Code épreuve : 298	Nombre de pages : 42	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliqués EDHEC BS

G6-00223
800252
Mat Appli

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice n° 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^k$

1)a) f_n est dérivable sur $[0,1]$ comme polynôme donc dérivable sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k . k . x^{k-1}$$

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 . x^{k-1}$$

On, $k \geq 1$ et $x \in [0,1]$ donc, $\forall x \in [0,1]$,

$f_n'(x) \geq 0$.

Donc f_n strictement croissante sur $[0,1]$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1b) f_n continue sur $[0,1]$ car dérivable sur $[0,1]$.

f_n strictement croissante sur $[0,1]$.

$f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Or $n \geq 1$ donc $\frac{n(n+1)}{2} \geq 1$. et donc,

$1 \in [f_n(0), f_n(1)]$.

Par le théorème de la bijection l'équation d'inconnue x possède donc une unique solution U_n.

c) $f_1(x) = 1$ soit $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{1} kx^k = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$.

Donc $U_1 = 1$

2)a) $\forall x \in [0,1]$,

$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} kx^k$

$= \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)x^{n+1}$ (linéarité)

$= f_n(x) + (n+1)\, x^{n+1}$

b) On a alors, avec $n \in \mathbb{N}^*$,

$f_{n+1}(v_n) = f_n(v_n) + (n+1)\, x^{n+1}$

$= 1 + (n+1)\, x^{n+1}$

Or, $x \geq 0$ donc, comme $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{n+1}(n+1) \geq 0$.

De ce fait, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$f_{n+1}(v_n) \geq 1$.

c) On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$f_{n+1}(v_n) \geq 1$

$\Leftrightarrow f_{n+1}(v_n) \geq f_n(v_n)$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(v_{n+1}) = f_n(v_n) = 1$. (par définition).

$\Leftrightarrow f_{n+1}(v_n) \geq f_{n+1}(v_{n+1})$.

Or, f_{n+1} strictement croissante et bijective dans $[0,1]$ donc sa bijection réciproque f_{n+1}^{-1} l'est aussi.

En composant par f_{n+1}^{-1},

$\Leftrightarrow v_{n+1} \leq v_n$

Donc (v_n) décroissante

d) (U_n) decroissante.

De plus, $U_n \in [0, 1]$.

<u>Donc (U_n) decroissante et minorée par 0</u>

<u>Donc (U_n) converge.</u>

3) a) Avec $x \neq 1$ et x réel, on a, avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \quad x \neq 1.$$

$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

b) Soit $x \neq 1$.

On note $h(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ et $D_h = \cancel{[0,1[}\ \mathbb{R} \setminus \{1\}$

h derivable sur D_h comme quotient de fonctions rationelles dont le denominateur ne s'annule pas.

Ainsi, $\forall x \neq 1$, $\cancel{h'(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n}$

$$h'(x) = \frac{(-(n+1)x^n)(1-x) - (1 - x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \quad (x \neq 1)$$

$$h'(x) = \frac{-nx^n - x^n + nx^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 42 **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EDHEC BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

On, par définition de h, $\forall x \neq 1$,

$h'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$ car la dérivée de la somme est la somme des dérivées.

Donc, $\forall x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^{n} + 1}{(1-x)^2}$$

c) De ce fait $\forall x \in [0,1[$, on a avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^{n} + 1}{(1-x)^2}$$

On, $x \in [0,1[$ donc en multipliant par x,

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k x^{k} = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

Donc, $\forall x \in [0,1[$,

$$f_n(x) = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

4) a) On a par définition,

$f_2(v_2) = 1$ donc v_2 solution de (E)

$\Leftrightarrow x + 2x^2 = 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$.

On reconnaît un polynôme de degré 2, de discriminant,

$\Delta = 1 - 4.(-1).2$

$\Delta = 9$.

Donc il a 2 racines, $x_1 = -1$.

$x_2 = \frac{1}{2}$

Or, $v_2 \neq (-1)$ car, $v_2 \in [0,1]$.

Donc $v_2 = \frac{1}{2}$.

Or, (v_n) decroissante donc, $\forall n \geq 2$,

$0 \leq v_n \leq v_2$

$\Leftrightarrow 0 \leq v_n \leq \frac{1}{2}.$

b) ~~De ce fait, avec le changement de variable,~~

~~v_n~~

On a, $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n)_n = l$.

