

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

G6-00223
800252
Mat Appl I



Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées en ligne b5

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 1

PARTIE A

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+2} = U_n e^{1/U_n}$$

1) a) Par récurrence.

d'abord, $U_0 > 0$ puisque $U_0 = 1$, donc initialisé.

De plus, soit n quelconque fixé tel que, $n \in \mathbb{N}$ et,

$$\Rightarrow U_n > 0 \quad \text{puisque} \quad \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \text{ et comme } U_n > 0, e^{1/U_n} \text{ existe}$$

$$\Rightarrow \underline{U_{n+2} > 0.}$$

Donc, par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0.$

$$\text{On a, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{U_{n+2}}{U_n} = \frac{U_n e^{1/U_n}}{U_n} \quad (U_n > 0)$$

$$\frac{1}{u_n} = e$$

Or, $u_n > 0$ donc, $\frac{1}{u_n} > 0$.

de fait, comme la fonction exponentielle est
strictement croissante sur \mathbb{R} ,
alors, $e^{\frac{1}{u_n}} > 1$.

Donc, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on a, $\frac{u_{n+2}}{u_n} > 1$.

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante

c) Supposons, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ où $l \in \mathbb{R}^{+*}$ ou l fixé. (Absurde)

Par le théorème du point fixe on a donc,

$$l = l \cdot e^{\frac{1}{l}} \quad \text{puisque } l > 0$$

$$\Leftrightarrow l = l \cdot e^{\frac{1}{l}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = e^{\frac{1}{l}} \quad \text{Or, } 1 = e^{\frac{1}{l}} \Leftrightarrow \frac{1}{l} = 0.$$

Comme c'est absurde puisque nécessairement $l \geq 1$
car $u_0 = 1$, alors, c'est absurde.

Donc nécessairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2)

import numpy as np

n = 1

m = 0

while n < 10 ** 5 :

n = n * np.exp(1/n)

m = n + 1

print (m)

PARTIE B :

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x \cdot e^{1/x}$

3) D'abord, en $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{1/x}$

~~Avec le changement de~~

~~θ_n , $\forall x \in]0, +\infty[$, $x = e^{\ln(x)}$~~
~~donc, on a, $f(x) = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.~~

~~donc par croissance comparée, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$~~

limite en $+\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par continuité de

l'exponentielle $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (produit)

de plus, $f(x) = x \cdot e^{1/x} = x \cdot (e^x)^{-1} = e^{\ln(x) + \frac{1}{x}}$
 $= e^{\frac{x \ln(x) + 1}{x}}$

donc par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ donc, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

A) f dérivable sur \mathbb{R}^{+*} comme produit de composées de fonctions usuelles l'étant ($x > 0$ donc le dénominateur ne s'annule pas).

$\forall x \in]0, +\infty[$

$$f'(x) = e^{1/x} + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{1/x}$$

$$f'(x) = e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x}$$

$$f'(x) = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Donc, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{x}$ ($e^{1/x} > 0$)
 donc f croissante ($x > 0$) $\Leftrightarrow x \geq 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$$

$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x}$
 donc f décroissante $\Leftrightarrow x < 1$ ($x > 0$)

Dès lors, comme $f(1) = e$,

	⊕	1	+∞
Signe f'		-	+
Variations		+∞	+∞
		↘	↗
		e	

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées emlyonbs

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5) Soit $x > 0$

a) Par le cours,

~~$\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$~~

~~$\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$~~

$$\forall x > 0, \sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(x^{-2})^k}{k!}$$

On, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ existe et vaut e^x si x réel.

On, x^{-2} existe car $x \neq 0$, donc,

$$\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!} \text{ existe et vaut } \underline{e^{\frac{1}{x}}}$$

b) On a, $\forall x > 0$,

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

De plus, $\forall x > 0$

$$x+1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

6) ~~Soit $x > 1$,~~

~~a)~~

$$\begin{aligned}
 &= x + 1 + \frac{1}{x} \left(x^2 \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \right) \right) \\
 &= x + 1 + \frac{1 \cdot x^2}{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - x^{-1} - 1 \right) \\
 &= x + 1 + x \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1 \right) \\
 &= x + 1 + x e^{\frac{1}{x}} - \cancel{1} - x \\
 &= \underline{f(x)}
 \end{aligned}$$

Donc, avec $x \geq 0$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$

6) Soit $x \geq 1$

a)

$$\forall x \geq 1, f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

On a, $\forall x \geq 1$,
 et $k \geq 2$, $\frac{x^{2-k}}{k!} \leq 1$ puisque la fonction inverse est bijective décroissante sur \mathbb{R}^{+*} .

