Copie anonyme - n°anonymat : 243017

N2-00017
243017
Mat Appro

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 23

Session : 2025

Épreuve de : Maths appro ESSEC / HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I

1) Soit f une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
$\dim(E) = p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in E$,

On sait que le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ est une forme bilinéaire, donc va de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

De plus, $\dim(E) = p > \dim(\mathbb{R}) = 1$

Donc toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ est surjective.

non abouti...

2) $\forall x \in E$, $f(x) = \langle a_0, x \rangle_E$.

u est une application linéaire de E dans F.

non abouti...

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3) On pose $u^*: \begin{cases} F \to E \\ y \to z_y \end{cases}$

Montrons que u^* est linéaire.
Soit y et y' appartenant à F et $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul.

$u^*(\lambda y + y') = z_{\lambda y + y'}$

On $\forall x \in E$, $\langle z_{\lambda y + y'}, x \rangle_E = \langle u(x), \lambda y + y' \rangle_F$

$= \lambda \langle u(x), y \rangle_F + \langle u(x), y' \rangle_F$

$= \lambda \langle z_y, x \rangle_E + \langle z_{y'}, x \rangle_E$

Ceci étant vrai pour tout x,

on a $\boxed{z_{\lambda y + y'} = \lambda z_y + z_{y'}}$

Ainsi, $\forall (y, y') \in E \times E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$,

$u^*(\lambda y + y') = \lambda u^*(y) + u^*(y')$

Donc u^* est linéaire

4) A est la matrice de u dans les bases orthonormales $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
$\forall x \in E$, $\forall y \in F$,
On a donc, en associant x au vecteur $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$
et y au vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle u(x), y \rangle_F = \langle AX, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} A_{i,j}\, x_j\, y_i$$ avec $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car $n \geq p$.

De même, en notant B la matrice de u^* dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$,
$$\langle x, u^*(y) \rangle_E = \langle X, BY \rangle = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} B_{l,k}\, y_k\, x_l$$
Les sommes sont finies donc
donc interchangeables par Fubini.
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} B_{l,k}\, y_k\, x_l$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} B_{j,i}\, y_i\, x_j$$ avec les indices $k=i$ et $l=j$

Or on sait que $\langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E$ d'après l'énoncé c'est identité (1)

Donc par identification, on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $\forall j \in [\![1, p]\!]$,

$B_{j,i} = A_{i,j}$. Donc $B = {}^tA$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*) = {}^tA}$

On sait que $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$ car le rang de A

Donc les matrices ${}^tA$ et A étant respectivement associées à u^* et u,
on a alors $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$.

De plus, l'application $(u^*)^*$ adjointe à u^* respecte aussi l'identité (1).
Donc en procédant de même, ${}^t({}^tA) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}((u^*)^*)$

Or ${}^t({}^tA) = A$.
u et $(u^*)^*$ sont alors associées à la même matrice A dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
Donc $\boxed{u = (u^*)^*}$.

5) Soit $x \in \mathrm{Im}(u^*)$. En notant X ~~sa matrice~~ associée il existe $z \in F$ tel que, avec Z sa matrice associée,

${}^tAZ = X$.

Soit $y \in \mathrm{Ker}(u)$, de matrice associée Y.

Alors $\langle {}^tAZ, Y \rangle$

$= \langle AY, Z \rangle$ d'après l'identité (1)

$= 0_{\mathbb{R}}$ car $AY = 0$ car $Y \in \mathrm{Ker}(A)$.

Ceci étant vrai pour tout vecteur y de $\mathrm{Ker}(u)$,

On a $X \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp}$.

~~De plus, soit $x \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$ associé à la matrice X.~~

~~Alors, $\forall y \in \mathrm{Ker}\, u$ associé à $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,~~

~~$\langle Y, X \rangle = 0$.~~

Par ailleurs, et $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)^\perp = E$ par définition

6) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$ associé à la matrice X.

Alors $AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.

Soit $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$ associé à la matrice X.

Alors ${}^tAAX = 0$.

$\Rightarrow {}^tX\,{}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)\,AX = 0 \Rightarrow \|AX\|^2 = 0$

$\Rightarrow AX = 0$ par définition de la norme.

Donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Ceci étant vrai pour tout x, on a par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u)}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 243017

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 23 | Session : 2025

Épreuve de : Maths appro ESSEC / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

suite 6) Ainsi, $\dim \ker(u^* \circ u) = \dim \ker(u)$.

On par le théorème du rang, ($u^* \circ u$ étant une application linéaire et u aussi)

$\dim \ker(u) + rg(u) = \dim(E) = p$

et

$\dim \ker(u^* \circ u) + rg(u^* \circ u) = \dim(E) = p$ car ${}^tAA \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$.

donc par identification, $rg(u^* \circ u) = rg(u)$.

Soit $x \in Im(u^* \circ u)$.

Alors $\exists\, y \in E$ tel que $u^* \circ u(y) = x$

$\Leftrightarrow u^* \circ (u(y)) = x$ avec $u(y) \in F$.

Donc $\exists\, z = u(y) \in F$ tel que $u^*(z) = x$.

Donc $x \in Im(u)$. Ceci étant vrai pour tout x de E,

Ainsi $Im(u^* \circ u) \subset Im(u)$.

Donc par inclusion et égalité des dimensions, en rappelant par définition que $rg(u) = \dim Im(u)$.

$\boxed{Im(u^* \circ u) = Im(u)}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7) $w : \mathrm{Im}(u^*) \to \mathrm{Im}(u^*)$
$x \to u^* \circ u(x)$.

w est la restriction de $u^* \circ u$ à $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Im}(u^* \circ u)$.

~~on remarque que les ensembles de départ et~~, les ensembles de départ et d'arrivée étant égaux. d'arrivée ont même dimension.

Donc w est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(u^*)$.

Or $\mathrm{Im}(w) = \{ x \in E$ tel que $\exists z$ tel que $u^* \circ u(z) = x \}$.

Donc $\mathrm{Im}(w) = \{ x \in E$ tel que $x \in \mathrm{Im}(u^* \circ u) \}$.

Donc $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(u^* \circ u)$.

Or $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Im}(u^* \circ u)$

Donc $\underline{\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(u^*)}$.

$\Rightarrow \dim \ker(w) = 0$ par le théorème du rang
$\Rightarrow \ker(w) = \{0_F\}$.

$\Rightarrow$ <u>w est un isomorphisme</u>.

En terme d'équation matricielle, cela signifie que,

$$\boxed{\forall Y \in \mathrm{Im}({}^tA),\ \exists!\ X \in E \text{ tel que } {}^tA A X = Y.}$$

ou bien, $\forall Y \in \mathrm{Im}({}^tA)$ ~~tel que~~ ${}^tA Y$, alors $Y = 0$. | moins puissant.

6 /

8) a) Q la matrice de π dans $\mathcal{B}_F$.
π est le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(u)$,

donc $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$AX \in \mathrm{Im}(A)$.

Donc $QAX = AX$ car $\forall x \in \mathrm{Im}(u)$, $\pi(x) = x$ par définition du projecteur.

$\Rightarrow {}^t(QAX) = {}^t(AX)$

$\Rightarrow {}^tX\,{}^tA\,{}^tQ = {}^tX\,{}^tA$

$\Rightarrow {}^tX\,{}^tA\,Q = {}^tX\,{}^tA$ car π est un projecteur orthogonal et Q est associé à π dans la base orthonormée $\mathcal{B}_F$, donc ${}^tQ = Q$.

Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

on a ainsi $\boxed{{}^tAQ = {}^tA}$.

8) b) Montrons d'une part que $\mathrm{tr}(Q) = \mathrm{rg}(Q)$.

