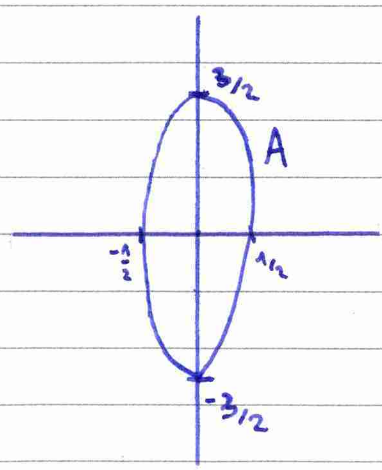
donc $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) = 0$.

Donc $(T_n)_{n\geq 2}$ converge en probabilité vers Y

Deuxième partie :

8) dans le cas où $a = 2$ et $b = -1$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 2$ et $x-y \leq -1\}$

soit $(x,y) \in A$,
$\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq 2 \\ 2x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$



9) a) $(x,y) \in A \Rightarrow x+y \leq a \Rightarrow x \leq a-y$

et si $x \leq a-y$, alors $x+y \leq a-y+y = a$

et $x-y \leq a-2y$ or $y \geq d \Rightarrow -2y \leq -2d$ $(-2<0)$
donc $x-y \leq a-2d = a-(a-b) = b$

donc si $x \leq a-y$, alors $\begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \end{cases}$ donc $(x,y) \in A$ $\left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$

donc par double implication, $(x,y) \in A \iff x \in]-\infty, a-y]$

9)b) d'après la question (9a),

$$\mathbb{1}_A(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq a-y \\ 0 \text{ si } x > a-y \end{cases}$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a-y} \varphi(x)\,dx = \Phi(a-y)$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \Phi(a-y)$

10) si $y \leq d$,
alors si $(x,y) \in A$ alors $x-y \leq b \Rightarrow x \leq b+y$

et si $x \leq b+y$
alors $x+y \leq b+2y \leq b+(a-b) = a$
et $x-y \leq b+y-y = b$
donc $\begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \end{cases}$ donc $(x,y) \in A$.

donc par double implication, $(x,y) \in A \iff x \leq b+y$.

donc $\mathbb{1}_A(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq b+y \\ 0 \text{ si } x > b+y \end{cases}$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b+y} \varphi(x)\,dx = \Phi(b+y)$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\,\varphi(x)\,dx = \Phi(b+y)$

11)a) $A = U \cap V$ où $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y \leq a\}$

et $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-y \leq b\}$

Or U et V sont deux partie fermées de $\mathbb{R}^2$.
donc A est l'intersection de 2 parties fermées de $\mathbb{R}^2$.

Donc A est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$

12) en admettant la question (11b),

$\forall z \in \mathbb{R}_+$, le changement de variable $x = u - z$ est affine donc licite, ne changeant ni la nature ni la valeur (en cas de convergence) de l'intégrale.

① $x = u - z$ ② $dx = du$ ③ $\begin{cases} (x \to -\infty) \Leftrightarrow (u \to -\infty) \\ (x = c - z) \Leftrightarrow (u = c) \end{cases}$

donc $\Phi(c-z) = \int_{-\infty}^{c-z} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} \varphi(u-z)\,du$

donc d'après la question (11d),

$$P((X,Y) \in A) = \int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z))\, \Phi(c-z)\,dz$$

$$= \int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z)) \left(\int_{-\infty}^{c} \varphi(t-z)\,dt\right) dz$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{c} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z))\, \varphi(t-z)\,dt \right) dz$$

par linéarité des intégrales convergentes.

Donc $P((X,Y) \in A) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{c} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z))\, \varphi(t-z)\,dt \right) dz$

13) $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$$

or $\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(u^2+2uv+v^2+u^2-2uv+v^2\right)$

$$= \frac{1}{}\left(2u^2+2v^2\right)$$

$$= u^2+v^2$$

donc $\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2}$$

$$= \varphi(u)\varphi(v).$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(u)\varphi(v) = \varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)}$$

~~$\forall t \in \mathbb{R}$, d'après la question (13),~~

15) en admettant la question (14),

$$P((X,Y)\in A) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\alpha}^{c}\left(\varphi\left(\frac{t+a}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t-a}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-a}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t+a}{\sqrt{2}}\right)\right) dt$$

$$= \int_{-\alpha}^{c} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi\left(\frac{t+a}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t-a}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-a}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t+a}{\sqrt{2}}\right)\right) dt$$

soit $B < c$,

$$\int_B^c \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)+\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\right)dt$$

$$=\left[\Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\right]_B^c$$

$$=\Phi\left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{B+d}{2}\right)\Phi\left(\frac{B-d}{\sqrt{2}}\right)$$

or $\frac{B+d}{\sqrt{2}} \xrightarrow[B\to-\infty]{} -\infty$ et $\frac{B-d}{\sqrt{2}} \xrightarrow[B\to-\infty]{} -\infty$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}>0\right)$

et Φ est une fonction de répartition (de $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$)