Donc,

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Car $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ est uniquement avec des termes positifs.

Donc,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e.$$

ON ADMET la suite de la 6a.

b) $x \geq 1$. Donc, $\frac{1}{2x} > 0$. Par la 6a, $\forall x \geq 1$,

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x} \quad (x > 0).$$

On en reprenant l'expression de f trouvée en 5b,

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}.$$

7) On a par encadrements, $\forall x \geq 1$,

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} + x + 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{x} + x + 1.$$

On, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$. D'où, par encadrements,

$$\underline{f(x) = x + 1 + o(1) \text{ en } +\infty}$$

8) Admis.

PARTIE C:

9) a) $\forall k \in \mathbb{N}, v_k > 0,$

$$\begin{aligned} & \ln(v_{k+2}) - \ln(v_k) \\ &= \ln(v_k \cdot e^{1/v_k}) - \ln(v_k) \\ &= \ln(v_k) + \ln(e^{1/v_k}) - \ln(v_k) \quad \text{car } v_k > 0 \text{ or } e^{1/v_k} > 0 \\ &= \ln(e^{1/v_k}) = \frac{1}{v_k}. \end{aligned}$$

b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(v_{k+2}) - \ln(v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v_k} \quad (v_k > 0).$$

$$\Rightarrow \ln(v_n) - \ln(v_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v_k}. \quad (\text{telescoping})$$

Or, $v_0 = 1,$

$$\Rightarrow \ln(v_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v_k}. \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

10) (*) valable si $x \geq 1$ or on a $v_0 = 1$ donc par croissance de (v_n) , $\forall k \in \mathbb{N}^*, v_k \geq 1$ or $v_0 = 2.$

donc on applique * à v_k ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2v_k} \leq f(v_k) - v_{k-1} \leq \frac{e}{v_k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2v_k} + 1 \leq f(v_k) - v_k \leq \frac{e}{v_k} + 1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées embyons

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc on a bien, $\forall k \in \mathbb{N}$ comme $f(v_k) = v_{k+2}$

$$1 + \frac{1}{2v_k} \leq v_{k+2} - v_k \leq 1 + \frac{e}{v_k} \quad (v_k > 0)$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on somme (légal car $n > 0$), $v_k > 0$ (q1)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2v_k} \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+2} - v_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{e}{v_k} \right)$$

Par linéarité de la somme et comme il y a $n-2 - 0 + 2$ termes donc n , alors,

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v_k} \leq v_{n-1} \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v_k}$$

(telescoping)

Ensuite par la qb, comme $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Rightarrow n + \frac{1}{2} \ln(v_n) \leq v_{n-1} \leq n + e \ln(v_n)$$

on enlève $n-1$,

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \ln(v_n) \leq v_n - n \leq 1 + e \ln(v_n) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$11) a) \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n > 0.$$

$$\text{Soit, } h, \quad h(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et } x \in \mathbb{R}^{+*}.$$

$$\text{Par croissance comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

On, h continue sur \mathbb{R}^{+*} comme quotient de fonctions usuelles l'étant dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\text{Donc, par continuité, comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty, \text{ alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{v_n} = 0.$$

b)

$$12) \text{ Par 10b, on a } \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$m + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{v_k} \leq v_{m-1} \leq m + e \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{v_k}$$

EXERCICE 2 :

PA

Soit $M_3(\mathbb{R})$

1) Effectuons un test de liberté, soit (λ, μ, γ)

$$\lambda I + \mu J + \gamma K = 0_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \gamma = 0 \\ \mu = 0 \\ \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(analyse des coefficients de
deux premières lignes)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases} \quad \alpha, I, J, k \text{ appartiennent à } \mathcal{E}$$

Par définition, (I, J, k) est une famille libre de \mathcal{E} .
De plus, cette famille est génératrice de \mathcal{E} (Vect).

\mathcal{B} est donc une base de \mathcal{E} .

Donc $\dim \mathcal{E} = 3$.

2) J et k sont symétriques donc diagonalisables.

3) a) $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} J$

$$J^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$J^3 = 2J$

b) De ce fait, $P(X) = X^3 - 2X$ est annulateur de J .

Or, l'ensemble des valeurs propres de J est racine de ses polynômes annulateurs.