π est un projecteur orthogonal donc diagonalisable. Donc $\exists P$ orthogonal et D diagonale avec $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $Q = PDP^{-1}$.
Donc $\mathrm{tr}(Q) = \mathrm{tr}(D)$ car les matrices sont semblables.
et $\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}(D)$ idem.

inutile, on prend une base appropriée ci-dessous et ça suffit.

or $\mathrm{rg}(D) = \mathrm{tr}(D)$ car D est diagonale, composée des valeurs propres de π, donc de 0 ou de 1 sur sa diagonale.
Et en prenant une base de vecteurs propres de π,
on a $Q = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

car $\mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi) = F$ par définition du projecteur donc en ordonnant la base on a $(\underbrace{q_1, \dots, q_r}_{\in \mathrm{Ker}(Q)}, \underbrace{q_{r+1}, \dots, q_n}_{\in \mathrm{Im}(Q)})$ avec $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\pi(q_i) = 0$
$\forall i \in [\![r+1, n]\!]$, $\pi(q_i) = q_i$

Donc finalement $\mathrm{tr}(Q) = \mathrm{rg}(Q)$.

7 /

De plus, $rg(u) = rg(u^*)$ d'après 4),

Donc d'après 8),

$rg(u^* \circ Q) = rg(u^*)$

$\Rightarrow rg(Q) = rg(u^*)$

$\Rightarrow rg(Q) = rg(u)$

$\Rightarrow \boxed{Tr(Q) = rg(u)}$.

9) • Supposons M inversible. $M = {}^tAA$ et $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Alors $\operatorname{Ker} M = \{0\}$

Donc par le théorème du rang, $\dim \ker(M) + rg(M) = p$

$\Rightarrow rg(M) = p \Rightarrow rg({}^tAA) = p \Rightarrow rg({}^tA) = p$ car d'après 6),

$\Rightarrow \boxed{rg(A) = p}$ $\quad rg(u^* \circ u) = rg(u^*)$.

• Supposons que $rg(A) = p$.

Alors par le théorème du rang, $\dim \ker(A) + rg(A) = p$

$\Leftrightarrow \dim \ker({}^tAA) + p = p$ car $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$ d'après 6)

$\Leftrightarrow \dim \ker(M) = 0$.

Donc $\ker(M) = \{0\}$.

Donc M est inversible.

10) a) On suppose $rg(A) = p$.

Donc M est inversible d'après 9)

Copie anonyme - n°anonymat : 243017

Code épreuve : 282	Nombre de pages :	Session : 2025
Épreuve de : Maths appro ESSEC / HEC		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10) b)

```
Calcule_Q(A) :
    rg= al.matrix_rank(A)
    n,p = np.shape(A)
    if p ==rg :                                  # si rg(A) = p
        M= np.dot(np.transpose(A), A)            M = tAA
        Q1= np.dot(A, al.inv(M))                 # calcul intermédiaire
        Q = np.dot(Q1, np.transpose(A))          # Q = A(M)^-1 tA
        return Q
    else :                                       # sinon, erreur.
        return ("erreur")
```

11) $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXMX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2$$

Or $\|AX\|^2 \geqslant 0$ car la fonction carrée est positive sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{{}^tXMX \geqslant 0}$.

Partie II

12) $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$J_0(X+H) - J_0(H) = \frac{1}{2}\|A(X+H)-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\|AX+AH-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2. \quad (1)$$

Par ailleurs,

$$\langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tH\,MH$$
$$= \langle MX - {}^tAY, H\rangle + 1/2\,{}^tH\,{}^tAAH$$
$$= \langle {}^tAAX - {}^tAY, H\rangle + 1/2\,\|AH\|^2$$
$$= \langle {}^tAAX, H\rangle - \langle {}^tAY, H\rangle + 1/2\,\|AH\|^2$$
$$= {}^tH\,{}^tAAX - {}^tH\,{}^tAY + 1/2\,\|AH\|^2$$

En reprenant (1), on a en développant,

$$J_0(X+H) - J_0(H)$$
$$= 1/2\,{}^t(AX+AH-Y)(AX+AH-Y) - 1/2\,{}^t(AX-Y)(AX-Y)$$
$$= 1/2\,({}^tX{}^tA + {}^tH{}^tA - {}^tY)(AX+AH-Y) - 1/2\,({}^tX{}^tA - {}^tY)(AX-Y)$$
$$= 1/2\,\big(\cancel{{}^tX{}^tAAX} + \cancel{{}^tX{}^tAAH} - \cancel{{}^tX{}^tAY} + {}^tH{}^tAAX + {}^tH{}^tAAH - {}^tH{}^tAY$$
$$- \cancel{{}^tYAX} - {}^tH{}^tAH + \cancel{{}^tYY} - \cancel{{}^tX{}^tAAX} - \cancel{{}^tX{}^tAY} - \cancel{{}^tYY} + \cancel{{}^tYAX}\big)$$
$$= 1/2\,(2\,{}^tH{}^tAAX - 2\,{}^tH{}^tAY + {}^tH{}^tAAH)$$
$$= {}^tH{}^tAAX - {}^tH{}^tAY + 1/2\,\|AH\|^2$$