Or, par le théorème de la limite monotone, $l \in [0, \frac{1}{2}]$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = 0$ car, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = \lim\limits_{n \to +\infty} l^n = 0$.

et $\lim\limits_{n \to +\infty} n v_n^n = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = l^n$ et $l \leq \frac{1}{2}$.

c) $\forall n \geq 2$, avec la question 3c

$f_n(v_n) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{n v_n^{n+2} - (n+1) v_n^{n+1} + v_n}{(1 - v_n)^2} = 1$$ car $n \geq 2$ donc $v_n < 1$ et $v_n \neq 1$.

$$\Leftrightarrow n v_n^{n+2} - (n+1) v_n^{n+1} + v_n = (1 - v_n)^2$$

$\Leftrightarrow \; n U_n^{n+2} - (n+1) U_n^{n+1} + U_n = (1 - U_n)^2$

$\Leftrightarrow \; n U_n^{n+2} - (n+1) U_n^{n+1} + U_n = U_n^2 + 1 - 2U_n$

$\Leftrightarrow \; n U_n^{n+2} - (n+1) U_n^{n+1} = U_n^2 - 3U_n + 1 .$ $(n \geq 2)$

---

a) (U_n) converge donc en remplaçant (U_n) par l, par passage à la limite comme $l \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \; n l^{n+2} - (n+1) l^{n+1} = l^2 - 3l + 1$

$\Leftrightarrow \; l^{n+1} \left(nl - (n+1) \right) = l^2 - 3l + 1$

Exercice 2 :

1) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(a,b) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & -b & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Donc, E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

1 b) Effectuons un test de liberté.

Soient γ et μ réels. Soient (a,b) non-nuls.

$$\gamma \begin{pmatrix} 1a & 0 & 1a \\ 0 & 2a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & -b & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma a = 0 \\ \mu b = 0 \\ 2a\gamma - \mu b = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \mu = 0. \end{cases}$$ (on prend a et b non-nuls)

Donc,

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ libre}$$

Donc c'est une famille libre et génératrice de E
(1a)

Donc c'est une base de E.

Donc dim E = 2

2)
D'une part, les matrices de E sont diagonalisables car symétriques.

D'autre part avec $M \in E$,

M inversible $\Leftrightarrow$ rg $(M) = 3$

Or rg $(M) = 2$ car on a 2 colonnes identiques.

Donc rg $(M) \leq 2$.

Donc les matrices de E sont non-inversibles.

3) En posant $a = 1$ et $b = 3$, on a bien,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2-3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, $A \in E$ comme combinaison linéaire de sa base.

4)
```
from numpy import
import numpy.linalg as al
        A = np.array([[1,3,1],[3,-1,3],[1,3,1]])
        B = np.transpose(A)
return (B)
```

5) a) A non-inversible.

Donc, $(A - 0.I)$ non-inversible donc $0 \in Sp(A)$.

b)

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

On

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donc il existe une combinaison linéaire entre les colonnes de $A - 5I$.

Donc $rg(A-5I) \leq 2$.

Donc $A-5I$ non-inversible.

De plus $(A+4I) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Ainsi, $(A+4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ où $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y+z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \\ x+3y+5z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+3y+5z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ y=-2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-2z. \end{cases}$$

Donc, $X = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ Donc, X non nul.

Donc, comme $X \in \ker(A+4I)$, on a ~~$\ker(A+4I) \neq 0$~~ $\ker(A+4I) \neq \{0\}$

et ainsi, ~~$(A+4I)$~~ $(A+4I)$ non-inversible.

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 42 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) On a, $Sp(A) = \{-4, 0, 5\}$.

$-4 \in Sp(A) \iff$ il existe $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non nul tel que,

$AX = -4X$

$\iff (A + 4I)X = 0$

$\iff \begin{cases} 5x + 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -5y - 5z + 3y + z = 0 \\ x = -y - z \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \\ x = -y - z \\ y = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = z \\ x = z \\ y = -2z \end{cases}$

Donc, $X = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ Or, ce vecteur est non-nul donc famille libre et generatrice de E_{-4} donc base.

De plus,

$0 \in Sp(A) \iff$ il existe X non-nul tel que,

$AX = 0$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - z \\ -9y - 3z - y + 3z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - z \\ y = 0 . \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x . \end{cases}$

Donc, $X = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc, on a aussi, $X = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Or ce vecteur est non-nul donc il est une famille libre et génératrice de E_0 donc une base de E_0.