Donc, comme $P(X) = 0$
 $\Leftrightarrow X(X^2 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow X = 0$ ou $X = \sqrt{2}$ ou $X = -\sqrt{2}$

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées em Lyon 6S

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc, $\text{Sp}(J) \subset \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

A) a) J'abord

$$U_1 \neq 0 \text{ et } J U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} U_1. \text{ donc } U_1$$

vecteur propre de J (associé à $\sqrt{2}$)

$$U_2 \neq 0 \text{ et, } J U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \text{ donc } U_2 \text{ vecteur propre}$$

de J (associé à 0)

b) Passons, $U_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où (a, b, c) n'est et U_3 non-nul.

$$J U_3 = -\sqrt{2} U_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c = \sqrt{2}a \\ a = \sqrt{2}b \\ a = -\sqrt{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}b + \sqrt{2}c = -2a \\ a = -\sqrt{2}b \\ a = -\sqrt{2}c \end{cases}$$

U_3 vecteur propre de J associé à $-\sqrt{2}$,

$$\Leftrightarrow (J + \sqrt{2}I) U_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a + b + c = 0 \\ a + \sqrt{2}b = 0 \\ a + \sqrt{2}c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a + b + c = 0 \\ a = -\sqrt{2}b \\ a = -\sqrt{2}c \end{cases}$$

en prenant $c = 1$ et $b = 1$, on a alors,

$$U_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre associé à } -\sqrt{2}$$

5) a) La concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de J forme une famille libre.

De ce fait, (U_1, U_2, U_3) est libre. Or, U_1, U_2 et U_3 sont des éléments de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et cette famille est de cardinal 3.

Or, $\dim M_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$. Donc (U_1, U_2, U_3) base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

b)

J diagonalisable donc par définition, il existe D diagonale et P de $M_3, 1(\mathbb{R})$ inversible tels que,

$$J = P D P^{-1} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

En prenant,

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a bien une}$$

telle matrice,

avec,

$$P^{-1} J P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad P \text{ inversible}$$

6) a)

Calculons par cas. On a, on le rappelle,

$$U_1 \neq 0$$

$$U_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad U_3 \neq 0$$

$$K U_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{1 \cdot U_1}$$

$$K U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{-1 U_2}$$

$$K U_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{1 \cdot U_3}$$

On, (U_3, U_2, U_1) forme une famille libre.

Comme on a déjà 3 sous-espaces propres et que

$\text{rg}(k) = 3$ puisque k diagonalisable alors, nécessairement, k diagonalisable
 car $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ libre
 (U_1, U_2, U_3) base de vecteurs propres de k .

6b) Par le 6a), on a $S_f(k) = \{-1, 1\}$.

Dès lors, comme k diagonalisable, et k a les mêmes sous-espaces propres de J donc on garde P ,

on a, $P^{-1} k P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on a repris l'ordre des sous-espaces propres).

7) Soit M . Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$P^{-1} M P = P^{-1} (aI + bJ + cK) P$$

$$= aI + b \begin{pmatrix} -1 \\ P J P \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ P K P \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + \sqrt{2}b + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + c \end{pmatrix}$$

b) Comme P inversible on notant $D = P^{-1} M P$,

$$P^{-1} M P = D$$

$$\Leftrightarrow M = P D P^{-1}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées en lyons bs

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc comme M semblable à D ,

$$\text{Sp}(M) = \left\{ a + \sqrt{2}b + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c \right\}$$

8) Soit ρ et $\rho(M) = \rho(aI + bJ + cK)$

8a) on a ,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{puisque,}$$

$$\rho(I) = (1, 1, 1)$$

$$\rho(J) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$$

$$\rho(K) = (1, -1, 1)$$

8b) Montrons que S inversible.

Faisons un test de liberté, α, β, c réels

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta\sqrt{2} + c = 0 \\ \alpha - c = 0 \\ \alpha - \beta\sqrt{2} + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = -\sqrt{2}\beta \\ \alpha = c \\ 2\alpha = \sqrt{2}\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc la famille est libre, et $\text{rg}(S) = 3$.

Donc S inversible

Donc \rightarrow application linéaire bijective

PARTIE B:

g) def voisins (A, i) :
 $m = \text{len}(A[i])$
 $V = []$

```

for j in range (n):
    if j != i and A[i][j] == 1:
        V.append (j)
return V

```

10)

```

from numpy import
def min_ext (L):
    m = 0
    while m in L:
        m = m + 1
    return (m)

```

11)

```


from numpy import
def coloration (A):
    n = len (A)
    C = list range (n)
    for i in range (1, n):
        C-neighbors =
        C[i] = min_ext (C-neighbors)
    return (C)


```

```

done, def coloration (A):
    n = len (A[0])
    C = list range (n)
    for i in range (1, n):
        C-neighbors = [C[j] for j in C-neighbors]
        C[i] = min_ext (C-neighbors)
    return (C)

```

12)

a)

En exécutant cette commande, on a,

$$= [0, 1, 0,$$

b) Oui, on peut proposer,

$$c(s_0) = 3$$

$$c(s_3) = 2$$

$$c(s_1) = 2$$

$$c(s_4) = 1$$

$$c(s_2) = 1$$

$$c(s_5) = 3$$

→ suite p21

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées Embryons

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 3 :

Partie A :

Soit $U \in U_{[0,1]}$ et $V = \frac{1}{\sqrt{U}}$.