On a donc l'égalité $\boxed{\langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tH\,MH = J_0(X+H) - J_0(H)}$

On la note (2).

13) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Supposons $D(X) = 0$. Alors $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tH\,MH = \frac{1}{2}\,{}^tH\,MH.$$

Donc $J_0(X+H) - J_0(H) = \frac{1}{2}\,{}^tH\,MH$.

or $\frac{1}{2}\,{}^tHMH \geq 0$ d'après 11)
Donc $J_0(X+H) \geq J_0(X)$ Ceci étant vrai pour tout $H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, par définition du minimum, Jo admet un minimum global atteint en X.
Supposons que Jo possède un minimum global.
Supposons que X soit le minimum global de J_0.

Alors $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $J_0(X) \leq J_0(X+H)$ par def du minimum

$\Leftrightarrow J_0(X) - J_0(X+H) \leq 0$
$\Leftrightarrow -\langle D(X), H\rangle - \frac{1}{2}\,{}^tHMH \leq 0$

$\Leftrightarrow -\langle D(X), H\rangle \leq \frac{1}{2}\,{}^tHMH$.

$\Leftrightarrow \langle D(X), H\rangle \geq -\frac{1}{2}\,{}^tHMH$. inachevé.

14) Soit.

15) a) $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $QY \in \mathrm{Im}(Q)$.
Q est le projecteur orthogonal de F sur Im (u).
Donc $QY \in \mathrm{Im}(A)$
Donc $\exists Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $AZ = QY$.

Analyse

Montrons que $Z \in S_0$ (Synthèse).
$D(Z) = MZ - {}^tAY = {}^tAAZ - {}^tAY = {}^tAQY - {}^tAY$.
Or ${}^tAQ = {}^tA$ d'après 8) a)
Donc ${}^tAQY - {}^tAY = 0 \Rightarrow D(Z) = 0$.

Ainsi, on a trouvé $Z \in S_0$ tel que $AZ = QY$.
En prenant $Z = X$, on a bien $\boxed{AX = QY}$.

15) b) $X_0 \in \ker(A)^\perp$. $X \in S_0$.

On a $A(X-X_0) = AX - AX_0$

$X \in S_0$ donc $D(X) = 0 \Leftrightarrow {}^tAAX = {}^tAY$ soit $AX = A{}^tAY$.

(De plus, $AX = QY$ d'après 15) a)). inutile.

Or $X_0 \in \ker(A)^\perp$ donc $X_0 \in \mathrm{Im}({}^tA)$ d'après 5).

Donc $\exists Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAZ = AX_0 \Rightarrow A{}^tAZ = AX_0$.

Ainsi $A(X-X_0) = AX - AX_0 = A{}^tAY - A{}^tAZ$.

Or $\ker({}^tAA) = \{0\}$ car $u^* o u$ est un isomorphisme d'après 7).

Donc $A(X-X_0) = 0 \Rightarrow X - X_0 \in \ker(A)$.

Ainsi, si $X \neq X_0$,

$AX - AX_0 = 0 \Leftrightarrow AX = AX_0 \Leftrightarrow QY = AX_0$ d'après 15) a).

Or $X_0 \in \ker(A)^\perp$ et Q est la matrice associée au projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(A)$.
Donc ..