De plus, $5 \in Sp(A) \Leftrightarrow$ il existe X non-nul tel que,

$AX = 5X$

$\Leftrightarrow (A - 5I) X = 0$

$$\iff \begin{cases} -4x + 3y + z = 0 \\ 3x - 6y + 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{2x = 1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y - z \\ 2y - z + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y - z \\ -5z = -5y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y - z \\ z = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ z = y. \end{cases}$$

Donc, on a $E_5 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Cette famille étant libre (non-nulle) et génératrice de E_5 elle forme donc une base de E_5.

En nommant ces 3 vecteurs u, v, w (respectivement de -4 à 5).

On a (u, v, w) famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ comme concaténation de familles libres associées de sous-espaces propres à des valeurs propres distinctes de A.

De plus, $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$.
Or, $\operatorname{card}(u, v, w) = 3$.

Donc, (u, v, w) base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

6) D'après le Script,

$n1 = rg(A - 5I)$
et
$n2 = rg(A + 4I)$.

Donc, on a par la question précédente le rang de ces matrices.
En effet, par le théorème du rang comme $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension finie,

$$rg(A - 5I) + \dim \operatorname{Ker}(A - 5I) = 3$$

$\Leftrightarrow rg(A - 5I) = 2$ car une base de $\operatorname{Ker}(A - 5I)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ de dimension 1.

Donc, $n1 = 2$

De même,

$$rg(A + 4I) + \dim \operatorname{Ker}(A + 4I) = 3$$

$\Leftrightarrow rg(A + 4I) = 2$ car une base de $\operatorname{Ker}(A + 4I)$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $n2 = 2$

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 42	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliqués EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) a)

D'abord, on a U, V, W non-nuls.

Puis, soit $M \in E$, (on reprend celle de l'énoncé).

$$MU = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$MU = \begin{pmatrix} 2a-2b \\ b-2(2a-b)+b \\ 2a-2b \end{pmatrix}$$

$$MU = \begin{pmatrix} 2a-2b \\ 4b-4a \\ 2a-2b \end{pmatrix} = (2a-2b)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc U vecteur propre de toute matrice de E.

Puis, V non-nul, et,

$$MV = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$MV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc V vecteur propre de toutes les matrices de E.

W non-nul,

$$MW = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$MW = \begin{pmatrix} a+b+a \\ 2a+b \\ 2a+b \end{pmatrix}$$

$$MW = (2a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc W vecteur propre de toutes les matrices de E.

b) Toutes les matrices de E s'écrivent comme M.

De fait, $\forall M \in E$, $Sp(M) = \{2a-2b, 0, 2a+b\}$

Par définition, avec P matrice dont les colonnes sont U, V, W, on a alors, comme P inversible toute matrice de M qui s'écrit

$M = PDP^{-1}$. où D matrice ayant pour coefficients

diagonaux $2a-2b$, 0, $2a+b$.

Par recurrence montrons que pour tout n non-nul, $M^n = PD^nP^{-1}$.

avec $n=1$, $M = M$

et $PDP^{-1} = M$.

Donc validation de l'initialisation.

Soit n quelconque fixé superieur ou égal à 1 tel que

$M^n = PD^nP^{-1}$

$\Rightarrow M^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$

$\Rightarrow M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$ $M^n = PD^nP^{-1}$, et on pourra

alors utiliser cette voie de calculs.

Exercice 3 :

1) D'abord, f_n définie sur $\mathbb{R}$ car $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\frac{x}{n}$ définie.

De plus, $\forall x \in [0, n]$ $\frac{x}{n} \leq 1$ donc $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0$.

Car la fonction puissance $n-1$ est bijective croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc, $\forall x \in [0, n]$, $f_n(x) \geq 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \geq 0$.

De plus, f_n continue sur $\mathbb{R}^-$ et sur $]n, +\infty[$ comme constante.
et sur $]0, n[$ comme somme et composée de fonctions usuelles, s'agit avec une fraction dont le dénominateur ne s'annule pas car $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc f_n continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en n.

