Copie anonyme - n°anonymat : 482442

E3-00115 482442 Mat Appro

Code épreuve : 295 **Nombre de pages :** 24 **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques Appro EML

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème 1

1.) $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[0,1]$ par composition de $t \mapsto 1-t^2$ (polynomiale donc continue sur $[0,1]$) et de $t \mapsto t^n$ continue sur $[0,1]$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n existe

Plus encore, $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[-1,1]$ (même justification), donc J_n est définie, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$t \mapsto (1-t^2)^n$ est paire donc

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$$

Soit $J_n = 2 I_n$

2). $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 \, dt = \int_0^1 1 \, dt = 1$, $I_0 = 1$

3). $\forall t \in [0,1], 0 \leq 1-t^2 \leq 1$

donc $(1-t^2)^{n+1} \leq (1-t^2)^n$ (en multipliant par $(1-t^2)^n \geqslant 0$)

puis, par croissance de l'intégration (bornes dans le bon sens et intégrale convergente,

$$\int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \, dt \leq \int_0^1 (1-t^2)^n$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $I_{n+1} \leq I_n$, donc $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

4). Soit $n \geq 1$

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^1 (1-t^2)^n - (1-t^2)^{n-1} \, dt$$ (linéarité de l'intégrale convergente)

$$= \int_0^1 (1-t^2)^{n-1}(1-t^2-1) \, dt$$

$$= \int_0^1 -(1-t^2)^{n-1} t \times t \, dt$$, par intégrations par parties, il vient :

$$= \left[\frac{(1-t^2)^n}{2n} t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-t^2)^n}{2n}$$

$$= \frac{-1}{2n} I_n$$

d'où $I_n - I_{n-1} = \frac{-1}{2n} I_n$

$$I_n\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = I_{n-1}$$

$$I_n\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = I_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

donc $\forall n \geq 1$, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$

2/

5). Pour $n=0$, $I_0 = 1$ et $\left(\frac{2^0 0!}{(0+1)!}\right)^1 = 1$

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, fixé,

$I_n = \left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\right)^2$, ...

$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n$ (Question 4) et, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\right)^2$$

$$= \frac{2(n+1)(2^n)^2(n!)^2}{2n+3\ (2n+1)!} \frac{2n+2}{2n+2}$$

on multiplie par $2n+2$ en haut et en bas.

Comme $2n+2 = 2(n+1)$

$$= \frac{(n+1)!\ (2^{n+1})^2\ 2(n+1)}{(2n+3)!}$$

$$I_{n+1} = \left(\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1)+1)!}\right)^2$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, : $I_n = \left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\right)^2$

$J_n = 2 I_n$, donc $J_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

6) def I(n) :
```
    i = 1
    for k in range(1, n+1) :
        i = i*(2*k / 2*k + 1)
    return i
```

7) $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n+1}\ 2\pi n\ n^{2n}\ e^{2n+1}}{e^{2n}\ \sqrt{2\pi(2n+1)}\ (2n+1)^{2n+1}}$ (par compatibilité de l'équivalent et du produit)

car $(2n+1)^{2n+1} \sim (2n)^{2n+1}$

$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}\ e$

car $\sqrt{2n+1} \sim \sqrt{2n}$

$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\ e}$ ↳ j'ai un e en trop...

Partie 2

8) (P,Q) est une application de $\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ car

$\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ converge ($t\mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1,1]$).

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $P,Q,R\in\mathbb{R}^3[X]$,

$(\lambda P+R, Q) = \int_{-1}^{1}(\lambda P+R)(t)\,Q(t)\,dt$, puis par linéarité de l'évaluation et de l'intégrale convergente, il vient,

$(\lambda P+R, Q) = \lambda\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt + \int_{-1}^{1}R(t)Q(t)\,dt = \lambda(P,Q)+(R,Q)$

donc (P,Q) est linéaire à gauche, étant symétrique par commutativité du produit, (P,Q) est linéaire à droite.