15) c) Supposons $rg(A) = p$. Alors par le théorème du rang, $\dim \ker(A) = 0 \Rightarrow \ker(A) = \{0\}$. Or $X - X_0 \in \ker(A)$.
Donc $X - X_0 = 0 \Rightarrow X = X_0$.
De plus, $\ker(A) \oplus \ker(A)^\perp = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par définition de deux ensembles orthogonaux
Donc $\ker(A)^\perp = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Donc $S_0 \cap \ker(A)^\perp = S_0 \cap \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = S_0$ car $S_0 \subset \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Or d'après 14), $S_0 \cap \ker(A)^\perp = \{X_0\}$.
$\Rightarrow S_0 = \{X_0\} \Rightarrow \boxed{S_0 = \{X\}}$ car $X = X_0$.

Copie anonyme - n°anonymat : 243017

Code épreuve : 282	Nombre de pages :	Session : 2025
Épreuve de : Maths appro ESSEC / HEC		

Emplacement QR Code

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

15) c) SUITE.

De plus, $rg(A) = p \Rightarrow M$ inversible d'après 9)

Donc $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ existe tel que $M^{-1}M = I_n$
Comme $X \in S_0$, $D(X) = 0$

$\Leftrightarrow MX - {}^tAY = 0 \Leftrightarrow MX = {}^tAY$
$\Leftrightarrow \boxed{X = M^{-1}\,{}^tAY}$ en appliquant à gauche M^{-1}

16) on suppose toujours $rg(A) = p$, et $Y = AU_0 + Z$.

16) a) $T = \|A(X - U_0)\|^2$, On rappelle que $rg(A) = p \Rightarrow A$ inversible, par théorème du rang.

Or $Y = AU_0 + Z \Leftrightarrow Z = Y - AU_0$

Et $AX = QY$ d'après 15) a) ; (I)

De plus, ${}^tAQ = {}^tA$ d'après 8) a)
donc ${}^tQA = A \Leftrightarrow QA = A$ (II) car ${}^tQ = Q$ car associé à projection orthogonale dans une base orthonormée

Donc $QZ = QY - QAU_0$
$= QY - AU_0$ (II)
$QZ = \underbrace{AX}_{(I)} - AU_0$. Donc $\boxed{T = \|A(X - U_0)\|^2 = \|QZ\|^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, $T = \|QZ\|^2 = {}^t(QZ)\, QZ$ dans une base orthonormée

$T = {}^tZ\, {}^tQ\, Q Z = {}^tZ\, Q Q Z$ — Q est associé à un projecteur orthogonal donc ${}^tQ = Q$

$T = {}^tZ Q Z$ — et $QQ = Q$ car projecteur.

16) b)

~~simuleT(A, sigma) :~~
~~S = n~~

~~# on suppose les vecteurs X et U0 connus, car X et U0 sont fixés dans la question 16.~~

```
simuleT(A, sigma):
    Q = Calcule_Q(A)            # d'après le programme de 10)b)
    n, p = np.shape(A)
    Z = rd.normal(0, sigma**2, n)   # calcul de Z
    tZ = np.transpose(Z)         # calcul de tZ
    T1 = np.dot(tZ, Q)           # calcul intermédiaire
    T = np.dot(T1, Z)            # calcul de T = tZQZ.
    return T
```

16) c)

```
espérance(A, sigma):
  n = 0
  for i in range(1000):
      n = n + T(A, sigma)   # on additionne 1000 réalisations de T.
  m = n / 1000              # on divise par 1000 la somme
  return m                  # on a une valeur approchée de E(Z).
```

16) d) On conjecture qu'avec $\sigma = 1$, l'espérance de Z est différente selon la matrice A choisie, et que, en particulier, on remarque que :
$1,99 \simeq 2 \quad 3,01 \simeq 3$ et $4,97 \simeq 5$ . .

De plus, $rg(A_1) = 2$ car les vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires
$rg(A_2) = 3$ idem
$rg(A_3) = 5$ idem, matrice en escalier.

Donc on conjecture que $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $rg(A) = p$, n et p entiers tels que et $n \geq p$.

$E(Z) = rg(A)$.

Par le graphique suivant, le programme calcule successivement l'espérance de T pour les paramètres A_1 et $\sigma^2 = 1$, puis 2, 3 ... jusqu'à 7 inclus. On trace le graphique, et on remarque que l'espérance augmente.
Ainsi on conjecture que $\forall (\ell, r) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\ell > r$.