De plus,

$$\int_{-\infty}^{0} f_n(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{n}^{+\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

De plus on a,

$\int_0^n f_n(x)\,dx$ qui est définie par continuité, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx$$

$$= (-n) \int_0^n \left(-\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx$$

$$= (-n) \left[\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}}{n} \right]_0^n \quad \text{car } n-1 \neq (-1)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= (-n)\left(0 - \frac{1}{n}\right)$

$= 1.$

Donc par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Donc f_n densité

2)a) $n \in \mathbb{N}^*$

$E\left(1 - \frac{X_n}{n}\right)$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\left(1 - \frac{x}{n}\right) f_n(x)\right| dx$ converge

par théorème du transfert

$\Leftrightarrow \int_0^n f_n(x) \left|1 - \frac{x}{n}\right| dx$ converge. Or $1 - \frac{x}{n} \geq 0$

$\Leftrightarrow \int_0^n f_n(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right) dx$ converge

$\Leftrightarrow \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$ converge.

~~Or f_{n+1} densité de probabilité et donc par définition~~ $\cancel{\int_0^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{n+1} f_n(x)\,dx} =$

Or, cette intégrale converge par continuité, donc,

$E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)$ existe $(n \in \mathbb{N}^*)$ et vaut,

$$E\left(1-\frac{X_n}{n}\right) = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$$

$$= (-n) \int_0^n \left(-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$$

$$= (-n)\left[\left(\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}}{n+1}\right)\right]_0^n \quad \text{car} \quad n > -1$$

$$= (-n)\left(0 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \underline{\frac{n}{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

De même, $E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existe, $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n2} \cdot f_n(x)\,dx$

converge absolument (théorème du transfert)

$\Leftrightarrow \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+2} dx$ converge absolument.

Par continuité et par positivité de $1-\frac{x}{n}$ sur $[0, n]$, on a :

$$\underline{\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+2} dx \quad \text{converge.}}$$

<u>Donc $E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existe</u>

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right) = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1} dx$$

$$= (-n)\int_0^n \left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1} dx$$

$$= (-n)\left[\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+2}}{n+2}\right]_0^n$$

$$= (-n)\left(0-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{n}{n+2}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existe et vaut $\frac{n}{n+2}$

b) D'abord, par linéarité,

$E\left(1-\frac{X_n}{n}\right) \Rightarrow E(X_n)$ existe.

On a, $E\left(1-\frac{X_n}{n}\right) = -\frac{1}{n}E(X_n) + 1$ (linéarité)

donc $\frac{n}{n+1} = -\frac{1}{n}E(X_n) + 1$

$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n}E(X_n)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} = -\frac{1}{n}E(X_n)$

$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} = E(X_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

De plus, par linéarité $E(X_n^2)$ existe car

$E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existe.

Donc $V(X_n)$ existe.

D'abord, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right) = E\left(1 - \frac{2X_n}{n} + \frac{X_n^2}{n^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{n}E(X_n) + \frac{1}{n^2}E(X_n^2) \quad \text{(linéarité)}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n}{n+2} = 1 - \frac{2}{n}\cdot\frac{n}{(n+1)} + \frac{1}{n^2}E(X_n^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n+2} = 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n^2}E(X_n^2)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{n+2} = -\frac{2}{n+1} + \frac{1}{n^2}E(X_n^2)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+1)} + \frac{2(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n^2}E(X_n^2)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n^2} E(X_n^2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2n^2}{(n+1)(n+2)} = E(X_n^2)$.

Par Koenig-Huygens, on a alors,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$

$\Leftrightarrow V(X_n) = \dfrac{2n^2}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$

$\Leftrightarrow V(X_n) = \dfrac{2n^2(n+1) - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $V(X_n) = \dfrac{n^2(2n+2-n-2)}{(n+1)^2(n+2)} = \dfrac{n^3}{(n+1)^2(n+2)}$

3) D'une part si $x < 0$, $F_n(x) = 0$ (gauche du support)

D'autre part si $x > n$, $F_n(x) = 1$ (droite du support).

Si $x \in [0, n]$,

$F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} dt$ (définie par continuité)

$$F_n(x) = (-n) \int_0^x \left(-\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{\cancel{t}}{n}\right)^{n-1} dx$$

$$F_n(x) = (-n) \left[\frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{n} \right]_0^x$$

$$F_n(x) = (-n) \left(\frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{n} - \frac{1}{n} \right)$$

$$F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

Donc,

$$F_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > n \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x < n \end{cases}$$

---

4) a) Soit $x < 0$.

Alors on a, $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$ car $F_n(x) = 0$.