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, $(P,P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2\,dt$

Copie anonyme - n°anonymat : 482442

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths EML APPRO

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

de classe

et $t \mapsto P(t)^2$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[-1,1]$, donc, par positivité de l'intégrale convergente, $(P,P) \geq 0$

Supposons que $(P,P) = 0$, comme $t \mapsto P(t)^2$ est positif et continue sur $[-1,1]$,

$\forall t \in [-1,1], P(t)^2 = 0$

$\Rightarrow P(t) = 0 \quad \forall t \in [-1,1]$

donc que P admet une infinité de racines, donc que P est le polynome nul, donc que (P,Q) est défini.

Cette application est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

9) Les polynomes de B_n sont deux à deux orthogonaux si et seulement si $\forall (i,j), i \neq j \; \langle e_i, e_j \rangle = 0$

Prenons $e_i = 1$, $e_j = X^2$

$\langle e_i, e_j \rangle = \langle 1, X^2 \rangle = \int_{-1}^{1} X^2 \, dx$

$= \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} \neq 0$, donc non ils ne sont pas deux à deux orthogonaux.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

10) ~~u est~~ Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$

donc $(1-x^2)P'(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$

donc $((1-x^2)P'(x))' \in \mathbb{R}_n[x]$, donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[x]$,

donc u est une application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$,

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$,

$u(\lambda P+Q) = (1-x^2(\lambda P+Q)'(x))'$

$= ((1-x^2)(\lambda P'(x)+Q'(x)))'$ par linéarité de la dérivation (P et Q sont dérivables (polynom))

$= \lambda((1-x^2)(P'(x))' + ((1-x^2)Q'(x)$

$= \lambda U(P) + U(Q)$ donc U est linéaire,

donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

11.a) $e_0 = 1$, $u(e_0) = u(1)$

$= ((1-x^2)\times 0)' = 0$ car 1 est constant donc sa dérivée est nulle.

$u(e_0) = 0$

$u(e_1) = u(X) = ((1-x^2)\times 1)' = -2X = -2e_1$

11.b) Soit $k \in [\![2,n]\!]$, $u(e_k) = u(X^k) = ((1-X^2)\, k\, X^{k-1})'$

$= k((1-X^2)X^{k-1})'$, puis par dérivation d'un produit,

$= k(-2X \times X^{k-1} + (1-X^2)(k-1)X^{k-2})$

$= -2kX^k + k(k-1)X^{k-2} - k(k-1)X^k$

6

$u(e_k) = X^k\left(-2k - k(k-1)\right) + k(k-1)e_{k-2}$

$= X^k\left(-k(k+1)\right) + k(k-1)e_{k-2}$

$= \boxed{-k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}}$

11. c) Représentons la matrice représentative de U dans la base canonique, on la note M

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_0) & \dots & u(e_k) & \dots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & & & \\ & 0 & k(k-1) & & \\ & & -k(k+1) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_0 \\ \vdots \\ e_k \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Pas très droit...

Cette matrice est triangulaire supérieure, donc $Sp(M) = \{-k(k+1), k \in [[0,n]]\}$ ie $Sp(M) = 0, -2, \dots -6 \dots$

donc $\boxed{Sp(U) = \{-k(k+1), k \in [[0,n]]\}}$

(on avait déjà remarqué que 0 et -2 étaient valeurs propres à la Q. 11.a

Comme les $-k(k+1)$ sont distincts, U possède $n+1$ valeurs propres distinctes, et comme $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$, la somme des dimensions des sous espaces propres associés aux valeurs propres de U ne peut excéder $n+1$ $\Rightarrow$ tous les sous espaces propres sont de dimension 1

12.) d'après 11.c, U est diagonalisable (condition suffisante $n+1$ valeurs propres distinctes, avec $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$, donc il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de U. Notons $(E_0, \dots E_n)$ cette base orthonormale à fortiori orthogonale aussi. Il suffit de diviser chaque vecteur par son coefficient dominant. Cela ne change en rien l'orthogonalité

Conclusion : $(L_0, L_1 \dots L_n)$ existe c'mini du P.S

13. a) $E = (\mathbb{R}[x], \langle P, Q \rangle)$ c'est un espace euclidien,

$\mathbb{R}_n[x]$ est un sous espace vectoriel de E, donc,

d'après le théorème de minimisation de la norme par projection orthogonale, $\exists! \, T_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$\|f - T_n\| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - g\| \quad , \text{ce } \forall f \in \mathbb{R}[x]$$

$$\boxed{T_n = P_{\mathbb{R}_n[x]}(f)}$$, la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[x]$,