Alors $E(T)$ avec T_ℓ de paramètre A une matrice et $\sigma^2 = \ell$

est supérieure à $E(T)$ avec T de paramètre A la même matrice et $\sigma^2 = r$.

1.6) e) $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

$E(Z_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma^2} \times e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma)^2} dx$ d'après le théorème de transfert sous réserve de convergence.

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2\sigma x + \sigma^2)} dx$

$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{\sigma x} dx$.

INUTILE.

On a $V(Z_1) = E(Z_1^2) - E(Z_1)^2$ d'après Koenig-Huygens

$\Leftrightarrow \sigma^2 = E(Z_1^2) - 0$ car $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

$\Leftrightarrow E(Z_1^2) = \sigma^2$.

16/ f) On pose $T_1 = \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} z_i^2$ et $T_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij} z_i z_j$.

on rappelle que $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$T = {}^tZQZ = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} z_i Q_{ij} z_j$ par produit matriciel.

$= \sum_{i=1}^{n} z_i^2 Q_{ii} + \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} z_i z_j Q_{ij}$ en séparant les termes $i=j$ et $i \neq j$

$= \sum_{i=1}^{n} z_i^2 Q_{ii} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} z_i z_j Q_{ij}$

$= \sum_{i=1}^{n} z_i^2 Q_{ii} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Q_{ij} z_i z_j$ car $Q_{ij} = Q_{ji}$ car Q symétrique

$= \sum_{i=1}^{n} z_i^2 Q_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij} z_i z_j$

$T = T_1 + 2T_2$

Ainsi, $E(T) = E(T_1) + 2E(T_2)$ par linéarité de l'espérance.

et $E(T_1) = \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} E(z_i^2)$ par linéarité

$= \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} \sigma^2$

Copie anonyme - n°anonymat : 243017

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2025

Épreuve de : Maths appro ESSEC / HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

16) g) .

16) h)

16) i) On admet 16) h) .

$V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = E((T_1 + 2T_2)^2) - E(T)^2$ car $T = T_1 + 2T_2$ d'après 16) f)

$= E(T_1^2 + 2T_1T_2 + T_2^2) - E(T)^2$

$= E(T_1^2) + 2E(T_1T_2) + E(T_2^2) - E(T)^2$ par linéarité de E

$= \sigma^4 2q + \sigma^4 p^2 + \frac{\sigma^4}{2} p - \frac{\sigma^4}{2} q$ d'après les résultats de 16) h)

$- \sigma^4 2q - \sigma^4 p^2 + \frac{\sigma^4}{2} q + \frac{3}{2} \sigma^4 p$. et 16) f).

$V(T) = 2p\sigma^4$

Donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, avec $\varepsilon = \ldots$

$P(T$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie III

17) Soient u et v des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $u \neq 0$. $t \in \mathbb{R}$ et $t \neq 0$.
On note U et V leurs matrices associés de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\|u + tv\|$

$= \|U - tV\|$

soit $\|u + tv\| - \|u\| = \|U + tV\| - \|U\|$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (U_i + tV_i)^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} U_i^2}.$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[U_i^2 + 2tU_iV_i + t^2 V_i^2\right]} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n} U_iV_i + t^2 \sum_{i=1}^{n} V_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} U_i^2} \quad (1)$$

Par ailleurs,

$$\langle u, v \rangle \times \frac{1}{\|u\|} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} U_i} \sum_{i=1}^{n} U_iV_i .$$

En divisant la première expression (1) par $t \neq 0$,

$\frac{\|u + tv\| - \|u\|}{t} =$

18) Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalisant le minimum global de J

Supposons $BX_0 \neq 0$.

Alors $J(X_0) = \frac{1}{2} \| AX_0 - Y \|^2 + \| BX_0 \|$ par définition

Par ailleurs, $-D(X_0) = {}^tAY - MX_0$.