---

b) Soit $x \geq 0$. Soit $n \geq \lfloor x \rfloor + 1$.

On a par définition, $\forall x \geq 0$,

$0 \leq \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

donc $0 \leq \lfloor x \rfloor + 1 \leq n \Rightarrow 0 \leq x < n$

Donc $\forall n \,/\, n \geq \lfloor x \rfloor + 1$, on a,

$F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

c) Soit $x > 0$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{n} = 0$ donc, $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$.

De ce fait $n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -x$.

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -x$

d) Si $x < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

Sinon, en passant à la limite dans l'expresion de F_n, si $x \geq 0$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

On $1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}$ car

$1 - \frac{x}{n} > 0$ donc, comme on réutilise la 4c,

$\lim 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - e^{-x}$ $(x \geq 0)$.

Donc, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 42

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5) a) On a par le cours,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) On a, $Z_n = nM_n$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$P(Z_n \leq x)$

$= P(Z_n \leq x)$

$= P(nM_n \leq x)$

$= P\left(M_n \leq \frac{x}{n}\right)$ car $n \in \mathbb{N}^*$

$= 1 - P\left(M_n > \frac{x}{n}\right)$.

On le minimum est plus grand que $\frac{x}{n}$ signifie que toutes les variables le sont

$= 1 - P\left(\left[U_1 > \frac{x}{n}\right] \cap \dots \cap \left[U_n > \frac{x}{n}\right]\right)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On, les $(U_i)_{i\in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, donc,

$$= 1 - \left(P\left(U_1 > \frac{x}{n}\right)\right)^n$$

$$= 1 - \left(1 - P\left(U_1 \leq \frac{x}{n}\right)\right)^n$$

$$= 1 - \left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

On, $G\left(\frac{x}{n}\right) = 0$ si $\frac{x}{n} < 0 \iff x < 0$

On, $G\left(\frac{x}{n}\right) = 1$ si et seulement si $\frac{x}{n} > 1 \iff x > n$

On, $G\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n}$ si et seulement si, $\frac{x}{n} \in [0,n]$.

Donc,

$$\cancel{F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{n} & \text{si } x \in [0,n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}}$$

Donc,

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

c)

Zn et Xn ayant les mêmes fonctions de repartition, elles suivent la même loi.

Problème :

1)
```
def var X(n):
    k = rd.randint(1, n+2)
    if k == n+1 :
        X = 0
    elif k == 1 :
        X = 1
    else :
        X = 1
        while rd.randint(1, n+1) <= k-1
            X = X+1
```

2) Le choix de l'urne se fait au hasard. De plus, il y a n+1 urnes.

De ce fait, par equiprobabilité,

$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad P(U_k) = \dfrac{1}{n+1}$

3)a) On note $[U_k = k]$ réalisé

Si $k \geq 2$ alors, $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{n-k+1}{n}\right)$ où $\dfrac{n-k+1}{n} \in]0,1[$

car on attend le 1e succès lors d'epreuves identiques (avec remise) et independantes, d'intitulé "obtenir la première blanche" de probabilité $\frac{n-k+1}{n}$ du fait de l'equiprobabilité.

Si $k=1$, alors, X_n suit la loi certaine, $X_n = 1$.

b)

4) a) L'urne choisie est l'urne $n+1$ qui contient donc $n+1-1$ boules noires.
Autrement dit, elle ne contient que des boules noires.

Donc, $P_{(U_{n+1})}(X_n = 1) = 0$ car sans boule blanche dans l'urne on ne peut pas en obtenir.

b) $\forall k \in [\![1, n]\!]$

$$P_{U_k}(X_n = 1) = \frac{n-k+1}{n}$$ (par equiprobabilité).

en effet, l'urne U_k contient n boules dont $n-k+1$ blanches et $k-1$ noires.
Donc on a bien cette probabilité par equiprobabilité car : $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(U_k) \neq 0$.

c)

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Avec le Système complet d'évènements, $(U_K)_{K\in[\![1,n+1]\!]}$,

on applique la formule des probabilités totales,

$$P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n+1} P_{U_K}(X_n=1)\,P(U_K) \quad \text{et} \quad P(U_K)\neq 0$$

car choix au hasard

$$P(X_n=2)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n-k+1}{n}$$

$$P(X_n=2)=\frac{1}{n(n+1)}\cdot\sum_{k=1}^{n+1} n-k+1$$

Avec le changement d'indice inversé,

$$P(X_n=1)=\frac{1}{n(n+1)}\cdot\sum_{k=0}^{n} K$$

$$P(X_n=2)=\frac{1}{2}$$

5) Soit $j\geq 2$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

U_{n+1} ne contient que des boules noires et donc il est impossible d'y piocher une blanche à un moment.