1/a)

$$U \in]0, 1]$$

$$\text{donc } \sqrt{U} \in]0, 1].$$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{U}} \in [1, +\infty[.$$

1b) Si $x < 1$, alors $F_V(x) = 0$ (gauche du support).

Si $x \geq 1$,

$$F_V(x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{U}} \leq x\right)$$

$$= P\left(\sqrt{U} \geq \frac{1}{x}\right)$$

$$= P\left(U \geq \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2} \quad (x \geq 1)$$

car $x > 0$ et fonction inverse
bivariée décroissante sur \mathbb{R}^{++}

car la fonction carrée est bivariée
croissante sur \mathbb{R}^+

Donc,

$$F_V(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1. \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

c) D'une part, $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_V(x) = 0$ et $F_V(1) = 0$

donc F_V continue en 1.

De plus, F_V continue sur $]-\infty, 1[$ (constante) et sur $]1, +\infty[$ comme somme de fonctions l'étant et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

Donc $F_V \in \mathcal{C}^0$ sur \mathbb{R} .

De plus, $F_V \in \mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ (constante) et sur $]1, +\infty[$ comme somme de fonctions l'étant * dont le dénominateur ne s'annule pas ($x^2 > 0$ car $x > 1$). * et quotient

Donc $F_V \in \mathcal{C}^1$ sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 1.

Donc \mathbb{N} à densité.

De plus, F_V dérivable sur $]-\infty, 1[$ et

$$F_V'(x) = 0 \quad \text{si } x \in]-\infty, 1[\quad \text{et}$$

$$\forall x \geq 1,$$

$$F_V'(x) = - \frac{-1 \cdot 2x}{x^4}$$

$$F_V'(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Donc

$$f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

← valeur arbitraire puisque V
à densité

$$2) \quad E(V) \text{ existe} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f_V(x) dx \text{ converge absolument}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge.}$$

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann de
paramètre $\alpha > 1$.

donc elle converge et l'espérance existe.

De plus, par le calcul, on pose $A \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{2}{x^2} dx &= 2 \cdot \int_1^A \frac{1}{x^2} dx \quad (\text{existe car casimé}) \\ &= 2 \cdot \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^A \\ &= 2 \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{A} + 2$$

Avec A qui tend vers $+\infty$ et a ,

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx = 2$$

donc $E(V) = 2$.

De plus, $V(V)$ existe $\Leftrightarrow E(V^2)$ existe,

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_V(x) dx \text{ converge absolument}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2}{x} dx \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \text{ converge. Or, on reconnaît ici}$$

un intégral de Riemann divergent de paramètre 1.

Donc, $E(V^2)$ n'existe pas et donc $V(V)$ n'existe pas.

Partie B:

Soit $n \geq 1$.

$$M_n = \max(V_1, \dots, V_n)$$

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées en ligne

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~Si $x < 1$,~~

$$P(M_n \leq x) = P([V_1 \leq x] \cap [V_2 \leq x] \cap \dots \cap [V_n \leq x])$$

Car le x est du maximum plus petit que x signifie que tous le sont.

On, les $(V_i)_{i \in [1, n]}$ sont de mêmes lois et indépendantes.

$$\begin{aligned} \text{Donc, } F_n(x) &= \prod_{i=1}^n P(V_i \leq x) && (V_i \text{ de mêmes lois que } V) \\ &= \underbrace{(F_V)^n}_{\text{(car } n \text{ termes)}} \end{aligned}$$

b) Si $x \leq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0.$$

de plus, si $x > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$$

On, $x \in]1, +\infty[$ donc $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \in]0, 1[$

De ce fait, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{x^n}\right) = -\infty$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$ par composée (continuité de l'exponentielle)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$.

c) De ce fait, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$ alors, il est impossible que F_n converge vers

une fonction étant fonction de répartition d'une autre variable qui tendrait par définition vers 1.

Donc $(F_n)_{n \geq 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire

Soit $W, F_W(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Soit $n \geq 1$, G_n fonction de répartition de $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$.

1) a) Étudions G_n .