Dès lors, $\frac{J(X_0)}{\|BX_0\|} = \frac{1}{2\|BX_0\|} \|AX_0 - Y\|^2 + 1$

On admet $-D(X_0) = {}^tB \frac{BX_0}{\|BX_0\|}$. On note $V = \frac{BX_0}{\|BX_0\|}$

Alors $V = \frac{BX_0}{\|BX_0\|}$ est un vecteur unitaire car normalisé, donc $\|V\| = 1$.

De plus, $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$\|BX\| V - BX = \|BX\| \frac{BX_0}{\|BX_0\|} - BX$

$= \frac{\|BX\|}{\|BX_0\|} BX_0 - BX$

or $\frac{BX_0}{\|BX_0\|}$ est un vecteur unitaire et donc $\frac{\|BX\|}{\|BX_0\|}$ ...

19) a) $\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $BX_0 = 0$

$\langle D(X_0), H \rangle =$ "

19) b)

Soit $X \in \mathrm{Ker}(B)$.

$\langle D(X_0), X \rangle \leq \|BX\|$ d'après 19) a)

or $BX = 0$ car $X \in \mathrm{Ker}\, B$.

Donc $\langle D(X_0), X \rangle \leq 0$.

De plus, $\langle D(X_0), X \rangle = {}^tX D(X_0) = {}^tXMX - {}^tX\,{}^tAY$

$= {}^tX\,{}^tAAX - {}^tX\,{}^tAY$

$= \|AX\|^2 - {}^t(AX)Y$.

19) c) $D(X_0) \in \mathrm{Ker}(B)^\perp$ . . .

Donc $D(X_0) \in \mathrm{Im}({}^tB)$ d'après 5) avec $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$.

Donc $\exists W \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ tel que $D(X_0) = {}^tBW$

19) d) D'après 6), $\mathrm{Im}({}^tBB) = \mathrm{Im}({}^tB)$ et ${}^tBB \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

Donc $\exists V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tBBV = D(X_0)$ car $D(X_0) \in \mathrm{Im}({}^tB)$ d'après 19) c).

19) e) . . .

Copie anonyme - n°anonymat : 243017

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths appro ESSEC / HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

20) a) Soient u et v vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $u \neq 0$.

$$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2$$

$$= \frac{\|u+v\|^2\|u\|^2}{\|u\|^2} - \|u\|^2 - \frac{2\|u\|\langle u,v\rangle}{\|u\|} - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \left(\|u+v\|^2\|u\|^2 - \|u\|^4 - 2\|u\|^2\langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle^2\right)\frac{1}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle\right)\|u\|^2 - \|u\|^4 - 2\|u\|^2\langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{\cancel{\|u\|^4} + \|u\|^2\|v\|^2 + \cancel{2\langle u,v\rangle\|u\|^2} - \cancel{\|u\|^4} - \cancel{2\|u\|^2\langle u,v\rangle} - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$\boxed{= \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}}$$

20) b) On suppose $p(y) > 1$.

Donc $\sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{v_i^2} > 1$.

Donc $F(\lambda) \leq -1 + \frac{1}{4\lambda} \sum_{i=1}^{k} y_i^2$

F s'annule ...

F est bijective ...

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

21) a)

⋮

23) a). $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, avec $1 \leq k \leq n$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ réels non tous nuls.

$$F(\lambda) = -1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2}$$

$$F(\lambda) \leq -1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{\lambda^2 + 2\lambda\alpha_i^2 + \alpha_i^4}$$

$$\leq -1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{4\lambda\alpha_i^2}$$

car $(\lambda - \alpha_i^2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda\alpha_i^2 + \alpha_i^4 \geq 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + \alpha_i^4 \geq 2\lambda\alpha_i^2$

et la fonction inverse donc :

$$\frac{1}{\lambda^2 + \alpha_i^4} \leq \frac{1}{2\lambda\alpha_i^2}$$

$$\boxed{F(\lambda) \leq -1 + \frac{1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

23) d) i)

```
FoncSom(alpha, y, lda) :
    n, p = np.shape(y),        # seul n nous intéresse.
    S = 0                      # S sera la somme.
    for i in range(n) :
        S = S + (alpha[i]**2 * y[i]**2)/(lda + alpha[i]**2)**2
    S = S - 1
    return S
```

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751