$T_n \in \mathbb{R}_n[x]$, donc, $\exists (c_0, \dots c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $\sum_{k=0}^{n} c_k L_k = T_n$

(car $L_0, \dots L_n$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$

$(L_0, \dots L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$

$$c_k = \frac{\langle f, L_k \rangle L_k}{\|L_k\|}$$

13. b) $\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, T_n \rangle + \|T_n\|^2$

or $\|T_n\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k L_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|c_k L_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_k\|^2$ (famille orthogonal)

$$\boxed{\text{donc } \|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_k\|^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 482442

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Maths Appro EML

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

14.a) P_k est de de degré $2k$

$(x^2-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x^2)^i (-1)^{k-i}$ (d'après le binôme de Newton)

d'où $\boxed{Q_k = P_k^{(k)} \text{ est de degré } 2k - k = k}$

$(x^2-1)^k = (x-1)^k (x+1)^k$

14.b) $Q_0 = P_0^{(0)} = P_0 = \underline{1}$

$Q_1 = P_1^{(1)} = (x^2-1)^{(1)} = \underline{2x}$

$Q_2 = P_2^{(2)} = ((x^2-1)^2)^{(2)} = \underline{8x^2}$ ~~[illegible]~~

14 c i) $P_1(x)\, P_k'(x) = (x^2-1) 2kx (x^2-1)^{k-1}$

$= \boxed{2k\,x\,(x^2-1)^k = 2k\,x\,P_k(x)}$

14.c ii. On peut dériver car les fonctions sont de classe C^{n+1} (polynômes) d'après la formule de Leibniz.

14.c.iii) D'après Q.12, $L_k = \frac{k!}{(2k)!}\, Q_k$ car le coefficient dominant de Q_k est $\frac{(2k)!}{k!}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

14.d)

Pour $k=0$, $\int_{-1}^{1} f(t)g(t) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$

Supposons la propriété vraie au rang k,

On applique une intégration par parties à $\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)$,

On : ... primitive $f^{(k+1)}$

$$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)\,dt = \left[f^{(k)}(t)g(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(k)} g'(t)\,dt$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, $g^{(j+1)}$

$$= f^{k}(1)g(1) - f^{(k)}(-1)g(-1) - \Big(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{k-1-j}(t)(g')^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1}$$

$$+(-1)^k \int_{-1}^{1} f(t)g^{(k+1)}(t)\,dt\Big)$$

$$= f^{k}(1)g(1) - f^{(k)}(-1)g(-1) - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1}\left[f^{(k-j)} g^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1}$$

$$-(-1)^k \int_{-1}^{1} f(t)g^{(k+1)}(t)\,dt$$

et comme le terme de la somme en $j=0$ est $f^{(k)}(1)g(1) - f^{(k)}(-1)g(-1)$,

il vient,

$$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)\,dt = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left[f^{(k-j)}(t)g^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1} f(t)g^{(k)}(t)\,dt$$

Conclusion : ..

10/

14.e.i) $P_k = \overbrace{(x-1)^k}^{f} \overbrace{(x+1)^k}^{g}$

d'après la formule de Leibniz,

$$P_k^{(2n)}(x) = \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(x)\, g^{(2n-k)}(x) \binom{2n}{k}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!}$$

14.e ii) théorème division euclidienne ?

Copie anonyme - n°anonymat : 482442

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 2

1) f est positive et continue sur $\mathbb{R}$

f est paire, donc il suffit d'étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$

Soit $\varepsilon > 0$, $\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} [\operatorname{Arctan}(x)]_0^{\varepsilon}$

$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctan}(\varepsilon)\right)$ et

$\lim\limits_{\varepsilon \to +\infty} \operatorname{Arctan}(\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}$

d'où, par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$

$\boxed{\text{f est une densité de probabilité}}$

2) X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument, cela revient à étudier la convergence de $\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

(par positivité et par imparité.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

or $\frac{x}{1+x^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ diverge (Riemann $\alpha = 1$)

donc, par le critère d'équivalence des intégrales à termes positifs, $\int_1^{+\infty} x f(x)\,dx$ diverge, donc

X n'admet pas d'espérance.

X n'admet pas d'espérance, donc pas de variance

(par Koenig Huygens $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ⟵ n'existe pas.)

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{1}{\pi} [\text{Arctan}(x)]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}(x) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $\left(\text{car } \lim_{x \to -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}\right)$

$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\text{Arctan}(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$

F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, donc F est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sauf éventuellement en quelques points et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

. $f(x) > 0$ donc F_X est strictement croissante, étant continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection,

$\boxed{F \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0,1[}$

On pose $y = F(x)$

$$y = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\pi y - \frac{\pi}{2} = \text{Arctan}(x)$$

en composant par tan $\pi y - \frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

d'où, $\tan\left(\pi y - \frac{\pi}{2}\right) = x$

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $P(F^{-1}(U) \leq x)$

$x \to F(x)$ strictement croissante

$$= P(U \leq F(x))$$

$$= F_U(F(x)) = F(x)$$

car $F(x) \in [0,1]$ et $U \hookrightarrow U[0,1]$,

donc $X = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

4. b)

```
def cauchy():
    U = rd.random
    X = np.tan((np.pi * U) - (np.pi)/2)
    print(X).
```

5.) Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$$P(\sqrt{|X|} \leq x) = P(|X| \leq x^2)$$ par croissance de $x \to x^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$$= P(-x^2 \leq X \leq x^2)$$

$$= F_X(x^2) - F_X(-x^2)$$

$x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en quelques points et est continue sur $\mathbb{R}$,

donc par composition et somme

F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en quelques points et est continue sur $\mathbb{R}$, donc, Z est à densité.

On obtient une densité en dérivant la fonction de répartition aux points où Z est dérivable (sur $\mathbb{R}_+$).

$$f_Z(x) = \frac{2x}{\pi}\left(\text{Arctan}(x^2) + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2x}{\pi}\left(\text{Arctan}(-x^2) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi}\left(\text{Arctan}(x^2) + \text{Arctan}(-x^2) + \pi\right) & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$\text{Arctan}(-x^2) = -\text{Arctan}(x^2)$

6) D'après le théorème de transfert, $E(Z)$ existe si et seulement si

$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2}\,dx$ converge absolument. $t \mapsto \frac{\sqrt{|t|}}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$,

Soit $x \geq 0$ $\quad \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2} \sim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

C'est une intégrale convergente (Riemann, convergente, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

donc par comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2}\,dx$ converge.

On fait de même en $-\infty$, donc Z admet une espérance

Copie anonyme - n°anonymat : 482442

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2025
	Épreuve de : Maths Appro EML		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~7) d)~~ Z admet une variance si et seulement si Z admet un moment d'ordre 2 donc, par l'exemple,

7.a) On pose $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} x (x^2 + \sqrt{2} x + 1) + -\frac{1}{2\sqrt{2}} x (x^2 - \sqrt{2} x + 1)$$

$$= \frac{x^3}{2\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{x^3}{2\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2\sqrt{2}}$$

$$= x^2$$

donc $\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} x}{x^2 - \sqrt{2} x + 1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}} x}{x^2 + \sqrt{2} x + 1} = \frac{x^2}{(x^2 - \sqrt{2} x + 1)(x^2 + \sqrt{2} x + 1)}$

7.b) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - \sqrt{2} x + 1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2 + \sqrt{2} x + 1}$ sont continues

sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{x^2 - \sqrt{2} x + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2} x + 1} \quad \frac{1}{x^2}$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ converge (Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc, par

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

critère de comparaison, les deux intégrales convergent.

On pose $U = \sqrt{2}\, x$, affine, donc linéaire, $du = \sqrt{2}\, dx$

$x = \frac{U}{\sqrt{2}}$ $\quad x^2 = \frac{U^2}{2}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\frac{U^2}{2}+U+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\frac{U^2}{2}+\frac{2U}{2}+\frac{2}{2}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(U+1)^2+1}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\operatorname{Arctan}(U+1)}{\cancel{2}} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

8)

~~La loi faible des grands nombres~~

On ne peut pas appliquer le résultat du cours car X n'admet pas d'espérance.

On conjecture que $E(2) \simeq \sqrt{2}$

/

9) $1_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$, $E(1_A) = P(A)$

$V(1_A) = P(A)(1-P(A))$

10) Soit $w \in$ ... $[X(w) > 5]$

alors $1_{[X>5]}(w) = 1$

et $\chi_{]5;+\infty[}(X(w)) = 1$ car $X(w) \in]5;+\infty[$

Soit $w \notin [X>5]$

$1_{[X>5]} = 0$

$\forall w \in \Omega,\ 1_{[X>5]}(w) = \chi_{]5;+\infty[}(X(w))$

10.b) f_0 est discontinue en $x = 0$

11) $\cancel{\ldots}$ $X_k = Y_k + 2k$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

12) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_k) = E(X_k \cdot 1_{[|X_k| \leq M]})$

16.a) $|\overline{Z_n}| \geq 0$, les Z_i admettent une espérance,

donc, par linéarité et somme, $E(|Z_n$

par l'inégalité de Markov,

$P(|\overline{Z_n}| \geq$

Loi faible des grands nombres.

2c) $\overline{X_n} \xrightarrow{P} 0$, Soit (X_n) une suite de variables aléatoires iid, (indép, non lié)

$\overline{X_n} \xrightarrow{P} E(X_1)$

1g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4M^2}{\varepsilon^2 n} + \frac{2\varepsilon}{3} = 0$, donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\overline{X_n}| > \varepsilon) = 0$

/

Copie anonyme - n°anonymat : 482442

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :**	**Session :** 2025

Épreuve de : Maths Appro EML

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

15) inégalité triangle.

$P(|\bar{X_n}| > \epsilon) \leq P(|\bar{Y_n} + \bar{Z_n}| > \epsilon)$

et comme $[\bar{Y_n} + \bar{Z_n} > \epsilon] \subset [|\bar{Y_n}| > \frac{\epsilon}{2}] \cup [\bar{Z_n} > \frac{\epsilon}{2}]$

$P(\bar{Y_n} + \bar{Z_n} > \epsilon) < P(|\bar{Y_n}| > \frac{\epsilon}{2}) + P(\bar{Z_n} > \frac{\epsilon}{2}) - P(\dots)$

~~Donc~~ d'après le crible

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|\bar{X_n}| > \epsilon) \leq P(|\bar{Y_n}| > \frac{\epsilon}{2}) + P(|\bar{Z_n}| > \frac{\epsilon}{2})$

16.a) $|\bar{Z_n}| = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} Z_i \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |Z_i|$ par inégalité triangulaire,

d'où, par croissance de l'espérance

$E(|\bar{Z_n}|) \leq E(|Z_1|)$ (

et par Markov, comme $|\bar{Z_n}| > 0$ et $|\bar{Z_n}|$ admet une espérance,

$P(|\bar{Z_n}| > \frac{\epsilon}{2}) \leq \frac{2}{\epsilon} E(|Z_1|)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Si $M \geq M_1$

$1_{[|X_k| \geq M]} \leq 1_{[|X_k| \geq M_1]}$

17.a) $\overline{X_n}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \; \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$

$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$

d'où, par existence de l'espérance, et par linéarité,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; E(\overline{X_n}^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(X_i X_j)$

17.b) $\frac{n(n-1)}{2}$: nombre de termes de la somme

$E(X_i X_j) \leq E(X_1)^2$

donc, on majore $\sum_{1 \leq i < j \leq n} E(X_i X_j)$ par le nombre de termes de la

somme multiplié par le plus grand terme.

/

14.) Par contraposée,

Supposons que $[|X| \leq \frac{\varepsilon}{2}] \cap [|Y| \leq \frac{\varepsilon}{2}]$ $\omega \in$

alors $|X+Y| \leq |X|+|Y|$ (inégalité triangulaire

et $|X+Y| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

La contraposée est vérifiée,

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, |x+y| > \varepsilon \Rightarrow ([|x| > \frac{\varepsilon}{2}] \cup [|y| > \frac{\varepsilon}{2}])$

13. b) $0 < Z_h < |Z_h|$

donc, par croissance de l'espérance,

$0 < E(Z_h) <$

$0 < E(Z_h) < E(|Z_h|)$, mais par encadrement

$\lim\limits_{n \to +\infty} E(Z_h) = 0$ d'après 13. a)