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$G_n(x) = P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right)$$

$$G_n(x) = P(M_n \leq \sqrt{n}x) \quad \text{car } \sqrt{n} > 0$$

Ainsi, si $\sqrt{n}x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\sqrt{n} > 0)$

alors, $G_n(x) = 0$

si $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \quad (q \leq b \text{ et } 3a)$$

~~$G_n(x) =$~~

$$\text{Donc, } G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

valeur
arbitraire car
l'identité

et ainsi, on a, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Donc, $\forall x > 0$, comme $\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)}$

alors on étudie la limite et $x > 0$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^2} = 0 \text{ alors,}$$

$$\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{nx^2} \right) \sim -\frac{1}{nx^2} \quad (x > 0) \text{ et } n}$$

$$\text{Donc, } e^{n \ln \left(1 - \frac{1}{nx^2} \right)} \underset{+ \infty}{\sim} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{par produit}) \cdot (x > 0)$$

$$\text{Donc, } \underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x > 0}$$

b) De plus, $\forall x \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = 0$ d'après l'expression de G_n .

Donc,

$$\text{si } x > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \underline{e^{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\text{si } x \leq 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \underline{0.}$$

Donc par définition, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées embarcés

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie C :

5) a) Select montants from 2024

b) Select montants

Partie D : On reprend les valeurs de V.

7) $\forall n \in \mathbb{N} (\Omega)$

$$P(N=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

8) On remarque que T est égale à l'ensemble des éléments de $\{V_1, \dots, V_N\}$ prenant une valeur supérieure à A .

On sait que N suit une loi de Poisson de paramètre λ et a donc N pour support.

De fait, $T_n(\Omega) = \mathbb{N}$ puisque il peut y avoir une infinité ou aucune variable (V_i) supérieure(s) à A .

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) On peut assimiler T sachant $(N=n)$ à une variable qui compte le nombre de succès de probabilité type $V_i > A$. ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$) c'est-à-dire

" V supérieur à A ". En effet, les $(V_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ étant indépendantes et de même loi, on peut assimiler T à un compteur de succès lors de n épreuves similaires et indépendantes.

$$\text{On, } P(V > A) = 1 - P(V \leq A) \quad \text{or comme } A > 1$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)$$

$$= \frac{1}{A^2}$$

$\frac{1}{A^2}$ est donc la probabilité de succès.

Donc, T sachant $(N=n)$ suit $B\left(n, \frac{1}{A^2}\right)$. ($n \in \mathbb{N}^*$).

b) Si $k > n$, alors $P_{(N=n)}(T=k) = 0$ puisqu'il ne peut pas y avoir plus de variables $(V_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ supérieures à A que de variables présentes dans l'ensemble $\{V_1, \dots, V_n\}$.

Si $k \leq n$, alors, comme $T \subset C$, $B\left(n, \frac{1}{A^2}\right)$

$$P_{(N=n)}(T=k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

10) Soit $k \in \mathbb{N}$. $A > 1$

Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([N=n])_{n \in \mathbb{N}}$.

On a alors, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$P(T=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n) \cdot P_{(N=n)}(T=k)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$$

$$\text{Car } k > n \Rightarrow P_{(N=n)}(T=k) = 0.$$

$$= \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \frac{n!}{(m-k)! k!} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \sum_{m=k}^{+\infty} \lambda^m \cdot \frac{1}{(m-k)!} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^m \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{-k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \sum_{m=k}^{+\infty} \lambda^m \cdot \frac{1}{(m-k)!} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^m \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{-k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \cdot \left(\frac{A^2}{A^2-1}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{n+k} \cdot \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n+k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{A^2-1}\right)^k \lambda^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \left(\frac{A^2-1}{A^2}\right)^{n+k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k e^{\lambda} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right) \quad \left(\text{On reconnaît une série } \cancel{\text{généralisée}} \text{ exponentielle}\right)$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda - \frac{\lambda}{A^2}} \cdot \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k$$

$$= \frac{e^{-\frac{\lambda}{A^2}}}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k$$

Copie anonyme - n°anonymat : 800252

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 33	Session : 2025
	Épreuve de : Mathématiques Appliquées embaiss		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Ainsi, comme $T(\Omega) = N$, alors,

$$T \hookrightarrow P\left(\frac{1}{A^2}\right).$$

11) De ce fait, comme la moyenne se rapproche de l'espérance et que $T \hookrightarrow P\left(\frac{1}{A^2}\right)$, alors, on a

en moyenne $\frac{1}{A^2}$ sinistres de coût supérieur à A en un an.

FIN

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE