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=0$.

donc en faisant tendre B vers $-\infty$,

$$P((X,Y)\in A)=\Phi\left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right)$$

Troisième partie :

17) a) la base $(a_1,\dots,a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée donc par théorème,

$$x=\sum_{k=1}^n \langle x,a_k\rangle a_k$$

$$=\sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle a_k+\langle x,a_1\rangle a_1$$

or $\langle x,a_1\rangle a_1=\langle(x_1,\dots,x_n),\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\dots,1)\rangle\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\dots,1)$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n x_i\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\dots,1)$$

$$=\bar{x}(1,\dots,1)$$

donc $\sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle a_k = x-\langle x,a_1\rangle a_1$

$$=(x_1,\dots,x_n)-\bar{x}(1,\dots,1)$$

$$=(x_1-\bar{x},\dots,x_n-\bar{x}).$$

Donc $\sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle a_k=(x_1-\bar{x},\dots,x_n-\bar{x})$

17)b) la base $(a_1,\dots,a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée

donc $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]$, $\langle a_i,a_j\rangle = \begin{cases}1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j\end{cases}$

~~d'après la question précédente,~~

$$\cancel{\sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle a_k = (x_1-\bar{x},\dots,x_n-\bar{x})}$$

$$\cancel{\text{donc } \sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle a_k\right)^2}$$

$$\cancel{= \sum_{i=2}^n\left(\sum_{k=2}^n\sum_{\substack{j=2\\ j\neq k}}^n \langle x,a_k\rangle\langle x,a_j\rangle a_k a_j + \sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle a_k\right)}$$

$$\cancel{= \sum_{i=1}^n\sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle a_k}$$

$$\cancel{= \sum_{i=2}^n \sum_{\substack{k=2\\ k\neq i}}^n \langle x,a_k\rangle a_k + \sum_{k=2}^n\langle x,a_k\rangle}$$

d'après la question (17a), $\sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle a_k = (x_1-\bar{x},\dots,x_n-\bar{x})$

donc $\sum_{i=2}^n (x_i-\bar{x})^2 =$ $\cancel{\sum_{i=2}\sum_{k=2}\langle x,a_k\rangle}$

$$\sum_{i=2}^n \langle x,a_i\rangle \sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle\langle a_i,a_k\rangle$$

$$= \sum_{i=2}^n(\langle x,a_i\rangle)^2 \quad \text{car} \quad \sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle\langle a_i,a_k\rangle = \langle x,a_i\rangle$$

$$\boxed{\text{donc } \sum_{k=2}^n \langle x,a_k\rangle^2 = \sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$$

18)b) si $\text{cov}(R_1,R_2)\neq 0$ alors R_1 et R_2 ne sont pas indépendantes (d'après le cours).

donc par contraposée, si R_1 et R_2 sont indépendantes, alors $\text{cov}(R_1,R_2)=0$

et si $\text{cov}(R_1,R_2)=0$,

$$\text{cov}(R_1,R_2) = \text{cov}(X_1+X_2,\ \beta_1X_1+\beta_2X_2)$$
$$= \text{cov}(X_1,\ \beta_1X_1+\beta_2X_2) + \text{cov}(X_2,\ \beta_1X_1+\beta_2X_2)$$
$$= \beta_1V(X_1) + \beta_2\,\text{cov}(X_1,X_2) + \beta_2V(X_2) + \beta_1\,\text{cov}(X_1,X_2)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 745065

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 17	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

or X_1 et X_2 sont indépendantes donc $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$

donc $\operatorname{cov}(R_1, R_2) : \beta_1 V(X_1) + \beta_2 V(X_2) = 0$

or $(\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$.

si $\beta_1 \neq 0$ et $\beta_2 \neq 0$ alors $V(X_1) = V(X_2) = 0$
par indépendance de X_1 et X_2, $V(R_1) = V(X_1) + V(X_2) = 0$
et de même, $V(R_2) = 0$.
donc R_1 et R_2 sont indépendantes.

si $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 \neq 0$, alors $V(X_2) = 0$

19) a) par théorème, avec l'indépendance des $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$,

$\bar{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ $\qquad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = 1 \right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751