Donc, $\forall j \geq 2$

$P_{U_{n+1}}(X_n = j) = 0$.

b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$P_{U_k}(X_n = j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \cdot \frac{n-k+1}{n}$ (question 3a)

Car si $[U_k]$ réalisé alors $[X_n = j] \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$

c) Avec la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $(U_k)_{k \in [\![1, n+1]\!]}$,

$P_{U_k}(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n+1} P(U_k) \cdot P_{U_k}(X_n = j)$.

Or, $P_{U_{n+1}}(X_n = j) = 0$ donc,

$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{n-k+1}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}$$

---

6) a) Soit $A \geq 2$.

$$\sum_{j=2}^{A} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}$$

Par telescopage,

$$= \frac{k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^{A}.$$

Or $\frac{k}{n} \in [0,1[$ donc, $\lim\limits_{A \to +\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{A} = 0$.

De ce fait,

$\sum_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j} \right]$ converge et vaut $\frac{k}{n}$

---

b) $\forall j \geq 2$, on a, $P(X_n = j)$.

$$P(X_n \geq 2) = P([X_n = 2] \cup \dots \cup [X_n = n] \cup \dots).$$

Par incompatibilité $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P(X_n \geq 2) = \sum_{j=2}^{+\infty} P(X_n = j) \quad \text{(converge car probabilité)}$$

$$= \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j} \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j} \right] \right) \quad \text{(indices indépendants)}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n-1}{2(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

7) a)

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 42 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliqués EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) a) Par le système complet d'événements $([X_n=k])_{k\in\mathbb{N}}$,

alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P(X_n=0) = 1 - \left(P(X_n \geq 2) + P(X_n=1)\right)$$

$$P(X_n=0) = 1 - \left(\frac{n-1}{2(n+1)} + \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X_n=0) = 1 - \left(\frac{n-1+(n+1)}{2(n+1)}\right)$$

$$P(X_n=0) = 1 - \frac{2n}{2(n+1)}$$

$$P(X_n=0) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

b) On aurait pu anticiper le résultat sans calcul car comme les tirages se font indéfiniment dans les urnes alors si l'urne contient une blanche alors on finira par la piocher.

Donc seule l'urne U_{n+1} aura $P(X_n=0) = 1$.

Donc par équiprobabilité la probabilité est cohérente.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8) a)

$$E(X_n) \text{ existe } \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} j \cdot P$$

b)

```
n = int (input ("entrer la valeur de n : "))
v = np. arange (1, n+1)
E = (n / n+1) * (np. sum (1 / v))
print (E)
```

9) a) Soit, $t \in [p, p+1]$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$$p \leq t \leq p+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{p+1}$$ (par bijectivité décroissante de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Or, ces fonctions sont continues (sur $[p, p+1]$) comme constantes ou comme fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas.

et, $p < p+1$.

Par croissance de l'intégrale,

$$\Rightarrow \int_p^{p+1} \frac{1}{p} \geq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \geq \int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} \geq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \geq \frac{1}{p+1} \quad (p \in \mathbb{N}^*)$$

---

9 b) Par somme, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \geq \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \geq \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p+1}$$

~~Par Chasles~~

$$\cancel{\Rightarrow \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p} \geq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt}$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r} \geq \sum_{r=1}^{n-1} \ln(r+1) - \ln(r) \geq \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r}.$$

Par télescopage, on a, $\forall r \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r} \geq \ln(n) \geq \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r}.$$

---

c) D'une part, $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r} \geq \ln(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} \geq \ln(n) + \frac{1}{n}$$

D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$\sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r} \leq \ln(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} \leq \ln(n) + 1.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} \leq \ln(n) + 1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 42 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

d) On a, $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1.$$

Or, $\ln(n) > 0$ car $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$\Rightarrow \ln(n)\left(1 + \frac{1}{n\ln(n)}\right) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{\ln} \leq \ln(n)\left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right).$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$ donc en

divisant par $\ln(n)$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Donc, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Donc,

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\frac{n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Donc $E(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751